囚禁有限unitary费米气体的热力学性质

袁都奇

Thermodynamics of trapped finite unitary Fermi gas

Yuan Du-Qi

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 180302 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.180302
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.180302
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I18

囚禁有限unitary费米气体的热力学性质*

袁都奇†

(宝鸡文理学院物理与光电技术学院, 宝鸡 721016)

(2016 年 5 月 19 日收到; 2016 年 6 月 13 日收到修改稿)

应用分数不相容统计, 研究了三维简谐势阱中有限unitary费米气体在绝对零度和有限温度下的热力学性质, 并与势阱中满足热力学极限条件的unitary费米气体进行了比较. 结果表明: 绝对零度时有限系统的费米能、粒子平均能量随粒子数的增加而增大, 并以满足热力学极限系统的对应物理量为上限, 有限系统的费米能、粒子平均能量随势阱边界变化存在极大值. 有限温度条件下给定粒子数时, 有限系统的粒子平均能量、粒子平均熵、粒子平均热容量分别存在对应的特征温度, 当温度等于物理量对应的特征温度时, 有限系统与满足热力学极限系统的同一物理量相等, 低于 (或高于) 物理量对应的特征温度时, 有限系统的物理量将大于 (或小于) 满足热力学极限系统的同一量. 给定温度条件下, 有限系统粒子平均能量、粒子平均熵、粒子平均热容量分别存在对应的特征粒子数, 当粒子数等于物理量对应的特征粒子数时, 有限系统与满足热力学极限系统的同一物理量相等, 少于 (或多于) 物理量对应的特征粒子数时, 有限系统的物理量将小于 (或大于) 满足热力学极限系统的同一量.

关键词: 有限unitary费米气体, 简谐势阱, 粒子数效应, 边界效应

PACS: 03.75.Ss, 05.30.Fk, 05.30.Pr, 67.85.Lm **DOI:** 10.7498/aps.65.180302

1 引 言

在超冷费米气体的实验研究中, 借助Feshbach共振, 通过调节外部磁场, 可以改变粒子间的相互作用, 从而实现费米气体从Bardeen-Cooper-Schrieffer(BCS)超流的吸引作用范围到分子形式的Bose-Einstein凝聚 (BEC) 的平滑演化[1−5]. 从BCS到BEC的渡越点有一个强相互作用范围, 称为unitarity limit, 在unitarity limit范围散射长度发散 ($a \to \pm\infty$), 从热力学量中消失, 气体将出现普适的热力学行为[6], 这种气体被称为unitary费米气体.

在unitary费米气体的实验研究方面, 根据均匀气体在零温下的基态能 E_0 和理想费米能 E_{F} 的关系 $E_0 = E_{\mathrm{F}}(1+\beta)$, 强相互作用的普适参数 β 被确定[7], 对强相互作用费米气体的热容量、熵、简并的临界温度、绝热声速等重要的热力学性质也进行了测量和研究[8−11]. 在理论研究方面, 建立了unitary费米气体的密度泛函理论[12], 研究了unitarity limit范围简并量子气体的普适热力学性质[6,13], 文献[14] 研究了unitarity limit范围自旋为1/2的费米子, 在BCS-BEC渡越中归类出一种新型超流体.

近年来对unitary费米气体的研究中, 分数不相容统计[15,16]已经成为一种基本的统计理论被应用. 分数不相容统计是描述理想任意子的统计分布规律, 为何能够用于研究具有强相互作用的unitary 费米气体? 稀薄费米气体的热力学性质由两体散射长度、粒子数密度以及气体温度决定, 在unitarity limit范围, 由于散射长度发散从热力学量中消失, 其热力学性质将与动力学细节无关, 气体将表现出普适的热力学行为, 这说明粒子间具有强相互作用的unitary费米气体的热力学性质能够

* 陕西省自然科学基金 (批准号: 2012JM1006) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yuanduqi@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

与理想费米气体相联系, 例如均匀 unitary 费米气体在零温时的基态能 E_0 与理想费米能 E_F 的关系可以表示为 $E_0 = E_\mathrm{F}(1+\beta) = \xi E_\mathrm{F}$ [7]. 另外, 在 unitarity limit 范围气体的性质介于玻色气体和费米气体之间, 既有玻色气体的某些特性, 又有费米气体的某些特性, 分数不相容统计是描述理想任意子的统计分布规律, 而任意子的行为介于理想玻色子和理想费米子之间. 所以将分数不相容统计应用于 unitary 费米气体, 既是物理上的合理推理与假设, 也是一种数学上的映射. 文献 [17] 还从两个方面给出了在 unitarity limit 范围应用分数不相容统计的理论依据: 一是在相互作用中不存在长度尺度 (即在 unitarity limit 范围) 时, 同一维度情况下动能和势能密度大小观察结果相同, 且其结果服从不相容统计; 二是在 unitarity limit 范围, 气体的第二维里系数与温度无关, 而保持原子间相互作用尺度不变, 通过附加相互作用, 在不相容统计中可以得到理想费米 (玻色) 气体第二维里系数值 $+(-)2^{-5/2}$ 的改变. 此外, 文献 [17] 研究了 unitary 费米气体的化学势和粒子的平均能量, 其结果与 Monte Carlo 计算相符合, 对于简谐势阱中的气体, 其结果也与实验有较好的符合, 这说明 unitarity limit 范围的量子气体服从分数不相容统计. 文献 [18] 对 unitary 费米气体的化学势、能量密度、粒子熵、粒子有效质量等热力学性质进行了详细的比较研究. 文献 [19, 20] 利用分数不相容统计研究了不同条件下 unitary 费米气体的热力学性质. 文献 [21, 22] 用此统计理论研究了囚禁 d 维任意子的绝热压缩和绝热声速问题以及强相互作用费米气体的普适声速.

以往应用分数不相容统计理论研究 unitary 费米气体的文献中, 在涉及态密度的计算时都隐含了系统必须满足热力学极限条件 (粒子数 $N\to\infty$, 体积 $V\to\infty$, $N/V=$ 常数) 的假设 [23]. 目前研究涉及的 unitary 费米气体均是在外场条件下实现的, 在简谐势阱的情况下, 热力学极限条件具体为 [24] $N\to\infty$, $\varOmega\to 0$, $N\varOmega^3=$ 常数, 其中 $\varOmega=(\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ 为谐振子在三个坐标方向频率的几何平均. 而囚禁超低温气体的实验中, 原子的数量级一般为 10^5—10^7 左右, 这显然不能视为真正意义上的宏观量级, 实验中简谐势的圆频率一般为 10^2—$10^3\ \mathrm{s}^{-1}$ [8−10], 也不满足 $\varOmega\to 0$, 可见简谐势阱中的 unitary 费米气体并不满足热力学极限条件, 而应该是一个处于有限范围的有限粒子数系统. 近年来的研究结果表明, 对于有限尺度和有限粒子数系统, 不管是经典气体还是量子气体, 其热力学性质与满足热力学极限条件的系统是有重要区别的 [25−30], 忽略系统的有限特征, 就可能丢掉系统一些重要的物理效应. 然而对于服从分数不相容统计的 unitary 费米气体系统, 尚未见到对其有限系统热力学性质进行研究的文献.

本文应用分数不相容统计, 研究三维简谐势阱中有限 unitary 费米气体系统的热力学性质, 并与满足热力学极限条件的系统进行比较, 揭示其热力学性质的粒子数效应和边界效应. 第 2 节中, 首先根据修正的态密度和分数不相容统计求出绝对零度时 unitary 费米气体的费米能和粒子平均能量, 然后与满足热力学极限条件的系统比较, 揭示其粒子数效应和边界效应的变化规律. 第 3 节中, 求出有限温度条件下系统的热力学性质, 给出不同物理量对应的特征温度和特征粒子数, 再与满足热力学极限条件的系统进行比较, 揭示热力学性质随温度及粒子数的变化规律, 分析讨论引起这种变化的物理原因. 最后给出本文的主要结论.

2　$T=0$ K 时的热力学性质

在广义不相容统计中, 其分布函数为 [15,31]

$$f(\varepsilon_i)=\frac{1}{w_i+g},\tag{1}$$

式中 ε_i 为量子态 i 的单粒子能量, g 为统计参数, 对于理想玻色气体 $g=0$, 理想费米气体 $g=1$, unitary 费米气体其 g 值可由零温下粒子的平均能量和费米能来确定, 文献 [20] 给出 $g=8/27$. 函数 w_i 由下面的非线性方程确定 [31],

$$\mu-\varepsilon_i=-kT\left[(1-g)\ln(1+w_i)+g\ln w_i\right],\tag{2}$$

式中 μ 为化学势, k 为玻尔兹曼常数, T 为热力学温度. 定义 $\varepsilon_i=0$ 时 w_i 的值为 w_0, 则

$$\mu=-kT\left[(1-g)\ln(1+w_0)+g\ln w_0\right].\tag{3}$$

$T=0$ K 时的分布函数为 [15,31]

$$f(\varepsilon_i)=\begin{cases}1/g, & \varepsilon_i<\mu,\\ 0, & \varepsilon_i>\mu.\end{cases}\tag{4}$$

知道系统的分布函数之后, 求解系统热力学性质的有效方法, 就是通过系统态密度的表达式进行

一个恰当的积分. 在应用分数不相容统计理论研究简谐势阱中unitary费米气体热力学性质的文献中, 其态密度均取为$D(\varepsilon)\propto\varepsilon^2$ [17,20,21], 其中ε为粒子能量, 这种态密度的关系是热力学极限条件下所满足的. 文献[32]根据三维简谐势阱中能级的简并度对多粒子系统的态密度研究之后发现, 考虑系统的有限特征时, 修正的态密度表达结果为

$$D(\varepsilon)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{(\hbar\Omega)^3}+\frac{\varepsilon}{(\hbar\Omega)^2}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\bar{\mu}\right), \tag{5}$$

式中$\hbar$为约化普朗克常数, $\bar{\omega}=\frac{1}{3}(\omega_x+\omega_y+\omega_z)$为谐振子在三个坐标方向频率的算术平均, $\bar{\mu}=\varepsilon_0/(\hbar\Omega)$, ε_0为多粒子理想气体系统每个粒子在基态的能量.

将谐振子的理想费米能记为E_{F}, 考虑有限尺度和有限粒子数修正时unitary费米气体的费米能记为$\tilde{E}_{\mathrm{F}}$, 应用(4)式和(5)式可以求得$T=0$ K时系统粒子数的表达式为

$$\begin{aligned}N&=\int_0^{\tilde{E}_{\mathrm{F}}}f(\varepsilon)D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\\&=\frac{1}{6g}\frac{\tilde{E}_{\mathrm{F}}^3}{(\hbar\Omega)^3}\left[1+\frac{\hbar\bar{\omega}}{\tilde{E}_{\mathrm{F}}}\left(\frac{9}{2}+2\bar{\mu}\right)\right].\end{aligned} \tag{6}$$

满足热力学极限条件时$D(\varepsilon)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{(\hbar\Omega)^3}$, 由此态密度表达式以及理想费米子满足的分布函数, 可以求得满足热力学极限条件时势阱中理想费米气体的粒子数表达式为

$$N=\int_0^{E_{\mathrm{F}}}f(\varepsilon)D(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon=\frac{1}{6}\frac{E_{\mathrm{F}}^3}{(\hbar\Omega)^3}. \tag{7}$$

利用(6)式和(7)式可以求得, 零级近似下三维简谐势阱中unitary费米气体系统费米能和理想费米能之间满足[20]

$$\tilde{E}_{\mathrm{F}}=g^{\frac{1}{3}}E_{\mathrm{F}}, \tag{8}$$

(8)式实际上是满足热力学极限条件的unitary费米气体的费米能与理想费米能之间所满足的关系. 将(8)式代入(6)式, 求得势阱中有限unitary费米气体粒子数的一级近似表达式为

$$N=\frac{1}{6}\frac{E_{\mathrm{F}}^3}{(\hbar\Omega)^3}\left[1+\frac{1}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\left(\frac{9}{2}+2\bar{\mu}\right)\right], \tag{9}$$

内能E的一级近似表达式为

$$\begin{aligned}E&=\int_0^{\tilde{E}_{\mathrm{F}}}\varepsilon f(\varepsilon)D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\\&=\frac{1}{8}\frac{g^{1/3}E_{\mathrm{F}}^4}{(\hbar\Omega)^3}\left[1+\frac{1}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\left(4+\frac{16}{9}\bar{\mu}\right)\right].\end{aligned} \tag{10}$$

联解(6)式, (8)式, (9)式, (10)式, 求得三维简谐势阱中有限unitary费米气体的费米能和粒子平均能量的一级近似表达式分别为:

$$\tilde{E}_{\mathrm{F}}=g^{1/3}E_{\mathrm{F}}\left[1-\frac{1}{(6gN)^{2/3}}\left(\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\right)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\bar{\mu}\right)\right], \tag{11}$$

$$\frac{E}{NE_{\mathrm{F}}}=\frac{3}{4}g^{1/3}\left[1-\frac{1}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\bar{\mu}\right)\right]. \tag{12}$$

从(11)式和(12)式可得出以下结论.

1) 热力学极限条件下, 粒子平均能量为$\frac{E}{NE_{\mathrm{F}}}=\frac{3}{4}g^{1/3}$, 这与文献[20]的结果相一致, 对有限unitary费米气体, $T=0$ K时粒子的平均能量小于热力学极限下的结果. 产生这一现象的物理原因是, 有限势阱空间(ω_i有限)与满足热力学极限条件($\omega_i\to 0$)的系统相比, 相邻能级间隔增大, 在$T=0$ K时能够处于激发态的粒子数减少, 导致粒子的平均能量减小.

2) 粒子的平均能量存在有限粒子数效应. (12)式的修正项正比于$N^{-1/3}$, 说明随着势阱中装载的粒子数减少, 粒子的平均能量减小, 随着势阱中装载的粒子数增加, 粒子的平均能量增大, 并以热力学极限条件下的值为上限. 这是由于在较低能级已被占据的情况下, 随着粒子数的增加, 处于高能量激发态的粒子数增加, 导致粒子平均能量增大.

3) 修正项与$\bar{\omega}/\Omega$有关, 说明粒子的平均能量与势阱的边界有关. 按照文献[33]的分析, 对于三维势阱$\bar{\mu}=1/N^{2/3}\ll 1$, 即(12)式中含有$\bar{\mu}$的项可以视为修正项中的微扰, 如果忽略该项, 并令$\omega_y=b\omega_x$, $\omega_z=d\omega_x$, 在给定粒子数N的情况下, 当势阱参数满足$d=(1+b)/2$时, $\bar{\omega}/\Omega$取极小值, 由(12)式可知, 此时边界效应将使粒子平均能量取极大值. 显然球对称简谐势阱满足粒子平均能量为极大的边界条件.

4) $T=0$ K时, 满足热力学极限条件的unitary费米气体的费米能与理想费米能之间满足$\tilde{E}_{\mathrm{F}}=g^{1/3}E_{\mathrm{F}}$, 有限unitary费米气体的费米能小于满足热力学极限条件系统的费米能, 有限unitary

费米气体的费米能同样存在粒子数效应和边界效应, 但其随粒子数和边界的变化规律与粒子平均能量有所不同.

3 有限温度下的热力学性质

3.1 粒子的平均能量

根据(2)式和(3)式求得

$$\mathrm{d}\varepsilon = kT\frac{g+w}{w(1+w)}\mathrm{d}w, \tag{13}$$

应用(1)式, (5)式和(13)式, 求得有限温度下系统粒子数和能量的表达式为

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{\infty} f(\varepsilon)D(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{kT}{\hbar\varOmega}\right)^3 h_2(w_0) + \frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\bar{\mu}\right)\left(\frac{kT}{\hbar\varOmega}\right)^2 \\ &\quad \times h_1(w_0), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon)D(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{kT}{\hbar\varOmega}\right)^4 h_3(w_0) + \frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\bar{\mu}\right)\left(\frac{kT}{\hbar\varOmega}\right)^3 \\ &\quad \times h_2(w_0), \end{aligned} \tag{15}$$

式中

$$\begin{aligned} h_n(w_0) = & \int_{w_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}w}{w(1+w)} \\ & \times\left\{\ln\left[\left(\frac{w}{w_0}\right)^g\left(\frac{1+w}{1+w_0}\right)^{1-g}\right]\right\}^n. \end{aligned} \tag{16}$$

为了方便研究有限unitary费米气体在有限温度下热力学性质随温度的变化以及粒子数效应和边界效应, 并将有限系统与满足热力学极限条件系统的热力学性质进行比较, 采用约化温度表示热力学量将更加便捷. 利用(9)式, (14)式和(15)式, 求得简谐势阱中有限unitary费米气体系统粒子平均能量为

$$\begin{aligned} \frac{E}{NE_{\mathrm{F}}} = & 3\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^4 h_3(w_0) \\ & \times\left[1-\frac{3}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\bar{\mu}\right)\right] \\ & +\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^3\frac{6^{2/3}}{N^{1/3}}h_2(w_0)\frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\bar{\mu}\right) \\ & \times\left[1-\frac{2}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\bar{\mu}\right)\right], \end{aligned} \tag{17}$$

式中T_{F}为费米温度.

由(17)式知, 热力学极限条件下粒子的平均能量为$\dfrac{E}{NE_{\mathrm{F}}}=3\left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^4 h_3(w_0)$, 其结果与粒子数和边界无关, 这与文献[20]的结果一致. 而有限unitary费米气体系统粒子的平均能量则与T^4, T^3以及粒子数、势阱边界形状均有关系.

研究给定粒子数时温度对粒子平均能量的影响并与满足热力学极限条件的系统进行比较时, 可根据(17)式定义粒子平均能量对应的特征约化温度为

$$\begin{aligned} \left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{\varepsilon}} = & \frac{2}{3}g^{\frac{1}{3}}\frac{h_2(w_0)}{h_3(w_0)} \\ & \times\left[1-\frac{1}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\left(3+\frac{4}{3}\bar{\mu}\right)\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

由(17)式和(18)式求得, 若$\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}<\left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{\varepsilon}}$,有限系统粒子的平均能量大于热力学极限系统; 若$\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}=\left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{\varepsilon}}$,两系统粒子平均能量相等; 若$\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}>\left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{\varepsilon}}$, 有限系统粒子平均能量小于热力学极限系统. 产生这一现象的物理原因是, 温度高于绝对零度但小于粒子平均能量对应的特征温度时, 由于温度较低, 两系统处于高能级的粒子数都较少, 但有限系统粒子能级间隔较大, 热力学极限系统粒子能级间隔较小, 故有限系统粒子平均能量比热力学极限系统粒子平均能量大; 在$\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}>\left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{\varepsilon}}$的高温条件下, 由于热力学极限系统$N\to\infty$, 居于高能激发态的粒子数远远大于有限系统, 所以有限系统粒子的平均能量小于热力学极限系统.

(18)式说明粒子平均能量对应的特征约化温度随粒子数的减小而降低, 随粒子数的增加而升高. 系统的边界条件也会影响粒子平均能量对应的特征约化温度, 给定粒子数, 当势阱参数满足$d=(1+b)/2$时, $\bar{\omega}/\varOmega$取极小值, 边界对于粒子平均能量对应的特征约化温度的影响将使其取极大值.

研究给定温度条件下粒子数对有限系统粒子平均能量的影响时, 根据(17)式可定义粒子平均能

量对应的特征粒子数为

$$N_{\bar{\varepsilon}}=\frac{1}{6g}\left[\frac{3+\frac{4}{3}\bar{\mu}}{1-\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\frac{3h_3(w_0)}{2g^{1/3}h_2(w_0)}}\frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\right]^3. \tag{19}$$

由(17)式和(19)式可知, $N<N_{\bar{\varepsilon}}$ 时, 有限unitary费米气体系统粒子的平均能量小于热力学极限系统; $N=N_{\bar{\varepsilon}}$ 时, 两系统粒子平均能量相等; $N>N_{\bar{\varepsilon}}$ 时, 有限系统粒子平均能量大于热力学极限系统. 而绝对零度时, 粒子平均能量随粒子数的增加而增大, 并以满足热力学极限条件系统的值为上限. 可见有限温度和零温两种条件下, 有限系统粒子平均能量与粒子数之间的关系不同. (19)式说明, 三维简谐势阱中有限unitary费米气体系统粒子的平均能量对应的特征粒子数与温度和势阱边界形状有关, 温度降低特征粒子数减小, 温度升高特征粒子数增大, 当势阱参数满足 $d=(1+b)/2$ 时, $\bar{\omega}/\varOmega$ 取极小值, 边界对于平均能量对应的特征粒子数的影响将使其取极小值.

3.2 粒子的平均熵

在分数不相容统计中, 系统微观状态数 W 的自然对数可表示为[20]

$$\begin{aligned}\ln W&=\sum_i\frac{G_i}{w_i+g}\left[(1+w_i)\ln(1+w_i)-w_i\ln w_i\right]\\&=\int_0^{\infty}\left[(1+w)\ln(1+w)-w\ln w\right]\frac{D(\varepsilon)}{w+g}\mathrm{d}\varepsilon,\end{aligned} \tag{20}$$

式中 G_i 为能级 ε_i 的量子态数. 应用(5)式, (9)式, (13)式以及(20)式, 求得三维简谐势阱中有限unitary费米气体系统粒子的平均熵为

$$\begin{aligned}\frac{S}{Nk}={}&3\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^3 j_2(w_0)\\&\times\left[1-\frac{1}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\left(\frac{9}{2}+2\bar{\mu}\right)\right]\\&+\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^2\frac{6^{2/3}}{N^{1/3}}j_1(w_0)\frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\bar{\mu}\right)\\&\times\left[1-\frac{1}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\left(3+\frac{4}{3}\bar{\mu}\right)\right],\end{aligned} \tag{21}$$

式中

$$\begin{aligned}&j_n(w_0)\\&=\int_{w_0}^{\infty}\left[\frac{\ln(1+w)}{w}-\frac{\ln w}{1+w}\right]\\&\quad\times\left\{\ln\left[\left(\frac{w}{w_0}\right)^g\left(\frac{1+w}{1+w_0}\right)^{1-g}\right]\right\}^n\mathrm{d}w.\end{aligned} \tag{22}$$

由(21)式知, 满足热力学极限系统粒子的平均熵为 $\frac{S}{Nk}=3\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^3 j_2(w_0)$, 与粒子数和势阱边界无关, 这与文献[20]的结论相一致, 而有限系统粒子的平均熵与 T^3, T^2 以及粒子数和势阱边界均有关系.

给定粒子数, 研究熵与温度的关系并与满足热力学极限条件的系统比较时, 根据(21)式可定义粒子平均熵对应的特征约化温度为

$$\begin{aligned}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{s}}={}&\frac{2}{3}g^{\frac{1}{3}}\frac{j_1(w_0)}{j_2(w_0)}\\&\times\left[1-\frac{1}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\left(3+\frac{4}{3}\bar{\mu}\right)\right].\end{aligned} \tag{23}$$

根据(21)式和(23)式可知, $\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}<\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{s}}$ 时, 有限unitary费米气体系统粒子的平均熵大于满足热力学极限条件系统的对应量; $\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}=\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{s}}$ 时, 两系统粒子的平均熵相等; $\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}>\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{s}}$ 时, 有限unitary费米气体系统粒子的平均熵小于热力学极限系统. 这一现象根据不同温度下有限系统和热力学极限系统粒子在能级上有不同分布, 从而形成不同的微观状态数不难理解. 给定粒子数 N, 当势阱参数满足 $d=(1+b)/2$ 时, 粒子平均熵对应的特征温度随边界的变化取极大值.

给定温度条件下, 研究有限系统粒子平均熵随粒子数的变化并与满足热力学极限条件的系统比较时, 根据(21)式可定义粒子平均熵对应的特征粒子数为

$$N_{\bar{s}}=\frac{1}{6g}\left[\frac{3+\frac{4}{3}\bar{\mu}}{1-\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\frac{3j_2(w_0)}{2g^{1/3}j_1(w_0)}}\frac{\bar{\omega}}{\varOmega}\right]^3. \tag{24}$$

由(21)式和(24)式可知, $N<N_{\bar{s}}$ 时, 有限unitary费米气体系统粒子的平均熵小于热力学极限系统的对应量; $N=N_{\bar{s}}$ 时, 两系统粒子平均熵相等; $N>N_{\bar{s}}$ 时, 有限系统粒子平均熵大于热力学极限系统的对应量.

3.3 粒子的平均热容量

由于三维简谐势阱中 $\bar{\mu}=1/N^{2/3}\ll 1$, 含有 $\bar{\mu}$ 的项可视为修正项中的微扰, 如果忽略该项, 利

用(14)式, (15)式以及(17)式求得粒子的平均热容量为

$$\begin{aligned}\frac{C_V}{Nk} &= \frac{\partial E/\partial T}{Nk}\\ &= 12\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^3 h_3(w_0)\left[1-\frac{9}{2}\frac{1}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\right]\\ &+3\frac{T^4}{T_{\mathrm{F}}^3}\left[1-\frac{9}{2}\frac{1}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\right]\\ &\times\left[\left(\frac{\partial h_3(w_0)}{\partial T}\right)_\mu+\left(\frac{\partial h_3(w_0)}{\partial \mu}\right)_T\frac{\partial\mu}{\partial T}\right]\\ &+\frac{9}{2}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^2 h_2(w_0)\frac{6^{2/3}}{N^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\left[1-\frac{3}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\right]\\ &+\frac{3}{2}\frac{T^3}{T_{\mathrm{F}}^2}\frac{6^{2/3}}{N^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\left[1-\frac{3}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\right]\\ &\times\left[\left(\frac{\partial h_2(w_0)}{\partial T}\right)_\mu+\left(\frac{\partial h_2(w_0)}{\partial \mu}\right)_T\frac{\partial\mu}{\partial T}\right],\end{aligned}\tag{25}$$

根据(16)式以及(3)式可得

$$\left(\frac{\partial h_n(w_0)}{\partial T}\right)_\mu = -\frac{n\mu}{kT^2}h_{n-1}(w_0),\tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial h_n(w_0)}{\partial \mu}\right)_T = \frac{n}{kT}h_{n-1}(w_0),\tag{27}$$

由(14)式, 忽略含$\bar{\mu}$的微扰项后, 依据$(\partial N/\partial T)_{\bar{\omega},\Omega} = 0$可以求得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\left(-\frac{\mu}{T}+\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)\\ \approx&-\frac{3}{2}\frac{h_2(w_0)}{h_1(w_0)}\left[1-\frac{3}{2}\frac{\hbar\bar{\omega}}{kT}\frac{l(w_0)}{h_1(w_0)}\right]-3\frac{\hbar\bar{\omega}}{kT},\end{aligned}\tag{28}$$

式中$l(w_0) = \displaystyle\int_{w_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}w}{w(1+w_0)}$. 将(26)式, (27)式, (28)式代入(25)式, 求得有限unitary费米气体系统粒子的平均热容量为

$$\begin{aligned}\frac{C_V}{Nk} =& 3A\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^3\left[1-\frac{9}{2}\frac{1}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\right]+3\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^2\\ &\times\frac{B}{N^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\left[1-\frac{3}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\right],\end{aligned}\tag{29}$$

式中

$$\begin{aligned}A =& 4h_3(w_0)-\frac{9h_2^2(w_0)}{2h_1(w_0)}\left[1-\frac{3\hbar\bar{\omega}}{2kT}\frac{l(w_0)}{h_1(w_0)}\right]\\ &-9h_2(w_0)\frac{\hbar\bar{\omega}}{kT},\end{aligned}\tag{30}$$

$$B = 6^{2/3}\left[\frac{9h_2(w_0)}{4h_1(w_0)}\frac{\hbar\bar{\omega}}{kT}l(w_0)-3h_1(w_0)\frac{\hbar\bar{\omega}}{kT}\right].\tag{31}$$

由(29)式可知, 满足热力学极限条件的unitary费米气体系统粒子的平均热容量为$\dfrac{C_V}{Nk} = 3A\left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^3$, 与粒子数和势阱边界无关, 而有限unitary费米气体系统粒子的平均热容量与T^3, T^2以及粒子数和势阱的边界均有关系.

给定粒子数, 研究有限系统粒子平均热容量随温度的变化并与满足热力学极限条件的系统进行比较时, 根据(29)式可定义与粒子平均热容量对应的特征温度为

$$\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{C}_V} = \frac{4B}{3A}g^{1/3}\left[1-\frac{3}{(6gN)^{1/3}}\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\right].\tag{32}$$

结合(29)式和(32)式可知, $\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}} < \left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{C}_V}$时, 有限unitary费米气体系统粒子的平均热容量大于满足热力学极限系统的对应量; $\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}} = \left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{C}_V}$时, 两系统粒子平均热容量相等; $\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}} > \left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)_{\bar{C}_V}$时, 有限unitary费米气体系统粒子的平均热容量小于热力学极限系统. 这一结果根据两系统粒子平均能量随温度的变化不难理解.

研究给定温度下有限系统粒子平均热容量的粒子数效应, 并与热力学极限系统进行比较时, 根据(29)式可定义与粒子平均热容量对应的特征粒子数为

$$N_{\bar{C}_V} = \frac{27}{6g}\left(\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\right)^3\frac{1}{\left[1-\dfrac{3A}{4g^{1/3}B}\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right]^3}.\tag{33}$$

由(29)及(33)式可知, $N < N_{\bar{C}_V}$时, 有限unitary费米气体系统粒子的平均热容量小于热力学极限系统; $N = N_{\bar{C}_V}$时, 两系统粒子平均热容量相等; $N > N_{\bar{C}_V}$时, 有限系统粒子平均热容量大于热力学极限系统.

4 结　论

1) $T = 0$ K时, 三维简谐势阱中有限unitary费米气体系统的费米能和粒子平均能量均小于热力学极限条件下unitary费米气体的对应量. 费米能和粒子平均能量存在粒子数效应和势阱的边界效应, 随着粒子数的增加费米能和粒子平均能量增大, 并以满足热力学极限条件系统的对应量为

上限; 给定粒子数, 当势阱参数满足 $d = (1+b)/2$ 时, 费米能和粒子平均能量随势阱边界的变化取极大值, 但两者随粒子数和势阱边界的变化关系有所不同.

2) 有限温度条件下, 势阱中有限unitary费米气体系统粒子的平均能量与 $T = 0$ K时不同. 给定粒子数时, 存在一个与粒子平均能量对应的特征约化温度 $\left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{\varepsilon}}$, $\frac{T}{T_{\rm F}} < \left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{\varepsilon}}$ 时, 有限系统粒子的平均能 量大于热力学极限系统; $\frac{T}{T_{\rm F}} = \left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{\varepsilon}}$ 时, 两系统粒子平均能量相等; $\frac{T}{T_{\rm F}} > \left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{\varepsilon}}$ 时, 有限系统粒子平均能量小于热力学极限系统. 给定温度条件下, 有限unitary费米气体系统存在一个与粒子平均能量对应的特征粒子数 $N_{\bar{\varepsilon}}$, $N < N_{\bar{\varepsilon}}$ 时, 有限系统粒子的平均能量小于热力学极限系统; $N = N_{\bar{\varepsilon}}$ 时, 两系统粒子平均能量相等; $N > N_{\bar{\varepsilon}}$ 时, 有限系统粒子平均能量大于热力学极限系统.

3) 有限温度条件下, 给定粒子数时势阱中有限unitary费米气体系统粒子的平均熵存在一个对应的特征约化温度 $\left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{s}}$, $\frac{T}{T_{\rm F}} < \left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{s}}$ 时, 有限系统粒子的平均熵大于热力学极限系统; $\frac{T}{T_{\rm F}} = \left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{s}}$ 时, 两系统粒子的平均熵相等; $\frac{T}{T_{\rm F}} > \left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{s}}$ 时, 有限系统粒子的平均熵小于热力学极限系统. 给定温度条件下, 有限unitary费米气体系统存在一个与粒子平均熵对应的特征粒子数 $N_{\bar{s}}$, $N < N_{\bar{s}}$ 时, 有限系统粒子的平均熵小于热力学极限系统; $N = N_{\bar{s}}$ 时, 两系统粒子平均熵相等; $N > N_{\bar{s}}$ 时, 有限系统粒子平均熵大于热力学极限系统.

4) 有限温度条件下, 给定粒子数时, 势阱中有限unitary费米气体系统粒子的平均热容量存在一个对应的特征约化温度 $\left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{C}_V}$, $\frac{T}{T_{\rm F}} < \left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{C}_V}$ 时, 有限系统粒子的平均热容量大于热力学极限系统; $\frac{T}{T_{\rm F}} = \left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{C}_V}$ 时, 两系统粒子平均热容量相等; $\frac{T}{T_{\rm F}} > \left(\frac{T}{T_{\rm F}}\right)_{\bar{C}_V}$ 时, 有限系统粒子的平均热容量小于热力学极限系统. 给定温度条件下, 有限unitary费米气体系统存在一个与粒子平均热容量对应的特征粒子数 $N_{\bar{C}_V}$, $N < N_{\bar{C}_V}$ 时, 有限unitary费米气体系统粒子的平均热容量小于热力学极限系统; $N = N_{\bar{C}_V}$ 时, 两系统粒子平均热容量相等; $N > N_{\bar{C}_V}$ 时, 有限系统粒子平均热容量大于热力学极限系统.

参考文献

[1] Regal C A, Greiner M, Jin D S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 040403
[2] Bourdel T, Khaykovich L, Cubizolles J, Zhang J, Chevy F, Teichmann M, Tarruell L, Kokkelmans S J J M F, Salomon C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 050401
[3] Bartenstein M, Altmeyer A, Riedl S, Jochim S, Chin C, Denschlag H J, Grimm R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 120401
[4] Zwierlein M W, Abo-Shaeer J R, Schirotzek A, Schunck C H, Ketterle W 2005 *Nature* **435** 1047
[5] Romans M W J, Stoof H T C 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 260407
[6] Ho T L 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 090402
[7] Hu H, Drummond P D, Liu X J 2007 *Nat. Phys.* **3** 469
[8] Luo L, Clancy B, Joseph J, Kinast J, Thomas J E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 080402
[9] Kinast J, Turlapov A, Thomas J E, Chen Q J, Stajic J, Levin K 2005 *Science* **307** 1296
[10] Luo L, Thomas J E 2009 *J. Low Temp. Phys.* **154** 1
[11] Joseph J, Clancy B, Luo L, Kinast J, Turlapov A, Thomas J E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 170401
[12] Papenbrock T 2005 *Phys. Rev. A* **72** 041603
[13] Hu H, Liu X J, Drummond P D 2010 *New J. Phys.* **12** 063038
[14] Bulgac A, Drut J E, Magierski P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 090404
[15] Haldane F D M 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 937
[16] Wu Y S 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 922
[17] Bhaduri R K, Murthy M V N, Srivastava M K 2007 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40** 1775
[18] Qin F, Chen J S 2009 *Phys. Rev. A* **79** 043625
[19] Bhaduri R K, Murthy M V N, Brack M 2008 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **41** 115301
[20] Qin F, Chen J S 2010 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** 055302
[21] Qin F, Chen J S 2012 *Phys. Lett. A* **376** 1191
[22] Liu K, Chen J S 2011 *Chin. Phys. B* **20** 020501
[23] Sevinçli S, Tanatar B 2007 *Phys. Lett. A* **371** 389
[24] Franco D, Stefano G, Lev P P, Sandro S 1999 *Rev. Mod.Phys.* **71** 463
[25] Sisman A, Muller I 2004 *Phys. Lett. A* **320** 360
[26] Sisman A 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 11353
[27] Pang H, Dai W S, Xie M 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 2563
[28] Dai W S, Xie M 2003 *Phys. Lett. A* **311** 340
[29] Su D G, Ou C J, Wang A Q P, Chen J C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 5189
[30] Yuan D Q 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 170501 (in Chinese) [袁都奇 2014 物理学报 **63** 170501]
[31] Iguchi K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3233
[32] Hassan A S, El-Badry A M 2009 *Physica B* **404** 1947
[33] Ingold G L, Lambrecht A 1998 *Eur. Phys. J. D* **1** 29

Thermodynamics of trapped finite unitary Fermi gas*

Yuan Du-Qi†

(*College of Physics and Photoelectric Technology, Baoji University of Science and Arts, Baoji 721016, China*)

(Received 19 May 2016; revised manuscript received 13 June 2016)

Abstract

At zero-temperature and finite-temperature, the thermodynamic properties of finite unitary Fermi gas in a three-dimensional harmonic trap are investigated by using fractional exclusion statistics, and the results are compared with those of the system which satisfies the thermodynamic limit. At zero-temperature, Fermi energy and average energy of per particle increase with the increase of the number of particles for finite unitary Fermi gas, and their limits are the corresponding parameters of the system which satisfy thermodynamic limits. Fermi energy and average energy of per particle each have a maximum value changing with the boundary of the potential well. For the finite-temperature trapped unitary Fermi system, when the number of particles is certain the average energy of per particle, average entropy of per particle, average heat capacity of per particle each have a characteristic temperature, respectively, when the temperature is equal to the characteristic temperature of the physical parameter, the corresponding parameters for the finite system and the thermodynamic limit system are equal, when the temperature is lower (or higher) than the characteristic temperature of parameter, the physical parameter of the finite system will be greater (or less) than the corresponding parameter of the thermodynamic limit system. The characteristic temperature has particle number effect and boundary effect. When the temperature is determined, the average energy of per particle, average entropy of per particle and average heat capacity of per particle each have a characteristic number of particles, respectively, when the number of particles is equal to the characteristic number of particles for physical parameter, the corresponding parameters for the finite system and the thermodynamic limit system are equal, when the number of particles is less (or more) than the characteristic number of particles for corresponding parameter, the corresponding parameter of the finite system will be less (or larger) than the thermodynamic limit of system.

Keywords: finite unitary Fermi gas, harmonic potential, particles number effects, boundary effects

PACS: 03.75.Ss, 05.30.Fk, 05.30.Pr, 67.85.Lm **DOI:** 10.7498/aps.65.180302

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. 2012JM1006).

† Corresponding author. E-mail: yuanduqi@163.com