

局域共振型加筋板的弯曲波带隙与减振特性

朱席席 肖勇 温激鸿 郁殿龙

Flexural wave band gaps and vibration reduction properties of a locally resonant stiffened plate

Zhu Xi-Xi Xiao Yong Wen Ji-Hong Yu Dian-Long

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 176202 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.176202

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.176202>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I17>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种多频局域共振型声子晶体板的低频带隙与减振特性

Low frequency band gaps and vibration reduction properties of a multi-frequency locally resonant phononic plate

物理学报.2016, 65(6): 064602 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.064602>

环形 ZnO 薄膜谐振器的横模抑制与测试分析

Lateral mode suppression and experiment for the ZnO ring thin-film bulk acoustic resonator

物理学报.2015, 64(22): 224601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.224601>

ZnO/Diamond/Si 结构中声表面波传播特性分析

Simulation of characteristics of ZnO/diamond/Si structure surface acoustic wave

物理学报.2013, 62(10): 104601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.104601>

局域共振型加筋板的弯曲波带隙与减振特性*

朱席席 肖勇[†] 温激鸿 郁殿龙

(国防科学技术大学机电工程与自动化学院, 装备综合保障技术重点实验室, 长沙 410073)

(2016年5月17日收到; 2016年6月2日收到修改稿)

通过在加筋板结构上附加周期性排列的“弹簧-质量”共振子单元, 构造了一种局域共振型加筋板结构. 针对这种新型结构, 基于有限元法和周期结构 Bloch 定理, 建立了其弹性波传播与振动特性理论计算方法; 采用该方法深入研究了局域共振型加筋板的弯曲波带隙特性和减振特性. 研究表明, 局域共振子能够对加筋板的弯曲波传播特性产生显著影响, 一方面使其产生更加低频的带隙, 另一方面还能拓宽其中高频带隙. 进一步深入分析了共振子的弹簧刚度、共振子的质量对带隙特性和减振特性的影响, 发现了有价值的带隙调控现象、规律和减振特性, 可为局域共振型加筋板的带隙特性设计与工程减振应用提供理论指导和有益参考.

关键词: 局域共振, 加筋板, 弯曲波带隙, 减振

PACS: 62.30.+d, 46.40.-f, 63.20.D-

DOI: 10.7498/aps.65.176202

1 引言

加筋板结构具有质量轻、刚度大的特点, 在船舶、飞机、列车等装备中都作为一种基础结构使用, 其振动分析与控制问题一直以来是声学、力学、机械工程等学科领域关注的重要课题. 针对加筋板的传统振动控制技术按有无能量的输入分为无源控制和有源控制. 一般而言, 传统的无源控制技术(如附加动力吸振器、敷设黏弹性阻尼材料等)受附加质量、安装空间等限制, 往往难以同时实现宽频带和强衰减的减振效果. 而有源控制技术则存在稳定性差、环境适应性差、维护成本高等不足, 因此需要进一步探索更多可行的被动振动控制技术.

近年来, 声物理领域的“局域共振型声子晶体”^[1-4]新概念、新原理的提出为解决加筋板等工程结构的振动控制问题提供了新的思路. 声子晶体是指由两种或两种以上介质/结构单元组成的具有弹性波带隙特性的周期性复合材料或结构. 声

子晶体的弹性波带隙特性是指在某些频率范围(带隙)内, 弹性波不能在声子晶体中自由传播. 已有声子晶体研究揭示了两种带隙形成机理, 一种是 Bragg 散射机理^[5], 主要由结构的周期性所致, 其带隙的频率位置主要受 Bragg 条件^[6]控制, 带隙频率对应的弹性波半波长与晶格常数大致相当; 另一种为局域共振机理, 主要由声子晶体中微结构的局部共振所致, 其带隙的频率位置主要由微结构的谐振频率决定. 理论及实验结果都表明, 局域共振型声子晶体可以突破 Bragg 条件的限制, 产生非常低频的带隙, 带隙频率对应的弹性波波长远大于晶格常数^[3]. 借鉴“局域共振型声子晶体”思想, 通过在杆、梁、板等传统工程结构上周期性地附加局域共振单元, 可以构成一类局域共振型人工周期结构(简称为“局域共振型结构”). 已有研究表明, 局域共振型结构中可以产生显著的弹性波带隙, 利用其带隙可以实现对结构振动的高效控制, 具有广阔的应用前景, 近年来吸引了国内外学者的广泛兴

* 国家自然科学基金(批准号: 51305448)和航空科学基金(批准号: 2015ZA88003)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: xiaoy@vip.sina.com

趣 [1,3,4,7-18].

2005年,王刚^[9]在薄板上附加周期性的柱状共振单元,构造了一种局域共振型板结构,并研究了其弯曲波传播特性,理论及实验证实这种结构中存在局域共振弯曲波带隙,利用这种带隙可以显著抑制基板中的弯曲振动传递. 2008年, Pennek等^[12]通过在均质薄板上附加周期性排列的圆柱体制备了一种局域共振型板结构,研究发现这种局域共振型板结构产生低频带隙的同时可以在高频产生一个或多个带隙. 2012年, Xiao等^[14]提出一种附加周期性排列的“弹簧-质量”共振单元的局域共振型板结构,并运用平面波展开法计算了其弯曲波带隙,分析了其带隙形成机理和调控规律;此外, Xiao等^[15]还发现这种局域共振型板结构在低频段可以产生远高于相同面密度均质板的隔声量. 2014年, Assouar等^[16]制备一种附加周期性排列的圆柱体和孔穴的复合局域共振型板结构,通过对圆柱体和孔穴直径的优化实现带隙的拓宽和低频化. 最近, Xiao等^[8]和 Wu等^[17]又提出了一种附加“双悬臂梁式”共振单元的局域共振型板结构,通过调节“悬臂梁”子结构的几何尺寸实现了对带隙的调控,并探讨了同时附加多种“双悬臂梁式”子结构的情况,以产生多个带隙,满足多目标频带的减振需求. 2015年,刘娇等^[18]也对附加“弹簧-质量”的局域共振型板结构展开研究,发现其带隙产生既与共振子对板中弹性波的散射相位相关,也与弹性波在共振子之间的几何传播相位有关. 需要指出的是,上述研究涉及的局域共振型板结构都是以均质薄板为基板,而未对工程中广泛应用的加筋板结构展开研究.

在声学、力学等领域,针对加筋板结构振动问题的研究也广受关注. 姚熊亮、王献忠和庞福振等^[19-21]研究了加筋板结构的振动和声辐射问题,分析了敷设黏弹性阻尼材料对加筋板结构振动和声辐射的抑制效果. 黎胜和赵德有^[22,23]从振动模态和声辐射模态的角度研究了加筋板结构的减振降噪方法. 卢天健和辛锋先等^[24,25]对包括加筋板在内的复杂板壳结构的声振耦合特性做了系统、深入的研究. 已有文献中对加筋板结构振动抑制的研究大多还是利用传统的振动控制手段,而利用带隙原理实现对加筋板结构振动抑制的研究还有待深入.

本文借鉴前人关于局域共振型结构的研究成

果,通过在加筋板结构上附加周期性排列的“弹簧-质量”共振子,构造一种局域共振型加筋板结构,对其带隙特性和减振特性展开深入研究,以期作为加筋板的减振设计提供有益参考.

2 局域共振型加筋板的波传播与振动特性理论计算模型

2.1 结构振动有限元模型

根据传统有限元方法,在忽略阻尼的情况下,局域共振型加筋板的简谐弯曲振动方程可表述为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

其中 \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 分别为结构总体的刚度和质量矩阵, \mathbf{q} 和 \mathbf{F} 分别为结构整体的广义位移矢量和力矢量, ω 为简谐振动角频率. 为方便分析,将局域共振型加筋板分为两部分,一部分为加筋板,即基板;另一部分为“弹簧-质量”谐振子系统,或简称共振子,如图 1 所示. 加筋板质量矩阵 \mathbf{M}_b 和刚度矩阵 \mathbf{K}_b 的构建在文献^[26]中有详细的理论推导,不再赘述. 需要说明的是,由于本文考虑的是弯曲振动,且频率较低,对板的建模是基尔霍夫的薄板理论. 本文在有限元建模中,将加筋板离散成若干四节点矩形单元,每个节点有三个位移自由度: w, θ_x, θ_y , 分别表示挠度、绕 x 轴转角和绕 y 轴转角. 记节点的总数为 n , 则加筋板的总自由度数为 $3n$, 加筋板的质量矩阵 \mathbf{M}_b 和刚度矩阵 \mathbf{K}_b 的规模为 $3n \times 3n$. 需要注意的是,附加的“弹簧-质量”共振子仅对基板单元节点处的横向位移自由度产生作用,而对绕 x 轴和 y 轴的转动自由度不产生作用.

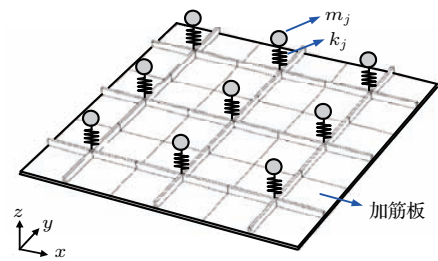


图 1 局域共振型加筋板示意图

Fig. 1. Schematic diagram of the locally resonant periodic stiffened plate.

假设加筋板上附加了 N 个“弹簧-质量”共振子,记第 j ($= 1, 2, 3, \dots, N$) 个共振子附加在基板

板第*i*个节点处, 其质量为 m_j , 固有频率为 f_j , 则其弹簧刚度可以表示为

$$k_j = m_j(2\pi f_j)^2, \quad (2)$$

共振子的质量矩阵和刚度矩阵可表示为:

$$\begin{aligned} m_j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_j \end{bmatrix}, \\ k_j &= \begin{bmatrix} k_j & -k_j \\ -k_j & k_j \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

为建立“加筋板-共振子”的耦合振动方程, 需将加筋板和每个共振子的质量矩阵、刚度矩阵扩充至整体结构的自由度规模($3n + N$), 得到扩充后的矩阵为 $\tilde{M}_b, \tilde{K}_b, \tilde{m}_j, \tilde{k}_j$. 那么, “加筋板共振子”耦合结构整体的质量和刚度矩阵可以表示为:

$$\begin{aligned} M &= \tilde{M}_b + \sum_{j=1}^N \tilde{m}_j, \\ K &= \tilde{K}_b + \sum_{j=1}^N \tilde{k}_j. \end{aligned} \quad (4)$$

于是, 根据(1)式可求得局域共振型加筋板结构在给定力激励 F 下的振动位移 q 频率响应.

2.2 基于有限元法和Bloch定理的弯曲波带隙计算方法

将有限元法和周期结构Bloch定理相结合, 可以计算周期结构带隙特性, 这种方法在文献中已被广泛采用[27,28]. 由于结构的周期性, 只需对结构的单个周期元胞进行有限元建模, 例如取图2(a)所

示的单个元胞进行建模. 基于有限元法离散处理后, 可以获得该周期元胞的简谐振动方程为

$$(K_c - \omega^2 M_c)q_c = F_c, \quad (5)$$

式中 K_c 和 M_c 分别为元胞的刚度和质量矩阵, q_c 和 F_c 为元胞的广义位移矢量和力矢量, 其分量构成如图2(b)所示, 其中:

$$q_c = \left[q_B^T \ q_T^T \ q_{LB}^T \ q_{LT}^T \ q_{RB}^T \ q_{RT}^T \ q_L^T \ q_R^T \ q_I^T \right]^T, \quad (6)$$

$$F_c = \left[F_B^T \ F_T^T \ F_{LB}^T \ F_{LT}^T \ F_{RB}^T \ F_{RT}^T \ F_L^T \ F_R^T \ F_I^T \right]^T. \quad (7)$$

(6)式和(7)式中位移和力向量的下标L, R, B, T分别表示元胞的左、右、下、上边界, 而LB, RB, LT, RT表示左下、右下、左上和右上4个角点, I表示元胞内部. 根据周期结构Bloch定理, 元胞边界上的位移矢量必须满足下列关系式:

$$\begin{aligned} q_R^T &= e^{-ik_x a_x} q_L^T, \\ q_T^T &= e^{-ik_y a_y} q_B^T. \end{aligned} \quad (8)$$

同样, 可以将角点处的位移矢量用 q_{LB} 表示成:

$$\begin{aligned} q_{RB}^T &= e^{-ik_x a_x} q_{LB}^T, \\ q_{LT}^T &= e^{-ik_y a_y} q_{LB}^T, \\ q_{RT}^T &= e^{-ik_x a_x - ik_y a_y} q_{LB}^T, \end{aligned} \quad (9)$$

式中 k_x 和 k_y 分别表示 x 方向和 y 方向的波矢分量, a_x 和 a_y 分别表示沿 x 方向和 y 方向的晶格常数, 此处可理解为周期元胞分别在 x 方向和 y 方向的长度. (8)式和(9)式表示成矩阵的形式为:

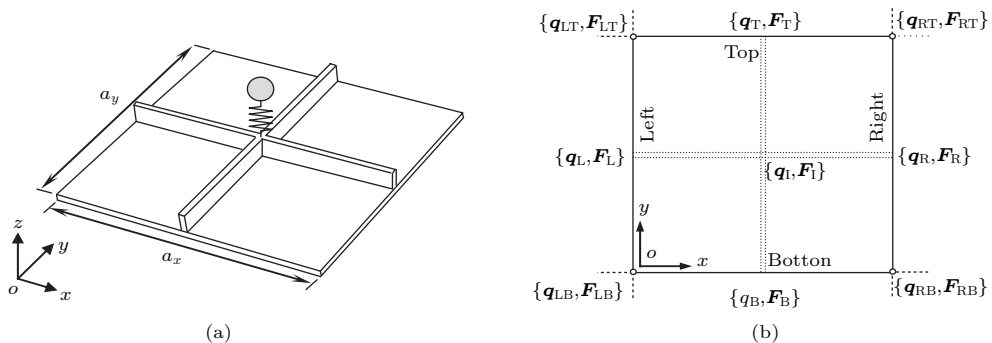


图2 (a) 局域共振型加筋板的周期元胞模型示意图; (b) 元胞的位移自由度及受力示意图

Fig. 2. (a) Schematic diagram of the unit cell of a locally resonant stiffened plate; (b) schematic diagram of displacement degrees of freedom and forces of the unit cell.

$$\mathbf{q}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_T \\ \mathbf{q}_{LB} \\ \mathbf{q}_{LT} \\ \mathbf{q}_{RB} \\ \mathbf{q}_{RT} \\ \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_B & 0 & 0 & 0 \\ e^{-ik_y a_y} \mathbf{I}_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{LB} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_y a_y} \mathbf{I}_{LT} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_x a_x} \mathbf{I}_{RB} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_x a_x - ik_y a_y} \mathbf{I}_{RT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_L & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_x a_x} \mathbf{I}_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_{LB} \\ \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_I \end{bmatrix} = \mathbf{R}(k_x, k_y) \mathbf{q}'_c, \quad (10)$$

式中矩阵 \mathbf{I} 为单位矩阵, 下标表示该单位矩阵的维数对应于相应边界上节点的自由度数. 元胞边界力矢量之间的关系通过 Bloch 定理和力平衡条件获得 [29,30], 取 4 个相邻的元胞研究, 如图 3 所示, 边界和角点的受力已在图中标出. 根据元胞①和元胞②、元胞③和元胞④之间的力平衡条件可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R + e^{-ik_x a_x} \mathbf{F}_L &= 0, \\ \mathbf{F}_T + e^{-ik_y a_y} \mathbf{F}_B &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

此外, 4 个元胞存在 1 个公共角点, 在这个角点处的力平衡关系为

$$\mathbf{F}_{RT} + e^{-ik_x a_x} \mathbf{F}_{LT} + e^{-ik_y a_y} \mathbf{F}_{RB}$$

$$\mathbf{R}^H(k_x, k_y) \mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_T + e^{-ik_y a_y} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{F}_{RT} + e^{-ik_x a_x} \mathbf{F}_{LT} + e^{-ik_y a_y} \mathbf{F}_{RB} + e^{-ik_x a_x - ik_y a_y} \mathbf{F}_{LB} \\ \mathbf{F}_R + e^{-ik_x a_x} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_I \end{bmatrix}. \quad (15)$$

由于这里是考虑自由波传播问题, 上式中的 $\mathbf{F}_I = 0$, 进而可将 (14) 式转换为下列本征值问题

$$[\mathbf{K}'_c(k_x, k_y) - \omega \mathbf{M}'_c(k_x, k_y)] \mathbf{q}'_c = 0, \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{K}'_c(k_x, k_y) = \mathbf{R}^H(k_x, k_y) \mathbf{K}_c \mathbf{R}(k_x, k_y),$$

$$\mathbf{M}'_c(k_x, k_y) = \mathbf{R}^H(k_x, k_y) \mathbf{M}_c \mathbf{R}(k_x, k_y)$$

分别表示元胞缩聚自由度后的刚度矩阵和质量矩阵.

每给定一组 Bloch 波矢 (k_x, k_y) 可以得到一组特征值和特征向量. 一般将 (k_x, k_y) 的取值范围设定在第一布里渊区 (如图 4 所示), 而在实际计算带隙时, 为减少计算量, 通常将波矢设定在不可约布里渊区的边界上 (图 4 中 ΓX , $X M$, ΓM 线段上),

$$+ e^{-ik_x a_x - ik_y a_y} \mathbf{F}_{LB} = 0. \quad (12)$$

将 (10) 式代入 (5) 式可以得到

$$(\mathbf{K}_c - \omega^2 \mathbf{M}_c) \mathbf{R}(k_x, k_y) \mathbf{q}'_c = \mathbf{F}_c. \quad (13)$$

在上式左右两边同时乘以 $\mathbf{R}^H(k_x, k_y)$ (为 $\mathbf{R}(k_x, k_y)$ 的共轭转置矩阵), 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^H(k_x, k_y) (\mathbf{K}_c - \omega^2 \mathbf{M}_c) \mathbf{R}(k_x, k_y) \mathbf{q}'_c \\ = \mathbf{R}^H(k_x, k_y) \mathbf{F}_c. \end{aligned} \quad (14)$$

将上式的右边展开, 并结合 (11) 式、(12) 式可以得到

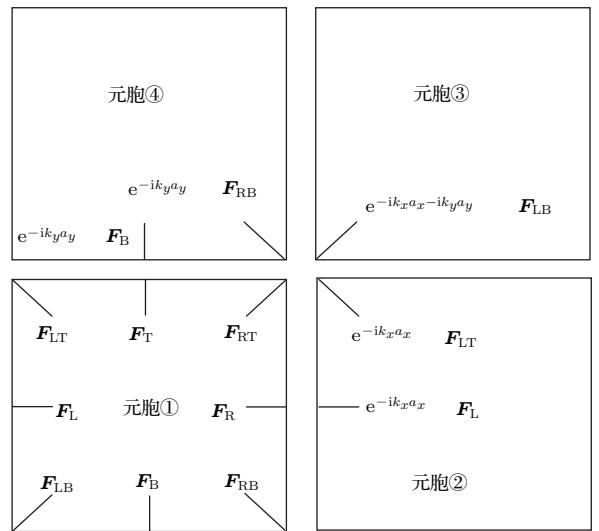


图 3 四个相邻原胞边界受力示意图

Fig. 3. Forces at the boundaries of four connected unit cells.

计算得到的本征频率 ω 即对应了在结构中可以自由传播的本征波的频率, 本征频率 ω 随波矢的变化曲线即为色散曲线 (能带图), 不存在色散曲线的频率范围即为带隙的频率范围.

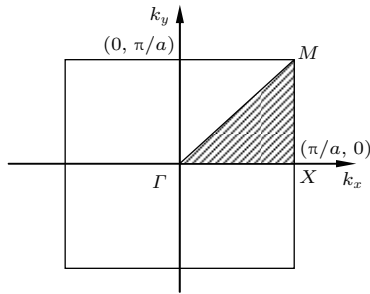


图4 不可约布里渊区示意图 (阴影部分)

Fig. 4. Schematic diagram of the irreducible region of the Brillouin zone.

3 结果与分析

本节首先分别给出一个局域共振型加筋板带隙及振动特性计算的简单算例, 并与有限元软件 COMSOL 的仿真结果进行对比, 以验证本文计算方法的有效性, 从而证实局域共振型加筋板的带隙与减振特性. 然后, 进一步分析共振子的弹簧刚度和共振子的质量对带隙特性的影响规律.

图5所示为算例中考虑的局域共振型加筋板结构的示意图, 其中红色点线框内为周期元胞, 元胞内栅格交点处的红点表示附加共振子的位置. 在计算振动特性时, 考虑的局域共振型加筋板有限结构由 5×5 个元胞组合而成, 考虑的边界条件为四边简支. 图5中右下角的黑点为施加点力激励的位置 $(0.15, 0.15)$, 激励力幅值大小为 1 N, 右上角的蓝点为位移响应拾取点位置 $(0.85, 0.70)$. 假定局域共振型加筋板的晶格常数为 $a_x = a_y = 0.2$ m, 共振子相对基体加筋板的附加质量比设为 25%, 调节共振子的弹簧刚度, 使共振子的固有频率为 300 Hz, 弹簧刚度和固有频率的关系如 (2) 式. 另外, 结构的几何及材料参数如表1所示, 其中 ρ, E, ν 分别表示加筋板材料的密度、杨氏模量和泊松比, a, b, h 分别表示板的长、宽和高, H 表示筋条的高度, W 为筋条的宽度.

表1 加筋薄板材料参数和几何尺寸
Table 1. Parameters of stiffened plate.

$\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	E/GPa	ν	a/m	b/m	h/m	H/m	W/m
2700	70	0.3	0.2×5	0.2×5	0.004	0.15	0.005

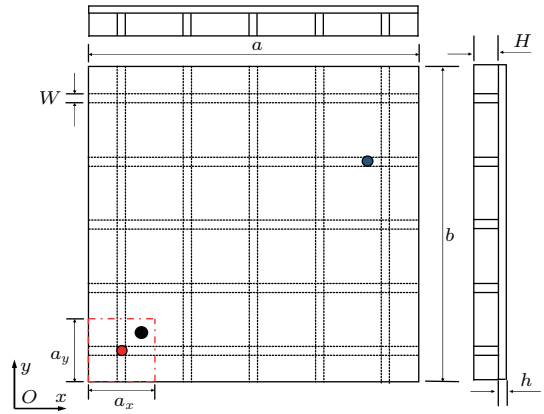


图5 (网刊彩色) 加筋板结构示意图

Fig. 5. (color online) Schematic diagram of a finite locally resonant stiffened plate.

3.1 带隙和振动特性计算与验证

首先, 通过与 COMSOL 软件计算对比来验证本文第2节所述弯曲波带隙计算方法的准确性. 采用本文方法计算得到了上述局域共振型加筋板结构在 1000 Hz 以下的弯曲波色散关系曲线 (如图6(a)中蓝色圆圈线所示), 另外利用有限元软件 COMSOL 仿真计算 (采用三维 solid 单元建模) 得到同一结构在同频段内的色散关系曲线 (如图6(a)中红色实线所示). 图6(b)是 COMSOL 软件有限元仿真模型, 其几何尺寸和材料参数均与理论计算所采用的相同. 仿真中利用一个立方体质量块 (其质量与理论设置的质量相同) 和一个圆柱体软材料来替代“弹簧-质量” (软件无法直接仿真“弹簧-质量”系统), 调节“立方体质量块-圆柱体软材料”的固有频率为 300 Hz, 限制立方体质量块侧面沿 x, y 方向的自由度以更贴合理论计算考虑的情况, 基体加筋板的边界条件设置为 Floquet 周期性连接条件, 波矢取值范围设定在图4所示的不可约布里渊区边界上.

从图6(a)中 COMSOL 仿真计算得到的三维局域共振型加筋板的色散关系曲线可以发现, 基体加筋板中存在不同类型的弹性波传播, 为辨别色散曲线对应的弹性波模式, 取图6(a)中 ΓX 方向上的 A, B, C 三点, 分别得到其振动模式如图7所示. 从图7中可以发现, 点A处的振动模式为横向 (沿 z 方向) 弯曲振动, 点B处的振动模式为沿 y 方向的面内剪切振动, 点C处的振动模式为沿 x 方向的面内纵向振动. 因此可以判断 COMSOL 仿真计算得到的点B和C所在的曲线及其在 ΓM 方向上对应

的色散关系曲线表示加筋板面内剪切波及纵波的能带结构, 其余色散曲线均为加筋板的弯曲波能带

结构, 恰恰与本文理论方法计算得到的弯曲波色散曲线符合, 说明本文的理论方法是准确有效的.

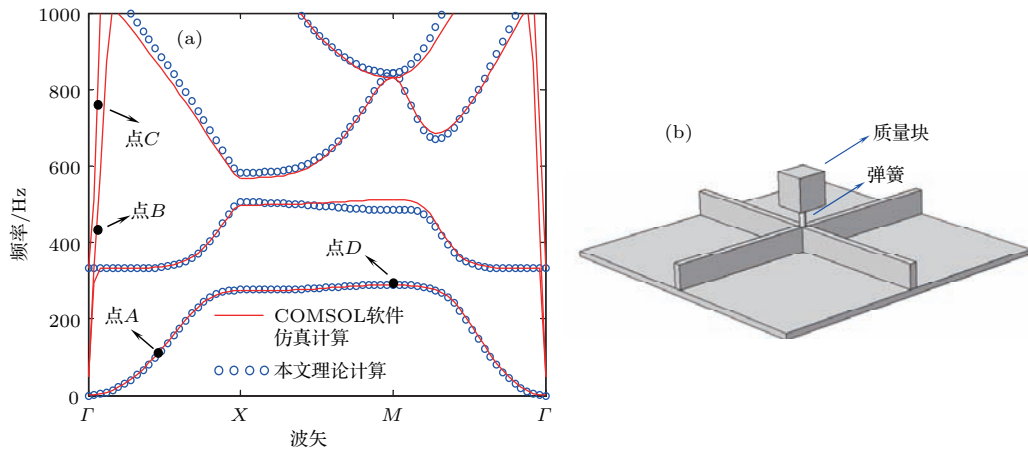


图6 (网刊彩色) (a) 采用 COMSOL 软件仿真计算与采用本文理论方法计算得到的局域共振型加筋板的色散曲线图(能带结构)比较; (b) 三维局域共振型加筋板 COMSOL 仿真模型(单个周期原胞)

Fig. 6. (color online) (a) Comparison of the band structures of a locally resonant stiffened plate calculated by the present theoretical method and by the COMSOL; (b) the COMSOL model of a locally resonant stiffened plate.

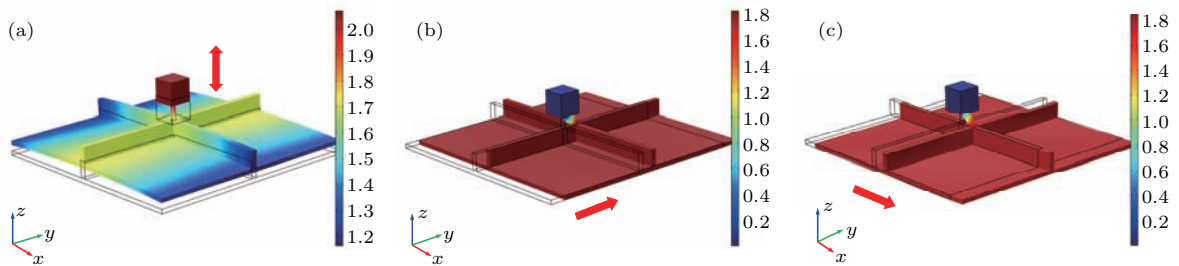


图7 (网刊彩色) (a) 点A处的振动模式; (b) 点B处的振动模式; (c) 点C处的振动模式

Fig. 7. (color online) (a) Vibration mode of point A; (b) vibration mode of point B; (c) vibration mode of point C.

接下来, 进一步考察有限大四边简支局域共振型加筋板结构振动特性, 并将其与无限大结构的带隙特性做比较. 图8(a)所示为采用本文理论方法计算得到的局域共振型加筋板和普通加筋板(未附加“弹簧-质量”共振子)的色散关系曲线. 图8(b)是有限大四边简支局域共振型加筋板的振动位移响应曲线, 实线和虚线分别表示本文理论计算和有限元软件COMSOL仿真得到的局域共振型加筋板的振动响应曲线, 点线表示本文理论计算得到的普通加筋板的振动响应曲线.

从图8(a)中可以看出, 局域共振型加筋板和普通加筋板相比, 其色散关系曲线(能带结构)在某些范围内存在显著不同, 说明加筋板上附加的“弹簧-质量”共振子对加筋板的波传播特性产生了显著影响. 具体而言, 图8(a)中局域共振型加筋板和普通加筋板的色散曲线存在两处显著不同: 其一,

普通加筋板(虚线)只存在一个较窄的完全带隙, 其频率范围为495.8—522.7 Hz, 而局域共振型加筋板(实线)在相同频率位置产生了一个更宽频的完全带隙, 其频率范围为495.8—568 Hz, 如图8(a)中高频段的阴影区所示; 其二, 局域共振型加筋板在低频段产生了一个新的弯曲带隙, 其频率范围为288.8—331.4 Hz, 如图8(a)中低频段的阴影区所示.

进一步探究可发现, 图8(a)中局域共振型加筋板的低频段带隙(288.8—331.4 Hz)出现的频率位置与共振子的固有频率(300 Hz)相对应, 而且下文还将证实该带隙的频率位置会随共振子的固有频率调谐而发生改变, 因此可将这一带隙视为一个局域共振带隙, 其产生是由共振子的局域共振效应引起的. 另外, 通过分析这个低频带隙带边的振动模式也可验证共振子对其带隙产生起着决定性

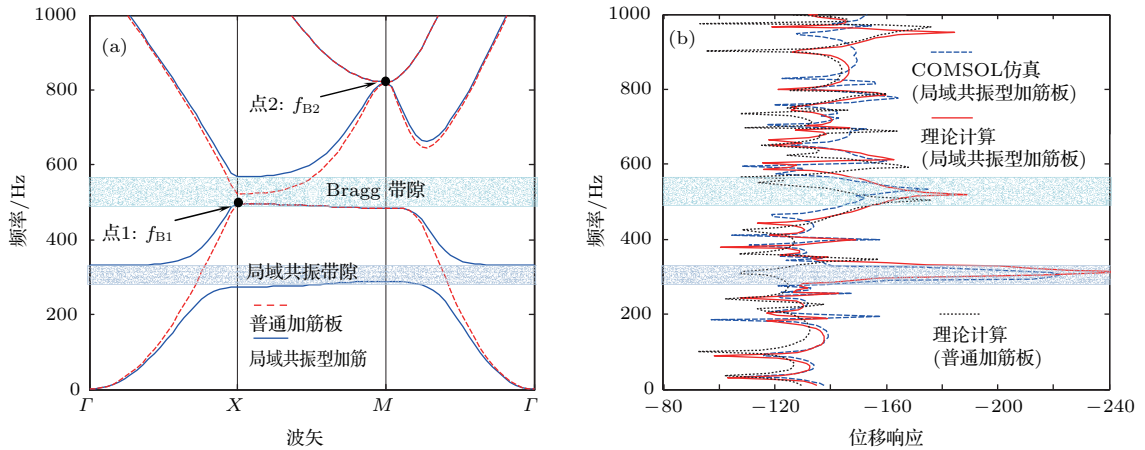


图8 (网刊彩色) (a) 普通加筋板和局域共振型加筋板色散曲线图(能带结构图); (b) 普通加筋板和局域共振型加筋板位移响应

Fig. 8. (color online) (a) Band structures of a traditional stiffened plate and a locally resonant stiffened plate; (b) displacement response of the traditional stiffened plate and the locally resonant stiffened plate.

作用. 例如, 选取该低频带隙的起始频率点 D (如图6(a)中所示) 进行考察, 得到该点对应的原胞振动模态如图9所示. 从图9中可以看出, 在该低频带隙的起始频率处(点 D 处), 结构振动能量主要被局域在振子中, 而基体加筋板则基本保持不动, 由此可说明该带隙的形成是由共振子的局域共振效应所致.

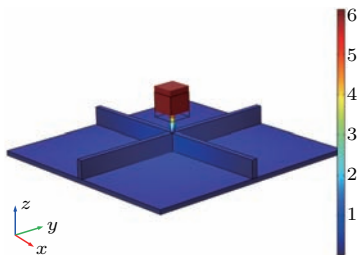


图9 (网刊彩色) 点 D 处局域共振型加筋板的振动模态

Fig. 9. (color online) Vibration mode of the locally resonant stiffened plate corresponding to the point D of Fig. 6(a).

此外, 图8(a)中局域共振型加筋板的高频段带隙(495.8—568 Hz)的起始频率和普通加筋板的带隙(495.8—522.7 Hz)起始频率完全一样, 说明该带隙产生的频率位置与共振子没有关系, 或换言之, 只与加筋板结构自身相关. 事实上, 这一带隙的形成是由于加筋板自身的周期性结构对弹性波的多重散射(Bragg 散射)所致, 因此可将其视为一个 Bragg 带隙. 值得说明的是, 虽然加筋板中 Bragg 带隙的起始频率位置不会受附加共振子的影响, 但是其带隙宽度(或简称带宽)却会受影响, 正如图8(a)所示, 局域共振型加筋板的 Bragg 带隙明显

宽于普通加筋板中 Bragg 带隙. 这是因为, 附加共振子相当于在原有加筋板结构上增加了一组周期性排列的弹性波散射源, 从而增强了周期性结构对弹性波的多重散射能力, 于是局域共振型加筋板中实现了更宽的 Bragg 带隙.

为了更加准确地评价附加“弹簧-质量”共振子对加筋板中 Bragg 带隙宽度产生的影响, 现引入归一化的带隙宽度(归一化带宽)概念^[4], 其定义如下:

$$\Delta f = \frac{f_2 - f_1}{(f_2 + f_1)/2} = \frac{2(f_2 - f_1)}{f_2 + f_1}, \quad (17)$$

式中 f_1 是带隙的起始频率, f_2 是带隙的截止频率.

表2 局域共振型加筋板和普通加筋板中 Bragg 完全带隙对比

Table 2. Comparison of the complete Bragg band gaps in a traditional stiffened plate and a locally resonant stiffened plate.

	带隙起始 频率/Hz	带隙截止 频率/Hz	归一化带宽
普通加筋板	495.8	522.7	0.0528
局域共振型加筋板	495.8	568.0	0.1357

表2对比了局域共振型加筋板和普通加筋板中 Bragg 完全带隙的起始频率、截止频率和归一化带宽. 可以发现, 附加“弹簧-质量”共振子使加筋板中 Bragg 带隙的带宽得到了极大拓展, 附加后的归一化带宽是无附加情况下的 2.57 倍.

图8(a)中局域共振型加筋板和普通加筋板的 Bragg 带隙的起始频率均产生于 ΓX 方向的色散曲

线折叠处,且位于同一频率点(点1处,495.8 Hz),这一频率代表 ΓX 方向的 Bragg 频率^[14],其物理意义是:在该频率处,周期结构沿 ΓX 方向的晶格常数正好等于结构中沿 ΓX 方向传播的弹性波波长的1/2,从而可以产生 Bragg 散射效应.类似地,在高频段,局域共振型加筋板和普通加筋板的色散曲线也在同一频率点(点2处,823.4 Hz)发生折叠,这一频率代表 ΓM 方向的 Bragg 频率.为方便阐述,本文将点1和点2处的 Bragg 频率分别用 f_{B1} (495.8 Hz) 和 f_{B2} (823.4 Hz) 表示.

另一方面,通过图8(b)中给出的有限结构振动位移响应曲线可以进一步考察不同结构的减振效果.从图8(b)中可以看出,理论计算和 COM-SOL 仿真得到的局域共振型加筋板的振动响应曲线基本符合,而且均反映出在两个带隙频率范围内,结构振动都被显著衰减,再次说明本文建立的理论计算方法是有效的.同时还可以发现,相比普通加筋板,局域共振型加筋板的减振效果具有两方面的优势,一方面其在低频段(对应于局域共振带隙范围)多出了一个高效减振频带;另一方面,其中高频带(对应于 Bragg 带隙范围)实现了更宽频的减振频带.这说明,利用局域共振型加筋板的带隙特性实现对加筋板结构的振动控制是有益的.

3.2 共振子弹簧刚度对带隙特性的影响

局域共振型加筋板中“弹簧-质量”共振子的弹簧刚度和振子质量是共振子设计时两个最重要的参数,本小节旨在分析弹簧刚度对带隙特性的影响.在保持振子质量不变的情况下,共振子的固有频率和弹簧刚度呈正相关的变化关系,因而调节弹簧刚度就相当于调节振子的固有频率.另外,由前文分析易知,局域共振带隙产生的频率位置与共振子的固有频率有直接的对应关系.因此,为了更直观地探讨带隙特性调控规律,本小节分析弹簧刚度对带隙特性的影响,统一将其转化为(共振子质量不变的情况下)共振子固有频率对带隙特性的影响.

首先,对比了3组简单算例,3组算例中共振子的固有频率分别为:200,300和400 Hz,其中固有频率为300 Hz的算例参数与上一小节考虑的算例参数完全一样(参见图5和表1),而另两个算例的参数除固有频率外其他参数也一样.图10所示为3组算例的色散曲线,表3和表4分别给出了3组算

例中局域共振带隙和 Bragg 带隙的起始频率、截止频率和归一化的带宽.

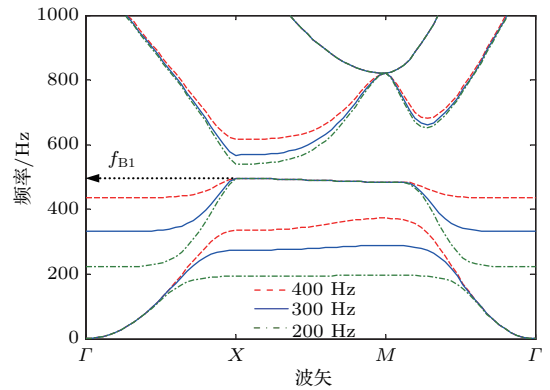


图10 (网刊彩色) 共振子固有频率对带隙特性的影响
Fig. 10. (color online) Effects of the natural frequency of local resonators on the band gaps.

表3 共振子固有频率对局域共振带隙特性的影响
Table 3. Effects of the natural frequency of resonators on the local resonance band gap.

共振子固有频率/Hz	带隙起始频率/Hz	带隙截止频率/Hz	归一化带宽
200	196.7	222.5	0.1231
300	288.8	331.4	0.1377
400	373.1	436.3	0.1562

表4 共振子固有频率对 Bragg 带隙特性的影响
Table 4. Effects of the natural frequency of resonators on the Bragg band gap.

共振子固有频率/Hz	带隙起始频率/Hz	带隙截止频率/Hz	归一化带宽
200	495.8	540.1	0.0855
300	495.8	568.0	0.1357
400	495.8	616.6	0.2172

从图10和表3、表4中容易发现,随着共振子固有频率的提高,局域共振带隙的起始频率和截止频率也随之提高,归一化带宽也随着共振子固有频率的提高而拓宽. Bragg 带隙的截止频率随着共振子固有频率的提高而提高,归一化带宽也随之拓宽,这一规律和局域共振带隙变化规律是一致的.但是,不同的是, Bragg 带隙的起始频率始终保持不变,即等于 ΓX 方向 Bragg 频率 f_{B1} .

进一步,为更加全面地分析共振子固有频率对带隙特性的影响,通过逐步调节共振子固有频率,计算了相应的带隙起始频率、截止频率和归一化带

宽变化曲线,如图 11 所示. 图 11 (a)和图 11 (b) 分别表示带隙频率范围和归一化带宽随共振子固有频率调节的变化曲线.

从图 11 中可以看出,共振子固有频率低于 456 Hz 时,局域共振型加筋板有两个带隙(完全带隙),第一个带隙是局域共振带隙(图中由“RG”标出),第二个带隙是 Bragg 带隙(图中由“BG”标出).随着共振子固有频率的提高,局域共振带隙的起始频率、截止频率均向高频移动,归一化带宽也随之拓宽;Bragg 带隙的起始频率保持不变(Bragg 频率 f_{B1}),截止频率向高频移动,归一化带宽逐渐变宽.值得注意的是,在共振子固有频率为 456 Hz 时,第一带隙的截止频率和第二带隙的起始频率非

常的接近,这时候达到了两种带隙之间的近似耦合条件^[1,7],两个带隙中间的通带变得最窄,两个带隙看上去几乎合二为一,此时第一带隙和第二带隙的归一化带宽同时达到最大值,两者形成一个超宽的“伪”完全带隙.图 12 所示为这一情形下的色散曲线图,其中图 12 (a)表示共振子固有频率为 456 Hz 时局域共振型加筋板的色散曲线;图 12 (b)是相同条件下有限大四边简支局域共振型加筋板三个不同位置的位移响应曲线,其结构尺寸、激励点同图 5 和表 1,位移拾取位置在图中标出.从图 12 (b)可以看出,由于两个带隙非常接近,振动在很宽的频率范围内得到有效衰减.这说明利用两种带隙的近似耦合效应,可以实现结构的宽带减振.

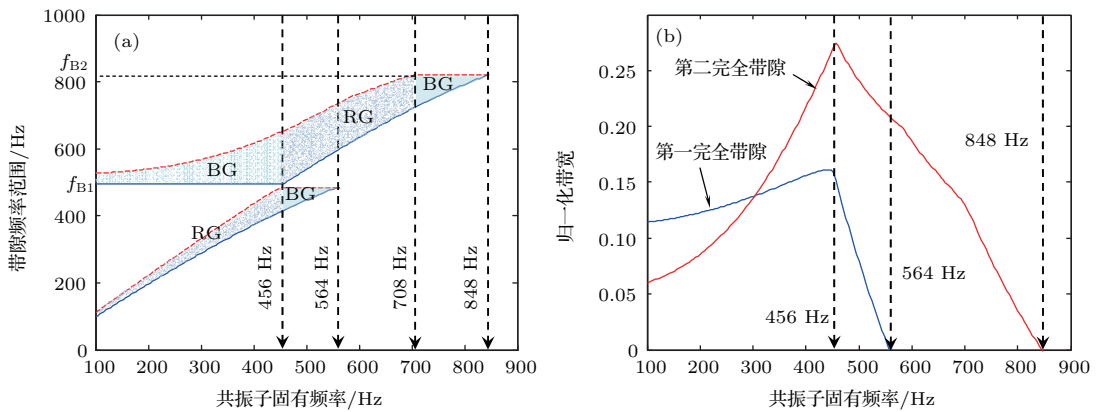


图 11 (网刊彩色) (a) 带隙的起始频率与截止频率随共振子固有频率调节的变化曲线; (b) 带隙的归一化带宽随共振子固有频率变化曲线

Fig. 11. (color online) (a) Variation of the lower and upper edge frequency of the local resonance band gap and Bragg band gap with tuning natural frequency of resonator; (b) variation of normalized gap width of the first and second complete band gap with tuning natural frequency of resonator.

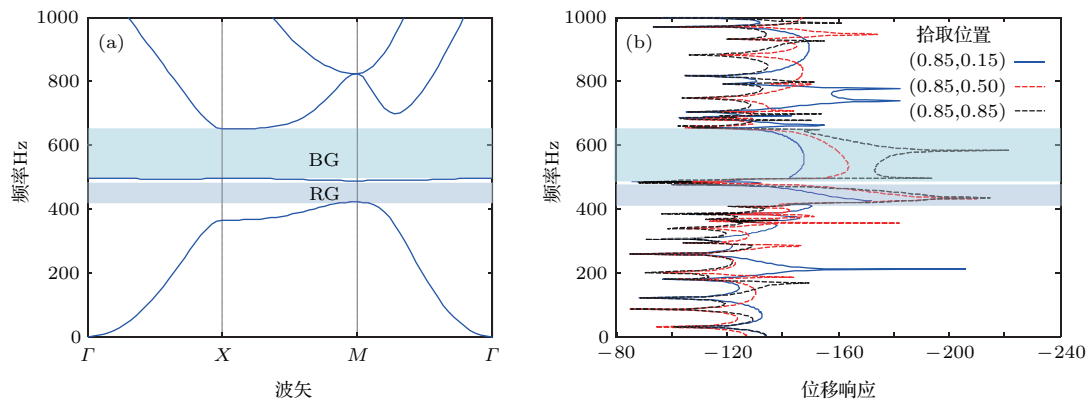


图 12 (网刊彩色) (a) 共振子固有频率 456 Hz 时局域共振型加筋板的色散曲线; (b) 共振子固有频率为 456 Hz 时有限大四边简支局域共振型加筋板位移响应曲线

Fig. 12. (color online) (a) Band structures of the locally resonant stiffened plate with the natural frequency of resonator tuned to 456 Hz; (b) displacement response of the finite locally resonant stiffened plate with the natural frequency of resonators tuned to 456 Hz.

从图 11 (a) 中还可以看出, 当共振子的固有频率被调谐至跨过 456 Hz 时, 发生了两种带隙之间的相互转换现象, 即第一个带隙由局域共振带隙转换为 Bragg 带隙, 其截止频率保持为 Bragg 频率 f_{B1} 不变, 但是起始频率逐渐移向高频; 而第二个带隙则由 Bragg 带隙转换为局域共振带隙, 其带隙的起始、截止频率同时都随共振子固有频率提高而提高. 图 11 (b) 还表明, 当共振子的固有频率由 456 Hz 逐渐调谐至 564 Hz 时, 两个带隙的归一化带宽均快速地变窄, 其中第一带隙变窄的速度更快, 当共振子固有频率被调至 564 Hz 时, 第一带隙归一化带宽变为 0.

由图 11 (a) 还可以发现, 当共振子的固有频率由 564 Hz 逐渐增加到 708 Hz 时, 第一带隙“消失”, 只剩下第二带隙, 且这个带隙仍然是局域共振带隙, 其起始、截止频率均随着共振子固有频率的提高而提高. 而当共振子的固有频率被调谐至跨过 708 Hz 时, 局域共振型带隙再次转换成 Bragg 带隙, 带隙的截止频率保持为 Bragg 频率 f_{B2} 不变, 而带隙的起始频率随共振子固有频率的提高而提高. 当共振子的固有频率大于 848 Hz (略大于 Bragg 频率 f_{B2}) 时, 第二带隙的归一化带宽变为 0, 即结构中不再存在完全带隙.

3.3 共振子质量对带隙特性的影响

本小节进一步分析共振子的附加质量对带隙特性的影响 (保持共振子固有频率及结构其他参数不变). 根据上一节的研究发现, 共振子固有频率不同时会出现带隙转换、带隙耦合等现象, 因此分以

下三种情况研究附加质量比变化对带隙特性的影响: 1) 共振子固有频率小于近似耦合频率 (取共振子固有频率 300 Hz); 2) 共振子固有频率为近似耦合频率 (取 456 Hz); 3) 共振子固有频率大于近似耦合频率 (取 700 Hz). 三种情况下分别得到两种带隙的频率范围及归一化带宽随共振子附加质量比变化曲线, 如图 13, 图 14 和图 16 所示.

图 13 表示共振子固有频率为 300 Hz 时两种带隙频率范围和归一化带宽随共振子附加质量比变化曲线. 从图中可以发现, 随着共振子附加质量比的逐渐增大, 局域共振带隙的起始频率向低频移动, 截止频率向高频移动, 归一化带宽逐渐增大; 而 Bragg 带隙的起始频率始终保持为 Bragg 频率 f_{B1} 不变, 截止频率向高频移动, 归一化带宽也逐渐拓宽. 从图 13 (b) 中还可以看出, 局域共振带隙的归一化带宽随共振子质量比的增大而拓宽的速度要更快. 此外, 当共振子附加质量比小于 23.4% 时, Bragg 带隙的带宽大于局域共振带隙的带宽; 而当质量比大于 23.4% 时, Bragg 带隙的带宽小于局域共振带隙的带宽.

当共振子的固有频率为 456 Hz 时, 其带隙随共振子附加质量比变化规律如图 14 所示. 从图中可以看出, 当共振子附加质量比小于 25% 时, 第一个带隙为局域共振带隙, 随着附加质量比的增大, 起始频率向低频移动, 截止频率向高频移动, 归一化带宽逐渐拓宽; 第二个完全带隙为 Bragg 带隙, 其起始频率为 Bragg 频率 f_{B1} 不变, 截止频率向高频移动, 归一化带宽得到拓宽.

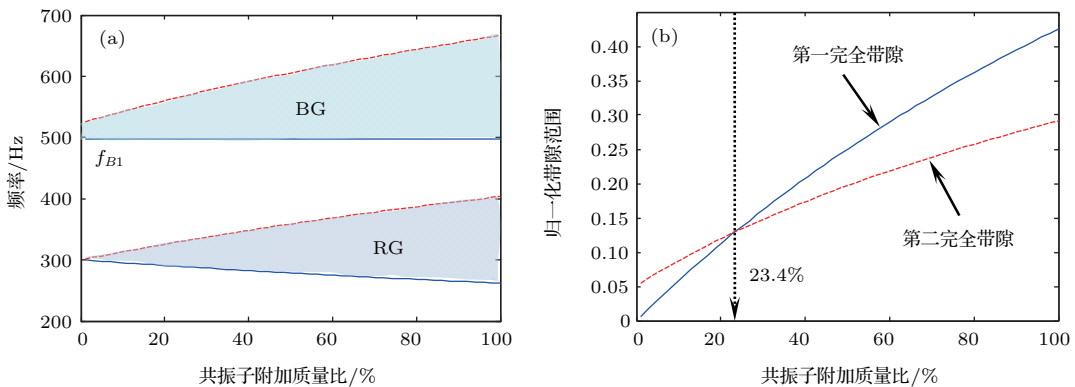


图 13 (网刊彩色) (a) 带隙的起始频率与截止频率随共振子附加质量比的变化曲线; (b) 带隙的归一化带宽随附加共振子质量比变化曲线 (共振子固有频率为 300 Hz)

Fig. 13. (color online) (a) Variation of the lower and upper edge frequency of the local resonance band gap and Bragg band gap with changing mass ratio of resonators; (b) variation of the normalized gap width of the band gaps with changing mass ratio of resonators (the natural frequency of resonator is 300 Hz).

图 14 表明, 当共振子附加质量比为 25% 时, 两个带隙发生了近似耦合, 形成一个很宽的“伪”带隙. 继续调谐质量比跨过 25% 时, 达到了带隙转换条件, 第一完全带隙转换为 Bragg 带隙, 第二完全带隙转换为局域共振带隙. 这种情况下, Bragg 带隙的截止频率为 Bragg 频率 f_{B1} 不变, 起始频率随

着质量比的增大向低频移动, 归一化带宽也随之拓宽, 并呈现出单调拓宽的趋势. 局域共振带隙的起始频率和截止频率都随着附加质量比的增大向高频移动, 归一化带宽得到拓宽, 但是当质量比大于 68.3% 时, 其归一化带宽随着质量比的增大反而逐渐变窄.

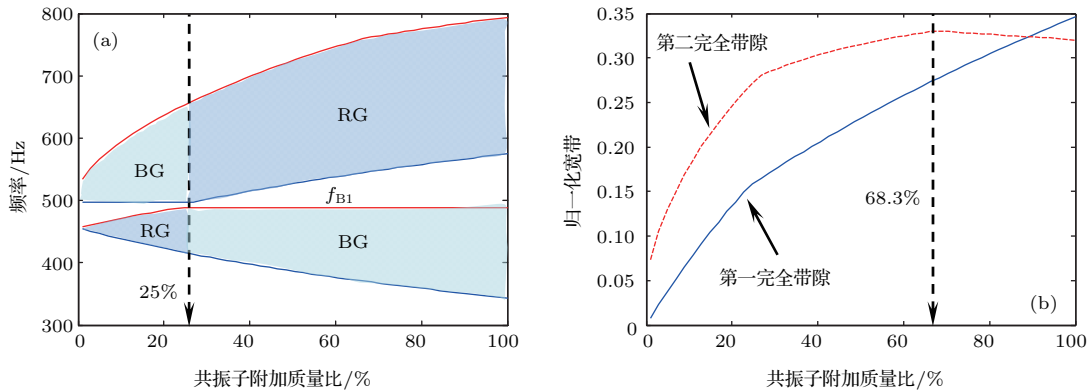


图 14 (网刊彩色) (a) 带隙的起始频率与截止频率随共振子附加质量比的变化曲线; (b) 带隙的归一化带宽随附加共振子质量比变化曲线 (共振子固有频率为 456 Hz)

Fig. 14. (color online) (a) Variation of the lower and upper edge frequency of the local resonance band gap and Bragg band gap with changing mass ratio of resonators; (b) variation of the normalized gap width of the band gaps with changing mass ratio of resonators (the natural frequency of resonator is 456 Hz).

为验证上述结果的正确性, 取共振子附加质量比为 40% 和 100% 时作为两个简单的算例, 分别计算有限大局域共振型加筋板在这两种附加质量比下不同位置的位移响应 (如图 15 所示), 其结构尺寸、激励点同图 5 和表 1, 位移拾取位置已标出.

从图 15 中可以发现, 当共振子附加质量比为 40% 和 100% 时, 有限结构的振动位移响应曲线

均存在两个显著的衰减频率范围, 而且这些衰减频率范围与图 14 中计算所得带隙频率范围 (已在图 15 中用阴影标示) 完全一致. 值得特别指出的是, 两种附加质量比情况下, 有限结构的第一个振动衰减频带的截止频率基本一致, 均对应于第一个完全带隙的截止频率 f_{B1} (Bragg 频率), 这进一步验证了图 14 中带隙特性计算结果的准确性.

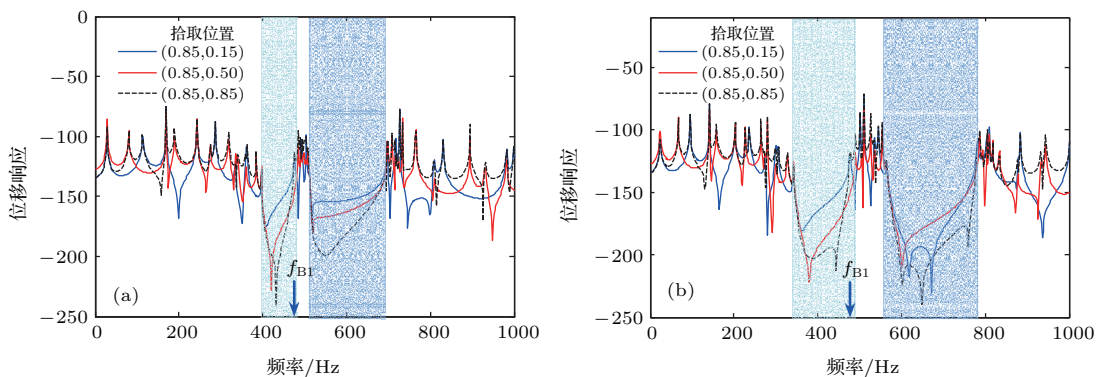


图 15 (网刊彩色) (a) 共振子附加质量比为 40% 时局域共振型加筋板的位移响应; (b) 共振子附加质量比为 100% 时局域共振型加筋板的位移响应 (共振子固有频率为 456 Hz)

Fig. 15. (color online) (a) Displacement response of the finite locally resonant stiffened plate with the mass ratio tuned to 40%; (b) displacement response of the finite locally resonant stiffened plate with the mass ratio tuned to 100% (the natural frequency of resonator is 456 Hz).

当共振子固有频率为 700 Hz 时, 带隙特性随共振子附加质量比的变化规律如图 16 所示. 可以发现, 当共振子的附加质量比从 0 变化到 5% 时, 第一完全带隙为 Bragg 带隙 (起始频率为 Bragg 频率 f_{B1}), 且迅速地变窄直至消失; 而在质量比 5%—56.4% 的范围内, Bragg 频率 f_{B1} 附近均不存在完全带隙; 而当质量比大于 56.4% 时, Bragg 频率 f_{B1} 附近重新出现完全带隙, 其截止频率保持为 f_{B1} , 并且随着质量比的增大, 带隙起始频率向低

频移动, 归一化带宽迅速地拓宽. 对于第二完全带隙, 在质量比小于 28.7% 时, 其为局域共振带隙, 带隙的起始频率和截止频率随着质量比的增大同时向高频移动, 归一化带宽随之拓宽; 当质量比达到 28.7% 时, 其归一化带宽达到最大值, 同时还达到了带隙转换条件, 由局域共振带隙转换为 Bragg 带隙; 当质量比大于 28.7% 时, 带隙的截止频率保持为 f_{B2} 不变, 带隙的起始频率向高频移动, 归一化带宽随着质量比的增加而变窄.

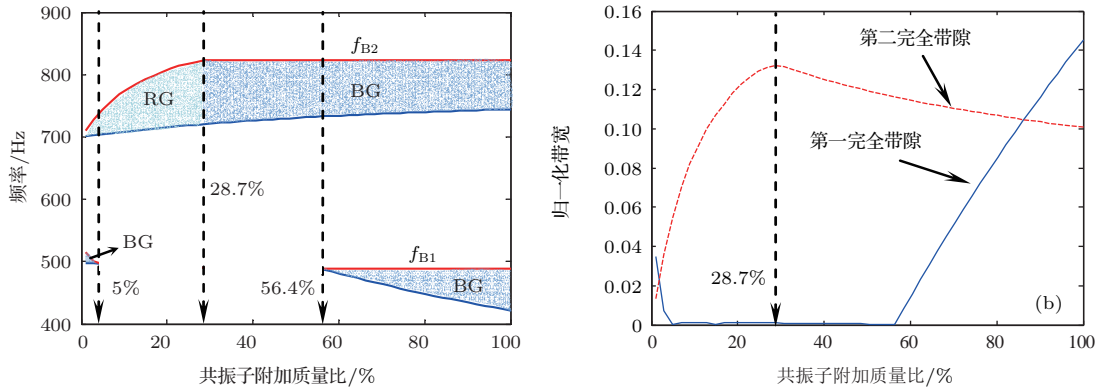


图 16 (网刊彩色) (a) 带隙的起始频率与截止频率随共振子附加质量比的变化曲线; (b) 带隙的归一化带宽随附加共振子质量比变化曲线 (共振子固有频率为 700 Hz)

Fig. 16. (color online) (a) Variation of the lower and upper edge frequency of the local resonance band gap and Bragg band gap with changing mass ratio of resonators; (b) variation of the normalized gap width of the band gaps with changing mass ratio of resonators (the natural frequency of resonator is 700 Hz).

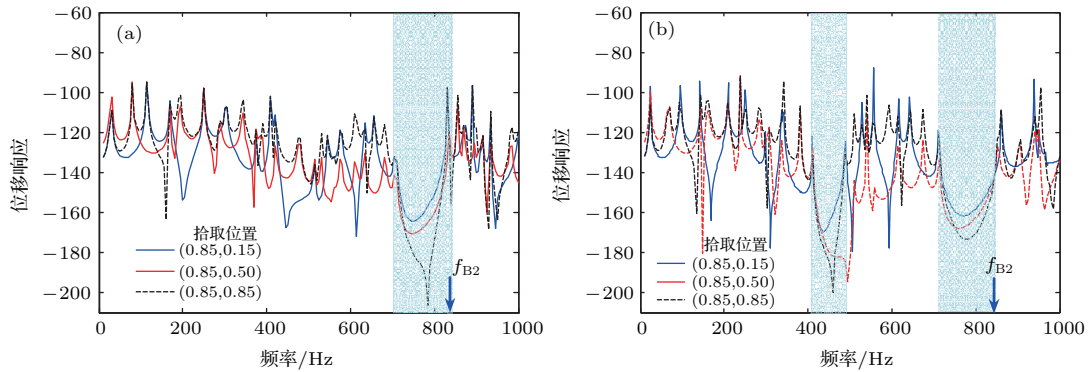


图 17 (网刊彩色) (a) 共振子附加质量比为 40% 时局域共振型加筋板的位移响应; (b) 共振子附加质量比为 100% 时局域共振型加筋板的位移响应 (共振子固有频率为 700 Hz)

Fig. 17. (color online) (a) Displacement response of the finite locally resonant stiffened plate with the mass ratio tuned to 40%; (b) displacement response of the finite locally resonant stiffened plate with the mass ratio tuned to 100% (the natural frequency of resonator is 700 Hz).

为进一步验证图 16 中结果, 取附加质量比为 40% 和 100% 两种情况, 计算有限大局域共振型加筋板结构的振动位移响应 (结果如图 17 所示), 其结构尺寸、激励点同图 5 和表 1, 位移拾取位置已标出. 从图中可以发现, 当质量比为 40% 时, 有限大结构的振动位移响应曲线仅存在一个显著的衰

减频率范围, 而当质量比为 100% 时, 有限大结构的振动位移响应曲线在低频段、高频段均存在一个显著的衰减频段. 比较发现, 在质量比为 40% 和 100% 这两种情况下, 振动位移响应曲线的衰减频率范围刚好与图 16 中计算得到的带隙频率范围完全符合; 进一步比较还可以发现, 有限大结构的振

动位移响应在高频段的衰减频率上限基本一致,恰好为图 16 中给出的 Bragg 频率 f_{B2} , 这些均验证了图 16 中的带隙特性计算结果的准确性.

4 结 论

本文将“局域共振型声子晶体”思想引入到加筋板结构设计,通过在加筋板上周期性地附加“弹簧-质量”共振子,构造了一种局域共振型加筋板结构;基于有限元法和 Bloch 定理建立了这种结构的弯曲波传播特性和振动特性理论计算方法,并通过与有限元软件 COMSOL 仿真对比,验证了理论方法的有效性;进一步研究了局域共振型加筋板结构的弯曲波带隙特性和减振特性,着重分析了共振单元的弹簧刚度和共振子质量对带隙特性和减振特性的影响,得到以下主要结论.

1) 经合理设计,附加“弹簧-质量”共振子的局域共振型加筋板可以产生比普通加筋板(未附加共振子)更加低频的局域共振带隙,同时还能有效拓宽高频段的 Bragg 带隙.

2) 局域共振型加筋板中共振子弹簧刚度的变化对带隙特性有着显著的影响.随着弹簧刚度逐渐调节变大,共振子固有频率由低频向高频调节,结构中会产生两种带隙的相互转换、近似耦合等现象,且在近似耦合条件下,两种带隙之间的通带变得非常窄,两者看上去耦合成了一个很宽的“伪”带隙,这对实现结构的宽带减振具有重要的意义;然而,当共振子的固有频率被调至足够高频时,结构中不存在完全带隙,即局域共振带隙只能在一定的低频范围内出现,这个频率范围与结构本身的几何结构和材料参数有关.

3) 当共振子固有频率处于不同的频率段时,其附加质量比的变化对带隙特性产生不同的影响.在低于带隙近似耦合频率的低频段,增加附加质量比可以使两种带隙均得到拓宽;在带隙近似耦合频率附近的中频段时,改变质量比可以实现两种带隙的相互转换和近似耦合(或解耦),而且随着附加质量比由零逐渐增大,两种带隙的归一化带宽会逐渐拓展,但是当质量比大到一定程度时,其中高频段的带隙的归一化带宽又会随质量比的增加反而逐渐变窄.在高于带隙近似耦合频率的高频段时,随着附加质量比的增加,低频段的带隙(Bragg 带隙)会迅速变窄直至消失,而当质量比增至一定程度时,

该带隙又会再次出现,且归一化带宽逐渐拓展;同时,随着附加质量比的增加,高频段的带隙(局域共振带隙)会逐渐变宽,不过当质量比增至一定程度时,该带隙会转换为 Bragg 带隙,此后随着质量比的增大,该带隙的归一化带宽逐渐变窄.

参考文献

- [1] Xiao Y 2012 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [肖勇 2012 博士学位论文(长沙:国防科技大学)]
- [2] Liu Z, Zhang X, Mao Y, Zhu Y Y, Yang Z, Chan C T, Sheng P 2000 *Science* **289** 1734
- [3] Wen J H, Yu D L, Zhao H G, Cai L, Xiao Y, Wang G, Yin J F 2015 *Propagation of Elastic Waves in Artificial Periodic Structures: Vibrational and Acoustical Properties* (Beijing: Science Press) pp5–200 (in Chinese) [温激鸿, 郁殿龙, 赵宏刚, 蔡力, 肖勇, 王刚, 尹剑飞 2015 人工周期结构中弹性波的传播——振动与声学特性(北京:科学出版社)第5—200页]
- [4] Wen X S, Wen J H, Yu D L, Wang G, Liu Y Z, Han X Y 2009 *Phononic Crystals* (Beijing: National Defense Industry Press) pp53–195 (in Chinese) [温熙森, 温激鸿, 郁殿龙, 王刚, 刘耀宗, 韩小云 2009 声子晶体(北京:国防工业出版社)第53—195页]
- [5] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2022
- [6] Brillouin L 1946 *Wave Propagation in Periodic Structures* (New York: Dover) pp115–117
- [7] Xiao Y, Wen J H, Yu D L, Wen X S 2013 *J. Sound Vib.* **332** 867
- [8] Xiao Y, Wen J H, Huang L 2014 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **47** 045307
- [9] Wang G 2005 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [王刚 2005 博士学位论文(长沙:国防科技大学)]
- [10] Hsu J C 2011 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **44** 055401
- [11] Oudich M, Li Y, Assouar B M, Hou Z 2010 *New J. Phys.* **12** 083049
- [12] Pennec Y, Djafari-Rouhani B, Larabi H, Vasseur J O, Hladky-Hennion A C 2008 *Phys. Rev. B* **78** 104105
- [13] Zhang S, Wu J, Hu Z 2013 *J. Appl. Phys.* **113** 163511
- [14] Xiao Y, Wen J, Wen X 2012 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **19** 195401
- [15] Xiao Y, Wen J, Wen X 2012 *J. Sound Vib.* **331** 5408
- [16] Assouar B M, Sun J, Lin F, Hsu J 2014 *Ultrasonics* **54** 2159
- [17] Wu J, Bai X C, Xiao Y, Geng M X, Yu D L, Wen J H 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 064602 (in Chinese) [吴健, 白晓春, 肖勇, 耿明昕, 郁殿龙, 温激鸿 2016 物理学报 **65** 064602]
- [18] Liu J, Hou Z L, Fu X J 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 154302 (in Chinese) [刘娇, 侯志林, 傅秀军 2015 物理学报 **64** 154302]

- [19] Wang X Z, Pang F Z, Yao X L, Su N 2012 *Acta Mech. Solida Sin.* **33** 583 (in Chinese) [王献忠, 庞福振, 姚熊亮, 苏楠 2012 固体力学学报 **33** 583]
- [20] Jin Y Q, Pang F Z, Yao X L, Wang X Z 2012 *J. Vib. Eng.* **25** 579 (in Chinese) [金叶青, 庞福振, 姚熊亮, 王献忠 2012 振动工程学报 **25** 579]
- [21] Yao X L, Wang X Z, Pang F Z, Kang P H 2012 *J. Huazhong Univ. of Sci. & Tech. (Natural Science Edition)* **40** 119 (in Chinese) [姚熊亮, 王献忠, 庞福振, 康蓬辉 2012 华中科技大学学报 **40** 119]
- [22] Li S, Zhao D Y 2001 *Acta Acustica* **26** 174 (in Chinese) [黎胜, 赵德有 2001 声学学报 **26** 174]
- [23] Li S, Zhao D Y 2004 *Acta Acustica* **29** 200 (in Chinese) [黎胜, 赵德有 2004 声学学报 **29** 200]
- [24] Lu T J, Xin F X 2012 *Vibroacoustics of Lightweight Sandwich Structures* (Beijing: Science Press) pp80–157 (in Chinese) [卢天健, 辛锋先 2012 轻质板壳结构设计的振动和声学基础 (北京: 科学出版社) 第80—157页]
- [25] Xin F X, Lu T J, Chen C Q 2010 *J. Vib. Acoust.* **132** 011008
- [26] Maurice P 1990 *Introduction to Finite Element Vibration Analysis* (New York: Cambridge University Press) pp229–313
- [27] Xu S Y, Huang X C, Hua H X 2013 *J. ShangHai Jiao-Tong Univ.* **47** 167 (in Chinese) [徐时吟, 黄修长, 华宏星 2013 上海交通大学学报 **47** 167]
- [28] Song Y, Feng L, Wen J, Yu D, Wen X 2015 *Compos. Struct.* **128** 428
- [29] Langley R S 1993 *J. Sound Vib.* **169** 377
- [30] Farzbod F, Leamy M J 2009 *J. Sound Vib.* **325** 545

Flexural wave band gaps and vibration reduction properties of a locally resonant stiffened plate*

Zhu Xi-Xi Xiao Yong[†] Wen Ji-Hong Yu Dian-Long

(Laboratory of Science and Technology on Integrated Logistics Support, College of Mechatronic Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 17 May 2016; revised manuscript received 2 June 2016)

Abstract

A locally resonant stiffened plate is constructed by attaching a two-dimensional periodic array of spring-mass resonators to a traditional periodic stiffened plate. A method based on the finite element method and Bloch theorem is presented for calculating the flexural wave dispersion relation and forced vibration response of the proposed locally resonant stiffened plate. The method is validated by comparing the predictions with simulations by FEM software COMSOL. The effects of the spring-stiffness and mass ratio of local resonators on the flexural wave band gap and vibration reduction performance are analysed, which can facilitate the design of the locally resonant stiffened plate for vibration-reduction applications in engineering. The main findings of this work are as follows.

1) The local resonator can have a significant effect on the propagation of flexural wave in stiffened plate. On the one hand, the local resonator is able to create a low-frequency local resonance band gap; on the other hand, it can enhance the high-frequency Bragg band gap. Within the band gap frequency range, the vibration of the locally resonant stiffened plate can be reduced remarkably.

2) The spring-stiffness of local resonators shows a notable influence on the band gap and vibration reduction performance of the locally resonant stiffened plate. As the spring-stiffness gradually increases, the nature frequency of local resonator is gradually tuned to higher frequency, and the phenomenon of band-gap transition and band-gap near-coupling may arise. Under the near-coupling condition, the pass band between two band gaps turns narrow, and

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51305448), and the Aeronautical Science Fund, China (Grant No. 2015ZA88003).

† Corresponding author. E-mail: xiaoy@vip.sina.com

it seems that these two band gaps form a super-wide pseudo-gap (within which only a very narrow pass band exists). This behaviour is of great interest for the broad band vibration reduction applications. Moreover, the complete band gap will disappear if the nature frequency of local resonator is tuned to a higher value than a threshold frequency, which is dependent on the geometrical and material parameters.

3) The influence of the additional mass ratio of local resonator on the band gap behavior is highly relevant to the nature frequency of local resonator. If the nature frequency of resonator is lower than the band-gap near-coupling frequency, both the local resonance band gap and Bragg band gap are broadened with increasing the additional mass ratio of resonator. When the nature frequency of resonator is close to the band-gap near-coupling frequency, the phenomenon of band-gap near coupling and band-gap transition may arise or disappear as the additional mass ratio of resonator gradually changes. When the nature frequency of resonator is higher than the band-gap near-coupling frequency, on the one hand, the lower frequency band gap will disappear rapidly with increasing the mass ratio of resonator. However, it will be present again if the mass ratio of resonator increases up to a large enough value. On the other hand, the higher frequency band gap is broadened with increasing the mass ratio, but if the mass ratio is tuned to a larger value than a specific value, this band gap will transform from local resonance band gap to Bragg band gap, and the normalized gap width of this band gap will be narrowed with increasing the mass ratio.

Keywords: local resonance, stiffened plate, flexural wave band gap, vibration reduction

PACS: 62.30.+d, 46.40.-f, 63.20.D-

DOI: [10.7498/aps.65.176202](https://doi.org/10.7498/aps.65.176202)