

忆阻自激振荡系统的隐藏吸引子及其动力学特性

包涵 包伯成 林毅 王将 武花干

Hidden attractor and its dynamical characteristic in memristive self-oscillating system

Bao Han Bao Bo-Cheng Lin Yi Wang Jiang Wu Hua-Gan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 180501 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.180501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.180501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I18>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于忆阻器反馈的 Lorenz 超混沌系统及其电路实现

Memristor-based Lorenz hyper-chaotic system and its circuit implementation

物理学报.2016, 65(19): 190502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.190502>

局部不均匀性对时空系统振荡频率的影响

Oscillatory frequencies in spatiotemporal system with local inhomogeneity

物理学报.2016, 65(15): 150503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.150503>

有限理性视野下网络交通流逐日演化规律研究

Day-to-Day dynamical evolution of network traffic flow under bounded rational view

物理学报.2016, 65(15): 150502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.150502>

部分时滞诱发 Watts-Strogatz 小世界神经网络产生随机多共振

Stochastic multi-resonance induced by partial time delay in a Watts-Strogatz small-world neuronal network

物理学报.2016, 65(12): 120502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.120502>

多平衡态下簇发振荡产生机理及吸引子结构分析

Mechanism of bursting oscillations with multiple equilibrium states and the analysis of the structures of the attractors

物理学报.2016, 65(9): 090501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.090501>

忆阻自激振荡系统的隐藏吸引子及其动力学特性*

包涵 包伯成[†] 林毅 王将 武花干

(常州大学信息科学与工程学院, 常州 213164)

(2016年5月8日收到; 2016年6月6日收到修改稿)

由压控忆阻替换三维自激振荡系统的线性耦合电阻, 实现了一种新型的四维忆阻自激振荡系统. 该系统不存在任何平衡点, 但可生成周期、准周期、混沌等隐藏吸引子; 特别地, 当初始条件不同时, 系统出现了不同拓扑结构混沌吸引子或准周期极限环与混沌吸引子的共存现象, 以及准周期极限环与多种拓扑结构混沌吸引子的多吸引子现象. 理论分析、数值仿真和硬件实验的结果一致, 表明了所提出的忆阻自激振荡系统有着十分丰富而复杂的隐藏动力学特性.

关键词: 忆阻自激振荡系统, 隐藏吸引子, 动力学特性

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.65.180501

1 引言

长期以来, 学术界对于完全确定的常微分方程构成的混沌系统的研究与发掘从未停歇过, 其中研究最为广泛的是由自治常微分方程表示的三维连续混沌系统, 有 Lorenz 系统^[1], Rössler 系统^[2], Chen 系统^[3], Lü 系统^[4] 以及其他一些典型三维混沌系统^[5-9]. 在三维混沌系统上加载线性或非线性状态反馈控制器, 可获得各种四维超混沌系统^[9]; 或者通过多段线性或非线性函数改造混沌系统, 可增加指数 2 平衡点的数量, 从而得到各类多涡卷或多翼混沌系统^[10-12]. 一般连续自治混沌系统常微分方程组可分为线性项和非线性项两个组成部分. 基于运算放大器与电阻、电容的有机组合, 可实现混沌系统的加减与积分运算, 而基于模拟乘法器可实现混沌系统的非线性运算^[13]. 因此, 大多数连续自治混沌系统可采用运算放大器、模拟乘法器、电阻和电容等分立元器件构建实现.

近年来, 作为第四种基本电路元件^[14], 忆阻与其他现有的电路元件或器件相互组合连接、以电路

的形式在各个工程领域中得到了广泛的应用. 忆阻是非线性电路元件, 引入电路后很容易实现电路的混沌振荡, 因此忆阻混沌电路是研究较为广泛的忆阻应用电路, 已有大量的文献成果报道^[15-18]. 物理上新实现的忆阻器是纳米级无源元件^[19], 技术实现难度大、整体造价高, 在短时间内无法达到商用. 目前, 利用电阻、电容、电感、运算放大器、模拟乘法器等分立元器件实现了多种忆阻模拟器^[20-22], 或者基于特殊拓扑形式的电路构建了若干广义忆阻模拟器^[23-25], 为忆阻及其应用电路的建模分析和实验观察作出了重要贡献.

隐藏吸引子是近几年来新定义的一类吸引子, 其吸引盆与任何不稳定平衡点不相交, 在一些无平衡点或具有稳定平衡点的连续混沌或超混沌系统中均有发现, 得到了学术界的广泛关注并取得了大量研究成果^[26-33]. 在文献^[1-12]中, 连续混沌系统所生成吸引子的每一个涡卷均对应于 1 个指数 2 的不稳定鞍焦, 为了有别于隐藏吸引子, 文献^[27]把这些传统的吸引子新定义为自激吸引子. 隐藏吸引子不是由不稳定平衡点激发的, 它与自激吸引子有着完全不同的动力学特征. 此外, 共存多吸引子

* 国家自然科学基金(批准号: 51277017)、江苏省高校自然科学基金(批准号: 15JKB510001)和常州市基础 Research 计划(批准号: CJ20159026)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: mervinbao@126.com

或共存无限多吸引子是非线性动力学系统中经常碰到的一种奇异物理现象, 显示出系统具有多稳定性或超级多稳定性^[34-38]. 由于共存的隐藏振荡行为是一些实际非线性动力学系统在工程应用时所不期望发生的动力学行为, 因此研究忆阻混沌系统的实现方法及其存在的共存隐藏吸引子有着重要的理论物理意义和工程应用价值.

在基于运算放大器和模拟乘法器实现的混沌系统电路中, 采用一个忆阻替换与积分电路输入端连接的、实现自变量或线性耦合变量的增益电阻, 即可实现忆阻混沌系统. 按照此思路, 由一个压控忆阻替换文献^[39-41]提出的三维自激振荡系统中的线性耦合电阻, 本文实现了一种新型的忆阻自激振荡系统. 特别地, 新提出的忆阻自激振荡系统不具有任何平衡点, 所生成的极限环或混沌吸引子为一种新颖且奇异的隐藏吸引子^[26,27], 且对于不同的初始条件, 系统将出现混沌吸引子、准周期极限环等不同的共存隐藏多吸引子现象.

2 忆阻自激振荡系统

2.1 实现方案提出

连续混沌系统实现电路大多数是基于运算放大器和模拟乘法器实现的. 为了构建一个忆阻混沌系统, 最简单的方法是在已有的混沌系统实现电路中, 采用一个忆阻替换某一与运算放大器输入端连接的、实现自变量或线性耦合变量的增益电阻来实现, 如图 1 所示, 其中, W 是忆阻元件.

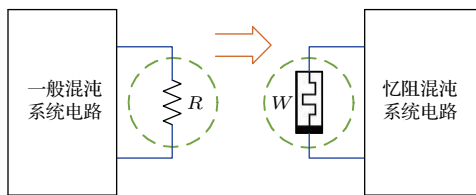


图 1 忆阻混沌系统的电路实现方案

Fig. 1. Circuit realization scheme for memristive chaotic systems.

以非理想压控忆阻为例^[42]. 忆阻是一个二端电路元件, 根据文献^[14]的定义, 其端电压 v 与端电流 i 之间的本构关系可表达为

$$i = W(v_0)v, \quad \dot{v}_0 = f(v_0, v), \quad (1)$$

式中, v_0 为忆阻内部状态变量, $W(v_0)$ 为忆导函数. 假设忆阻的输入端电压为原 n 维混沌系统的某一

状态变量 x_j , 则新构建的 $(n+1)$ 维忆阻混沌系统可表示为

$$\dot{x} = G(x, x_{n+1}), \quad \dot{x}_{n+1} = f(x_{n+1}, x_j), \quad (2)$$

式中, 新增的一维状态变量 x_{n+1} 代表忆阻内部无量纲变量, $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $x_{n+1}, x_j \in \mathbb{R}$, $G: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为非线性函数.

2.2 系统的实现电路

文献^[39-41]提出并研究了一种三维自激振荡系统. 为了便于分析和电路实验验证, 经简化后的三维自激振荡系统的数学模型可描述为

$$\begin{cases} \ddot{x} = (z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} - \omega_0^2 x, \\ \dot{z} = \mu - x^2. \end{cases} \quad (3)$$

令 $y = \dot{x}$, (3) 式可转换成一阶常微分方程组形式表示的系统模型

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 x, \\ \dot{z} = \mu - x^2, \end{cases} \quad (4)$$

式中, x, y, z 为 3 个状态变量, ω_0 代表振荡频率, β 和 μ 为 2 个控制参数. (4) 式所描述的非线性系统由 2 个线性耦合项、1 个常数项和 4 个非线性项组成, 不存在任何平衡点, 可呈现出稳定的准周期振荡现象^[39,40] 和复杂的隐藏吸引子共存现象^[41]. 需要说明的是, 当 $\mu = 0$ 时, 系统 (4) 有一个原点平衡点, 其特征根为 1 个零实根和 1 对共轭虚根, 这时系统 (4) 的运行轨线渐近趋向原点.

基于运算放大器和模拟乘法器的纯模拟电路可实现 (4) 式所描述的非线性动力学系统, 如图 2 所示, 其中, v_x, v_y, v_z 分别代表 3 个积分电路通道的电容电压状态变量, RC 为积分时间常数, 且 $v_1 = v_x^2, v_2 = -v_y v_z, v_3 = -v_1 v_y$ 和 $v_4 = v_1^2 v_y$. 因此, 图 2 的电路状态方程表示如下:

$$\begin{cases} RC\dot{v}_x = v_y, \\ RC\dot{v}_y = (v_z + v_x^2 - \beta v_x^4)v_y - \omega_0^2 v_x, \\ RC\dot{v}_z = \mu - v_x^2. \end{cases} \quad (5)$$

根据图 1 所示的忆阻混沌系统的电路实现方案, 采用压控忆阻 W 替换图 2 中与运算放大器 U_2 反向输入端连接的、虚线圈内实现线性耦合变量的增益电阻, 即可实现本文提出的新型忆阻自激振荡

系统, 如图 2 所示. 同样地, 由图 2 电路可建立新构建的忆阻自激振荡系统的电路方程为:

$$\begin{cases} RC\dot{v}_x = v_y, \\ RC\dot{v}_y = (v_z + v_x^2 - \beta v_x^4)v_y - \omega_0^2 W(v_w)v_x, \\ RC\dot{v}_z = \mu - v_x^2, \\ RC\dot{v}_w = v_x - v_w. \end{cases} \quad (6)$$

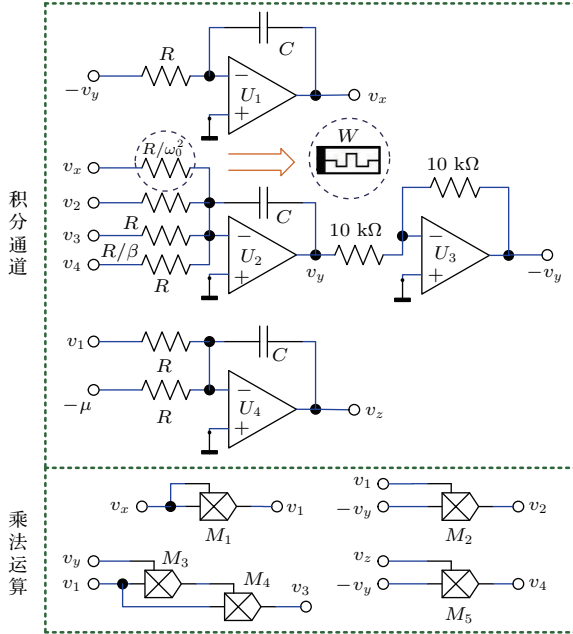


图 2 系统 (4) 的实现电路与忆阻自激振荡电路
Fig. 2. Realization circuit of system (4) and memristive self-oscillated circuit.

为了避免直流漂移, 结合文献[21, 42]提出的忆阻数学模型, 本文考虑一种非理想压控忆阻 $W(v_w)$, 其数学模型为:

$$\begin{cases} i_{y1} = W(v_w)v_x = (a + b|v_w|)v_x, \\ RC\dot{v}_w = v_x - v_w, \end{cases} \quad (7)$$

式中, a 和 b 为正正常数, v_w 为压控忆阻的内部状态变量, v_x 为忆阻的输入电压, i_{y1} 为忆阻的输出并用于第二积分通道积分运算放大器的反向输入. 一种基于运算放大器和模拟乘法器实现的非理想压控忆阻 $W(v_w)$ 的纯模拟电路如图 3 所示, 其中积分时间常数 RC 与图 2 的保持一致.

令 $t = \tau RC$, 对 (6) 式作无量纲处理, 则忆阻自激振荡系统的无量纲方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 W(w)x, \\ \dot{z} = \mu - x^2, \\ \dot{w} = x - w, \end{cases} \quad (8)$$

式中, w 为压控忆阻内部无量纲状态变量, 且 $W(w) = a + b|w|$. (8) 式是一个四维常微分方程构成的忆阻自激振荡系统, 有 β , ω_0 和 μ 三个系统控制参数以及 a 和 b 两个忆阻内部参数. 在下面的分析中, 设置 $\beta = 0.5$, $\mu = 0.9$, $a = 1$ 和 $b = 0.1$, 选择基本振荡频率 ω_0 为忆阻自激振荡系统的唯一控制参数.

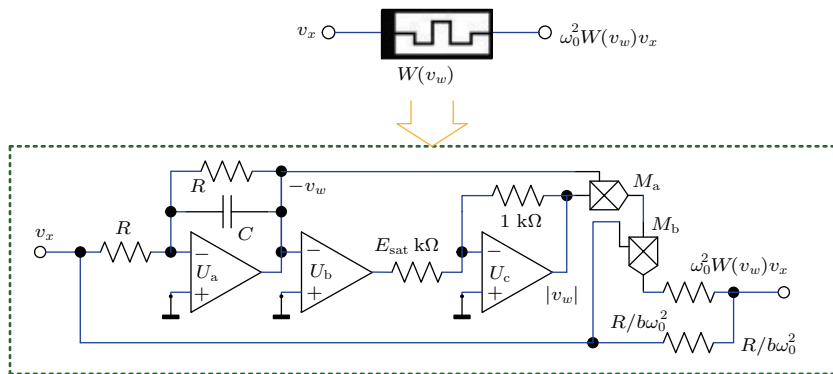


图 3 非理想压控忆阻等效实现电路
Fig. 3. Equivalent realization circuit of the non-ideal voltage-controlled memristor.

2.3 共存隐藏吸引子

当振荡频率 $\omega_0 = 2.035$ 时, 忆阻自激振荡系统 (8) 是混沌的, 可展示出两个隐藏混沌吸引子的共存现象, 在四个相平面上的投影如图 4 所示, 其

中红色轨迹表示从初始条件 $(2, 0, 0, 0)$ 出发的运行轨迹, 而蓝色轨迹则表示从初始条件 $(-2, 0, 0, 0)$ 出发的运行轨迹. 利用 Wolf 算法 [43] 计算下面导出的雅克比矩阵可得到, 共存的隐藏混沌吸引子有着相同的李雅普诺夫指数, 其 4 个值分别为:

$LE_1 = 0.0419$, $LE_2 = 0$, $LE_3 = -0.3705$ 和 $LE_4 = -1.2118$. 观察图 4 结果可知, 当共存吸引子现象发生时, 隐藏混沌吸引子的拓扑结构从原先对称的结

构变成了不对称的结构, 表示系统的运行轨迹从 x 坐标轴正、负值区域出发后无法穿越到另一个区域, 即系统的混沌吸引盆是相互独立而不连通的^[44].

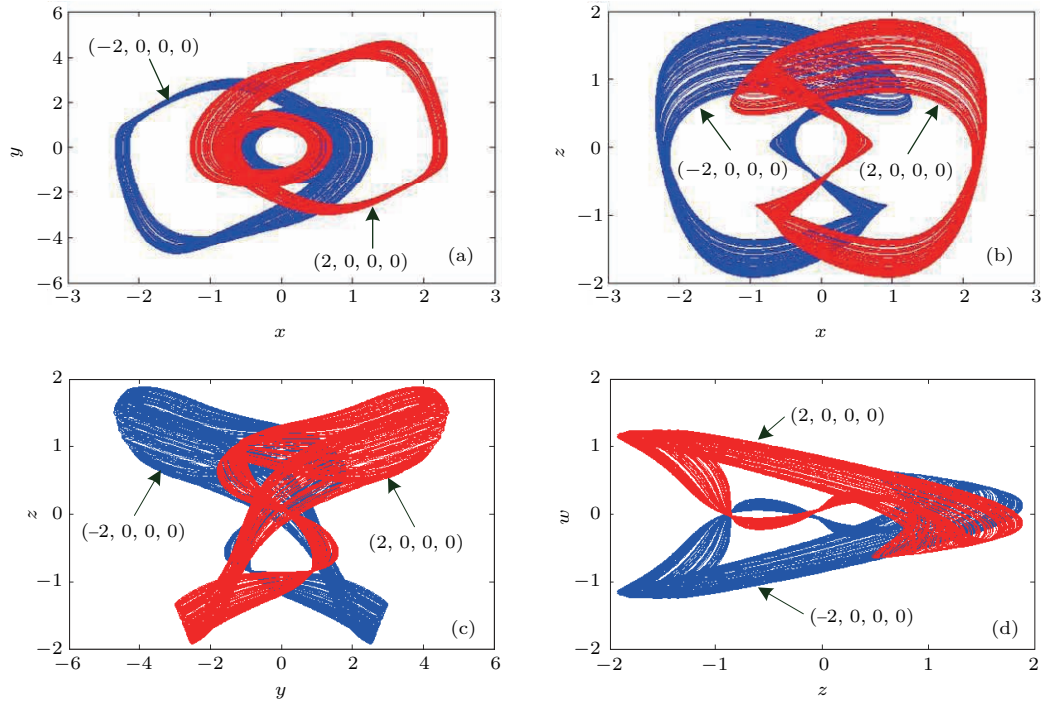


图 4 (网刊彩色) 数值仿真得到的共存混沌吸引子在各相平面上的相轨图 (a) 在 x - y 平面上; (b) 在 x - z 平面上; (c) 在 y - z 平面上; (d) 在 z - w 平面上

Fig. 4. (color online) Numerical simulated phase portraits of coexisting chaotic attractors in different phase planes: (a) In the x - y plane; (b) in the x - z plane; (c) in the y - z plane; (d) in the z - w plane.

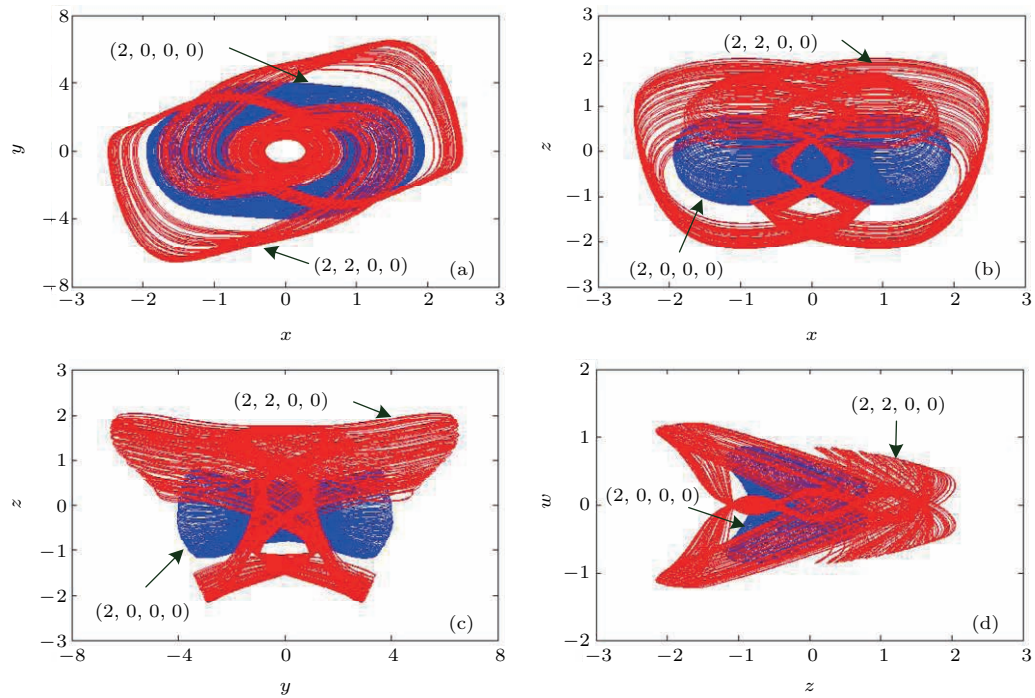


图 5 (网刊彩色) 数值仿真得到的共存准周期极限环与混沌吸引子在相平面上的相轨图 (a) 在 x - y 平面上; (b) 在 x - z 平面上; (c) 在 y - z 平面上; (d) 在 z - w 平面上

Fig. 5. (color online) Numerical simulated phase portraits of coexisting quasi-periodic limit cycle and chaotic attractor in different phase planes: (a) In the x - y plane; (b) in the x - z plane; (c) in the y - z plane; (d) in the z - w plane.

当振荡频率 $\omega_0 = 2.33$ 时, 忆阻自激振荡系统(8)或是混沌的, 或是准周期的, 完全取决于系统(8)的初始振荡条件. 共存的隐藏混沌吸引子与隐藏准周期极限环在4个相平面上的投影如图5所示, 其中红色混沌轨迹表示从初始条件(2, 2, 0, 0)出发的运行轨迹, 而蓝色准周期轨迹则表示从初始条件(2, 0, 0, 0)出发的运行轨迹. 相应地, 隐藏混沌吸引子的4个李雅普诺夫指数分别为: $LE_1 = 0.0479$, $LE_2 = 0$, $LE_3 = -0.3644$ 和 $LE_4 = -1.3535$, 而隐藏准周期极限环的4个李雅普诺夫指数分别为: $LE_1 = 0$, $LE_2 = 0$, $LE_3 = -0.0656$ 和 $LE_4 = -1.0443$. 图5结果表明, 从相空间中不同初始位置出发的运行轨迹存在了2种完全不同的稳定性, 即在相空间中有着相互独立的混沌吸引盆和准周期吸引盆^[41].

共存自激吸引子或自激多吸引子显示了系统存在双稳定性或多稳定性^[37], 在基于改进型压控忆阻的蔡氏电路^[42]和基于广义忆阻的Shinriki电路^[45]中都有发现. 尽管共存隐藏吸引子现象也已有文献作过详细报道^[28,29], 但忆阻混沌系统存在共存隐藏吸引子的例子尚属不多见.

3 隐藏动力学特性

3.1 基本动力学分析

由(8)式所描述的忆阻自激振荡系统是关于 z 坐标轴对称的, 其对称性可从在 $(x, y, z, w) \rightarrow (-x, -y, z, -w)$ 变换后系统的不变性得到.

令 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{w} = 0$, 显然(8)式不存在任何数学解, 即所提出的忆阻自激振荡系统无平衡点, 致使该系统所生成的周期极限环、准周期极限环或混沌吸引子都是隐藏的^[30].

容易导出(8)式的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ h_1 & h_2 & y & h_3 \\ -2x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

式中, $h_1 = (2x - 4\beta x^3)y - \omega_0^2(a + b|w|)$, $h_2 = z + x^2 - \beta x^4$ 和 $h_3 = -b\omega_0^2 x \text{sgn}(w)$. (9)式的特征

方程为

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - J) = 0. \quad (10)$$

基于(9)式, 利用Wolf算法^[43]可计算得到忆阻自激振荡系统的李雅普诺夫指数.

3.2 隐藏动力学行为

以振荡频率 ω_0 为分岔参数, 忆阻自激振荡系统状态变量 x 的分岔图及其相应的李雅普诺夫指数谱如图6所示. 在图6(a)中, 红色和蓝色轨迹表明从不同的状态变量初始条件出发的系统运行轨迹, 分别对应于初始条件(2, 0, 0, 0)和(-2, 0, 0, 0). 观察图6可知, 系统呈现了不同周期数的极限环、共存极限环、准周期极限环、混沌吸引子、共存混沌吸引子等复杂非线性行为. 特别地, 从图6(a)中可见, 忆阻自激振荡系统存在不规则的分岔模式共存现象, 借助相轨图的数值仿真, 存在吸引子共存现象的主要参数区域为 $1.64 \leq \omega_0 \leq 1.70$ 及 $2.03 < \omega_0 < 2.14$; 同时, 结合图6(b)可判断, 忆阻自激振荡系统存在宽范围的准周期振荡行为, 其参数区域为 $2.14 \leq \omega_0 < 2.40$ 及 $2.51 \leq \omega_0 \leq 2.6$, 相应的 LE_1 和 LE_2 均为0.

当 $\omega_0 = 1.4$ 时, 忆阻自激振荡系统处于周期2振荡态, $LE_1 = 0$. 当 $\omega_0 = 1.48$ 且增大时, 系统直接从周期态进入混沌态, $LE_1 > 0$, $LE_2 = 0$ 和 $LE_{3,4} < 0$; 当 $\omega_0 = 1.64$ 且逐步增大时, 系统因运行轨迹的对称性被破坏而进入了周期态继而混沌态的分岔共存模式, LE_1 和 LE_2 先分别回复到0值和负值, 然后又进入正值和0值. 分岔共存模式在 $\omega_0 = 1.70$ 后消失, 系统进入周期态, 状态变量 x , y 和 w 均以周期3态振荡, 而状态变量 z 以周期2态振荡. 在 $1.766 \leq \omega_0 < 1.91$ 内, 系统出现了多周期态与弱混沌态相互间杂的参数区间; 而在 $1.91 \leq \omega_0 < 2.04$ 内, 系统呈现特性相对稳定的混沌参数区间. 自 $\omega_0 = 2.03$ 以后逐步增大至2.13, 系统再次进入了分岔共存模式, 从共存的混沌吸引子经周期减半分岔进入了共存的周期2态, 并最终消失. 在此参数以后, 系统出现了准周期振荡行为, 但在 $2.40 \leq \omega_0 < 2.51$ 内, 系统以周期5振荡着. 在各分岔点之间选取具体的控制参数值, 系统在 $x-y$ 平面上的相轨图如图7所示.

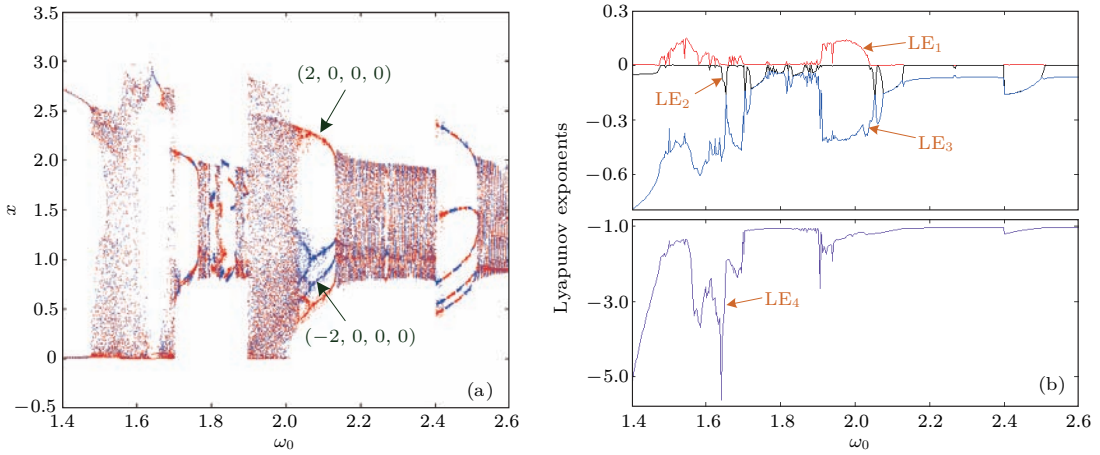


图6 (网刊彩色) 忆阻自激振荡系统的隐藏动力学 (a) 状态变量 x 的分岔图; (b) 李雅普诺夫指数谱
 Fig. 6. (color online) Hidden dynamics of memristive self-oscillated system: (a) Bifurcation diagrams of the state variable x ; (b) Lyapunov exponent spectra.

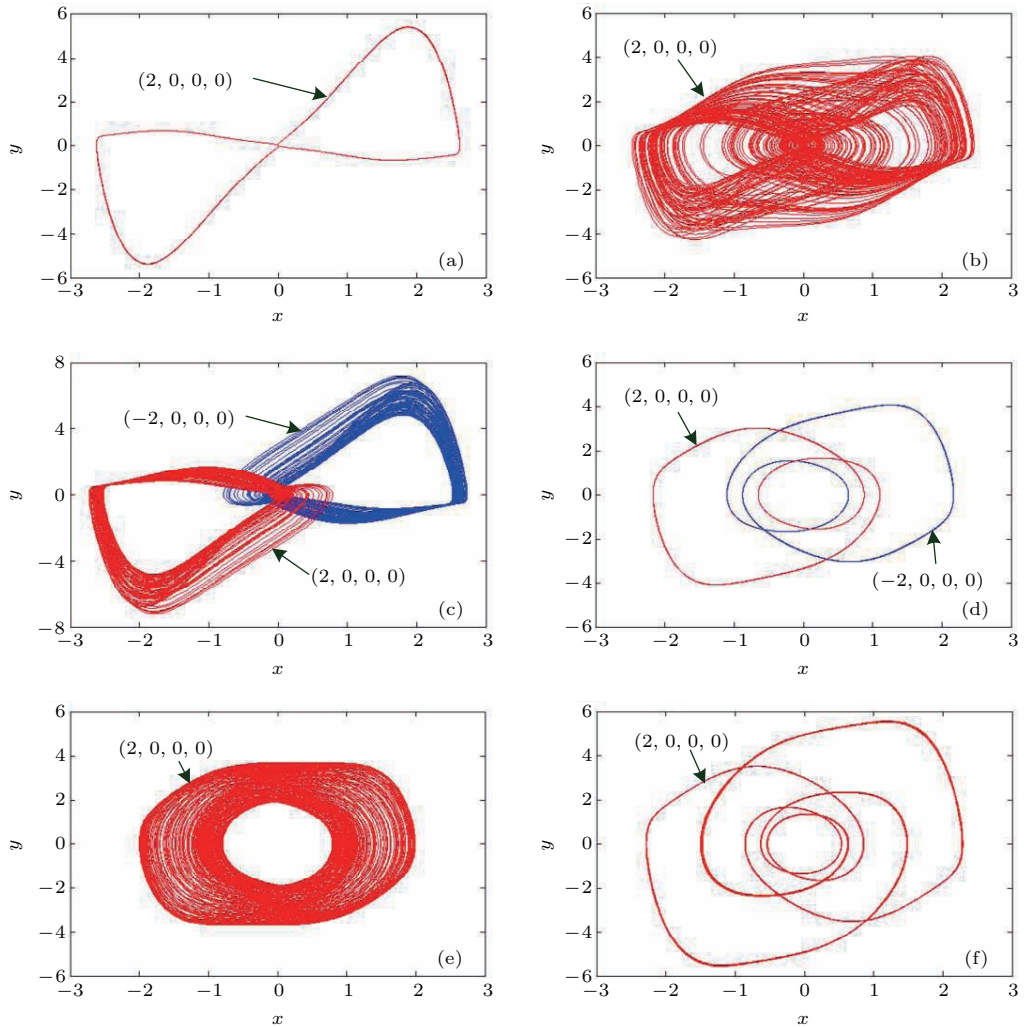


图7 (网刊彩色) 刻画隐藏动力学演化的在 $x-y$ 平面上的相轨图 (a) 周期2极限环 ($\omega_0 = 1.45$); (b) 混沌吸引子 ($\omega_0 = 1.55$); (c) 共存混沌吸引子 ($\omega_0 = 1.68$); (d) 共存周期2极限环 ($\omega_0 = 2.11$); (e) 准周期极限环 ($\omega_0 = 2.2$); (f) 周期5极限环 ($\omega_0 = 2.44$)
 Fig. 7. (color online) Phase portraits for depicting the evolutions of hidden dynamics in the $x-y$ plane: (a) Limit cycle with period-2 ($\omega_0 = 1.45$); (b) chaotic attractor ($\omega_0 = 1.55$); (c) coexisting chaotic attractor ($\omega_0 = 1.68$); (d) coexisting limit cycle with period-2 ($\omega_0 = 2.11$); (e) quasi-periodic limit cycle ($\omega_0 = 2.2$); (f) limit cycle with period-5 ($\omega_0 = 2.44$).

3.3 多稳定性与多吸引子

设定忆阻自激振荡系统的初始条件分别为 $(2, 0, 0, 0)$, $(-2, -2, 0, 0)$ 和 $(2, 2, 0, 0)$, 对应的运行轨迹分别用蓝色、青色和红色三种颜色标注. 当 ω_0 在 $[2.2, 2.6]$ 区间变化时, 三种不同初始条件的状态变量 x 的分岔图与初始条件为 $(2, 2, 0, 0)$ 的李雅

普诺夫指数谱如图 8 所示. 与图 6 数值仿真结果做比较, 明显地, 在 $2.314 \leq \omega_0 \leq 2.339$ 内, 系统的运行轨迹因初始条件的不同而出现了混沌、周期极限环、准周期极限环等不同的动力学行为, 且有着完全不同的李雅普诺夫指数谱. 图 8 结果进一步说明, 忆阻自激振荡系统是多稳定的, 可产生复杂的共存隐藏多吸引子现象.

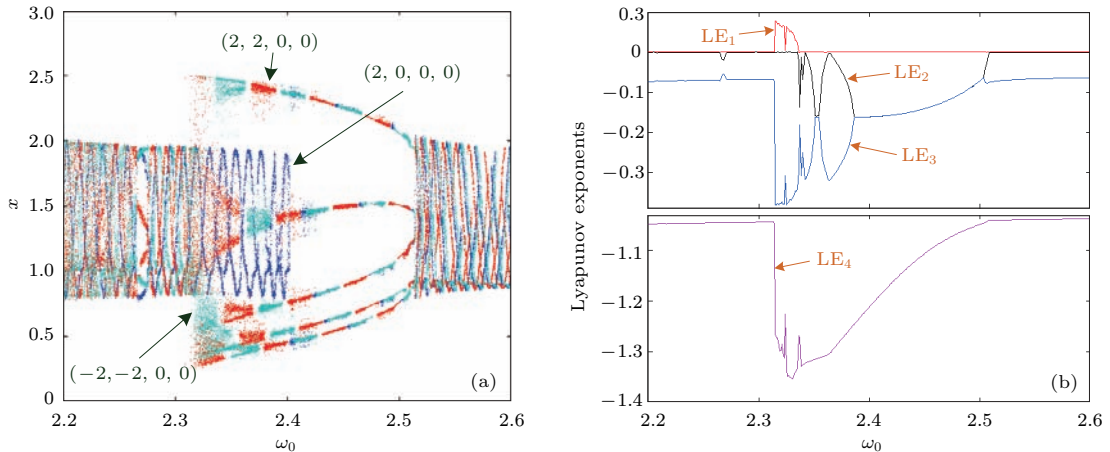


图 8 (网刊彩色) 具有多稳定性的忆阻自激振荡系统的隐藏动力学 (a) 初始条件分别为 $(2, 0, 0, 0)$, $(-2, -2, 0, 0)$ 和 $(2, 2, 0, 0)$ 的状态变量 x 的分岔图; (b) 初始条件为 $(2, 2, 0, 0)$ 的李雅普诺夫指数谱

Fig. 6. (color online) Hidden dynamics of memristive self-oscillated system with multistability: (a) Bifurcation diagrams of the state variable x under initial conditions $(2, 0, 0, 0)$, $(-2, -2, 0, 0)$, and $(2, 2, 0, 0)$, respectively; (b) Lyapunov exponent spectra under initial conditions $(2, 2, 0, 0)$.

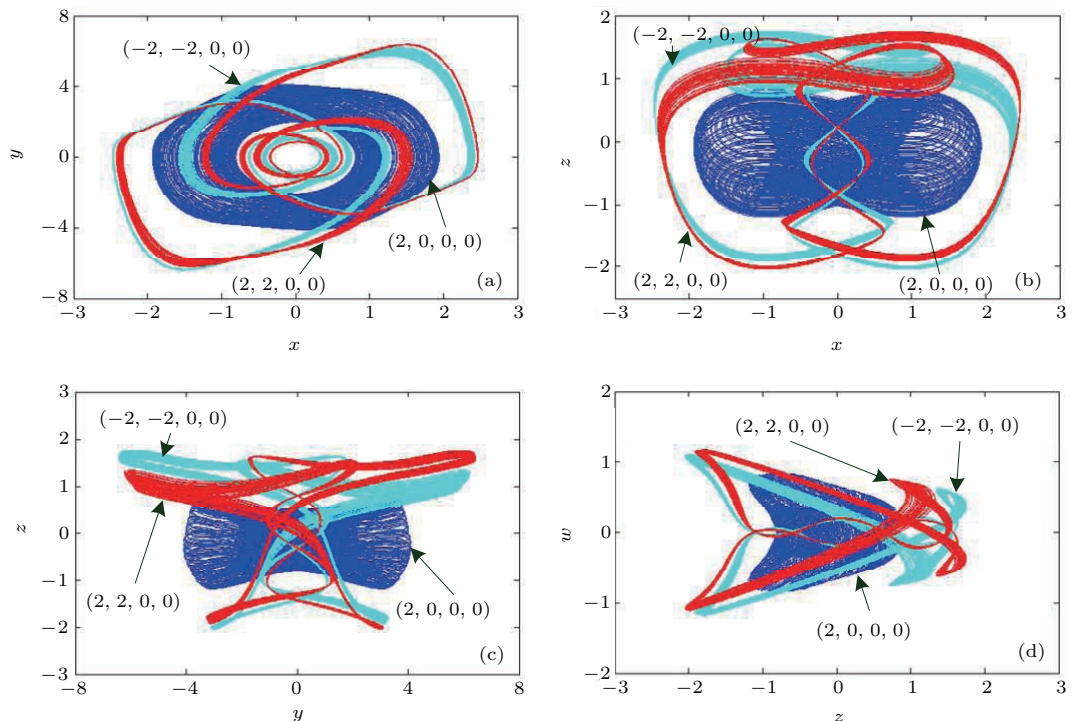


图 9 (网刊彩色) 准周期极限环与一对弱混沌吸引子共存的隐藏多吸引子 (a) 在 $x-y$ 平面上的相轨图; (b) 在 $x-z$ 平面上的相轨图; (c) 在 $y-z$ 平面上的相轨图; (d) 在 $z-w$ 平面上的相轨图

Fig. 9. (color online) Coexisting hidden multiple attractors of quasi-periodic limit cycle and a pair of weak chaotic attractors: (a) Phase portraits in the $x-y$ plane; (b) phase portraits in the $x-z$ plane; (c) phase portraits in the $y-z$ plane; (d) phase portraits in the $z-w$ plane.

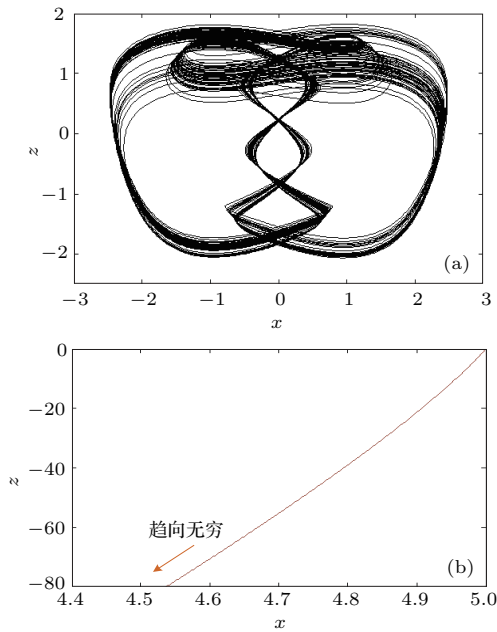


图10 在 $x-z$ 平面上初始条件分别为 $(-2, -4, -1, -1)$ 和 $(6, 0, 0, 0)$ 的相轨图 (a) 对称结构的隐藏弱混沌吸引子; (b) 运行轨迹发散

Fig. 10. Phase portraits under initial conditions $(-2, -4, -1, -1)$ and $(6, 0, 0, 0)$ in the $x-z$ plane: (a) Hidden weak chaotic attractors with symmetric structures; (b) the divergence of the moving trajectories.

当振荡频率 $\omega_0 = 2.35$ 时, 忆阻自激振荡系统 (8) 是多稳定的, 可展示出一个准周期极限环和

一对非对称结构的弱混沌吸引子共存的隐藏多吸引子现象, 如图9所示. 事实上, 当初始条件为 $(-2, -4, -1, -1)$ 时, 系统 (8) 显示出对称结构的隐藏弱混沌吸引子, 如图10(a)所示, 原先在图9中呈现的一对非对称结构的弱混沌吸引子完全消失; 而当初始条件为 $(6, 0, 0, 0)$ 时, 系统 (8) 的运行轨迹很快趋向无穷发散, 不能形成任何吸引子, 如图10(b)所示.

文献 [41] 在一种自激振荡系统中找到了由一个准周期极限环与一对混沌吸引子组成的3种类型的共存隐藏多吸引子, 而文献 [45] 则在一种忆阻混沌电路中发现了由一对单边混沌吸引子与一对非对称的周期3极限环组成的4种类型的共存自激多吸引子. 然而, 图9和图10的结果说明, 忆阻自激振荡系统 (8) 具有多达5种类型的共存隐藏多吸引子结构. 迄今为止, 尚未见有5种类型的共存隐藏多吸引子的相关文献报道.

4 实验测量

采用NI Multisim 12.0仿真和电路设计软件, 基于图2和图3所示的电路原理图, 忆阻自激振荡系统在典型参数下的电路仿真模型如图11所示, 其中, 参考电阻和参考电容分别选择为: $R = 10 \text{ k}\Omega$,

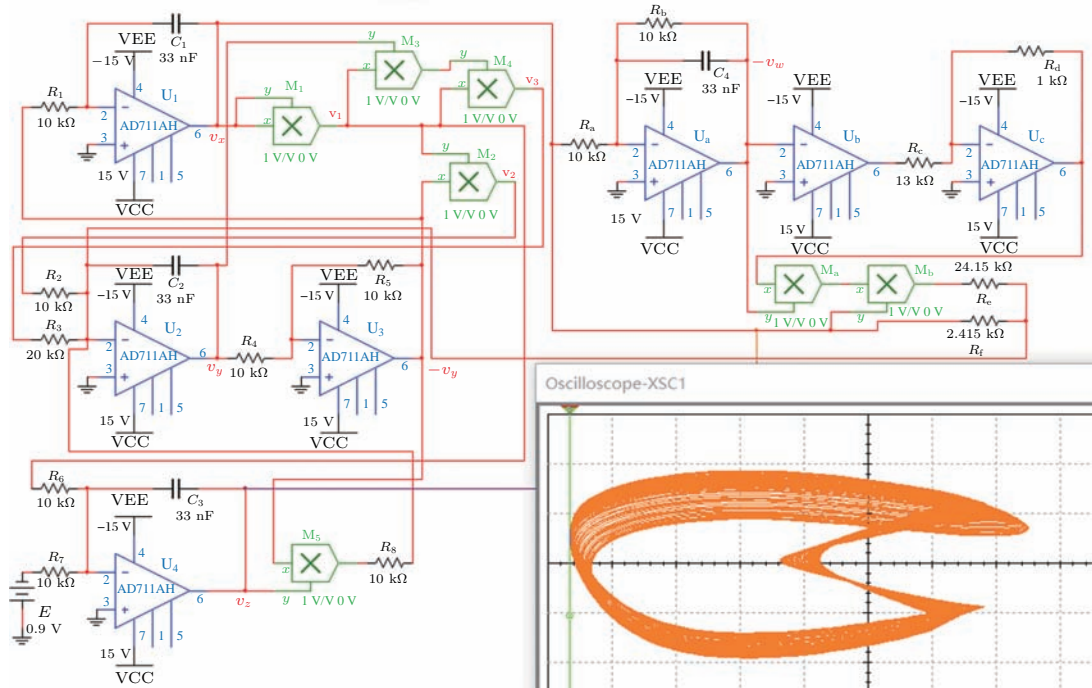


图11 Multisim 电路仿真模型与仿真相轨图, 电路左边为三维自激振荡系统, 右边为压控忆阻等效实现

Fig. 11. Multisim circuit simulation model and simulated phase portrait, where the left of the circuit is three-dimensional self-oscillated system and the right is the equivalent realization of voltage-controlled memristor.

$C = 33 \text{ nF}$. 此外, 电阻 R_e 和 R_f 是联动可调的, 其参数值分别为:

$$R_e = R/(b\omega_0^2), \quad R_f = R/(a\omega_0^2).$$

基于图 11 中的电路仿真模型, 容易在面包板上制作出忆阻自激振荡系统的硬件实验电路. 分立

元件选用金属膜电阻、精密可调电阻和独石电容, 分立器件选用供电电压为 $\pm 15 \text{ V}$ 的 AD711 AH 运算放大器和 AD633JNZ 模拟乘法器. 实验过程中, 由 Tektronix DPO3034 数字存储示波器完成实验波形捕捉.

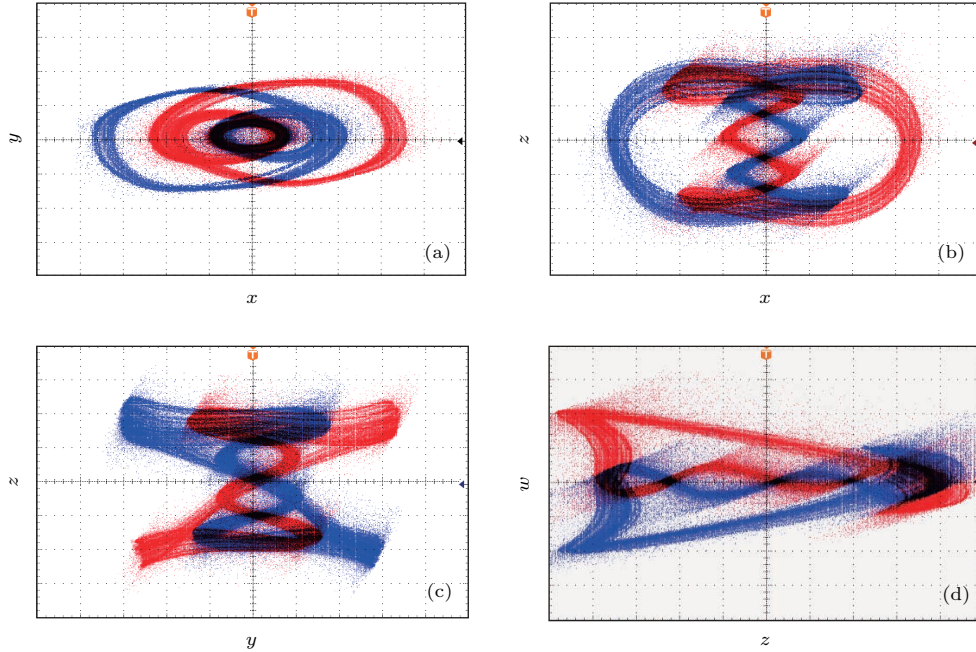


图 12 (网刊彩色) 实验捕捉到的共存混沌吸引子在 4 个相平面上的相轨图 (a) 在 v_x-v_y 平面上; (b) 在 v_x-v_z 平面上; (c) 在 v_y-v_z 平面上; (d) 在 v_z-v_w 平面上

Fig. 12. (color online) Experimental captured phase portraits of coexisting chaotic attractors in four phase planes: (a) In the v_x-v_y plane; (b) in the v_x-v_z plane; (c) in the v_y-v_z plane; (d) in the v_z-v_w plane.

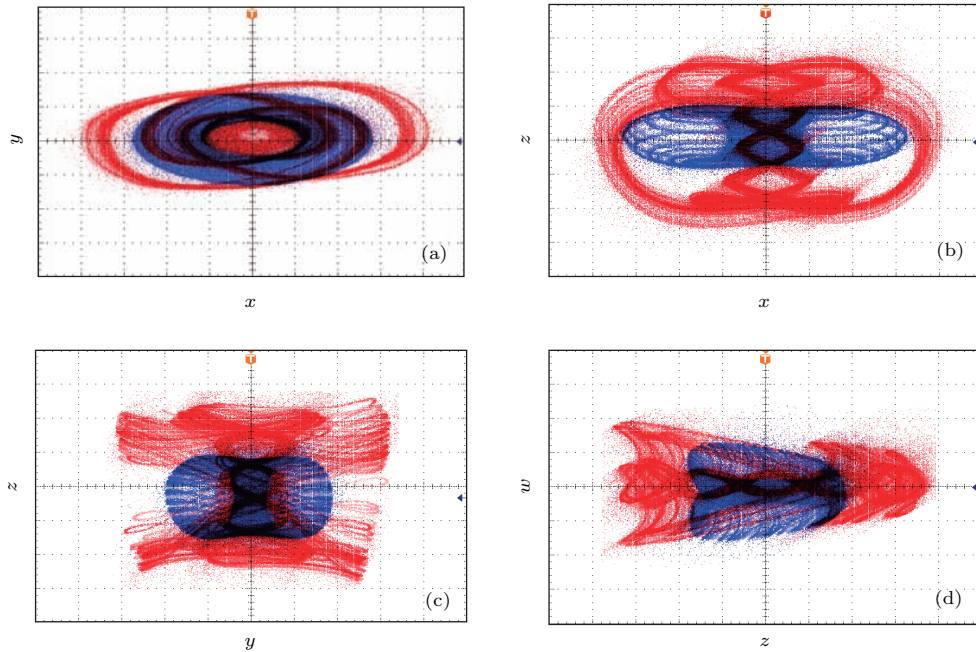


图 13 (网刊彩色) 实验测量捕捉的共存准周期极限环与混沌吸引子在 4 个相平面上的相轨图 (a) 在 v_x-v_y 平面上; (b) 在 v_x-v_z 平面上; (c) 在 v_y-v_z 平面上; (d) 在 v_z-v_w 平面上

Fig. 13. (color online) Experimental captured phase portraits of coexisting quasi-periodic limit cycle and chaotic attractor in four phase planes: (a) In the v_x-v_y plane; (b) in the v_x-v_z plane; (c) in the v_y-v_z plane; (d) in the v_z-v_w plane.

当 $\omega_0 = 2.035$ 时, 联动可调电阻的参数值分别固定为: $R_e = 24.15 \text{ k}\Omega$, $R_f = 2.415 \text{ k}\Omega$. 系统 (8) 是混沌的, 可展示出两个隐藏混沌吸引子的共存现象, 在四个相平面上的投影如图 12 所示, 其中红色轨迹和蓝色轨迹则表示从两个不同初始条件出发的运行轨迹, 可通过不断开启和关断系统电路的电源供电来实现.

当 $\omega_0 = 2.33$ 时, 联动可调电阻的参数值分别固定为: $R_e = 18.42 \text{ k}\Omega$, $R_f = 1.842 \text{ k}\Omega$. 系统 (8) 或是混沌的, 或是准周期的. 共存的隐藏混沌吸引子与隐藏准周期极限环在 4 个相平面上的投影如图 13 所示.

将图 12 和图 13 实验测量结果与图 4 和图 5 数值仿真结果做比较, 可发现两者有着较好的一致性, 由此验证了忆阻自激振荡系统的复杂动力学行为.

5 结 论

由压控忆阻替换文献报道的三维自激振荡系统的线性耦合电阻, 实现了一种新颖的、无平衡点的忆阻自激振荡系统. 无平衡点系统所生成的吸引子不同于自激吸引子, 其吸引盆与任何平衡点无关, 是一种新定义的、特殊的吸引子. 理论分析和数值仿真表明, 忆阻自激振荡系统可呈现周期、准周期、混沌等复杂隐藏动力学行为; 特别地, 不同初始条件时, 系统会出现不同拓扑结构混沌吸引子或准周期极限环与混沌吸引子的共存现象, 以及准周期极限环与多种拓扑结构混沌吸引子的多吸引子现象. 开展了实验电路验证, 测量结果较好地验证了理论分析和数值仿真结果.

参考文献

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [2] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [3] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcation Chaos* **9** 1465
- [4] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcation Chaos* **12** 659
- [5] Liu W B, Chen G R 2003 *Int. J. Bifurcation Chaos* **13** 261
- [6] Lü J H, Chen G R, Cheng D 2004 *Int. J. Bifurcation Chaos* **14** 1507
- [7] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Solitons Fractals* **22** 1031

- [8] Qi G Y, Chen G R, Du S Z, Chen Z Q, Yuan Z Z 2005 *Physica A* **352** 295
- [9] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2009 *J. Sys. Eng. Electron.* **20** 1179
- [10] Yu S M, Lü J H, Yu X H, Chen G R 2012 *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Regular Papers* **59** 1015
- [11] Bao B C, Zhou G H, Xu J P, Liu Z 2010 *Int. J. Bifurcation Chaos* **20** 2203
- [12] Peng Z P, Wang C H, Lin Y, Luo X W 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 240506 (in Chinese) [彭再平, 王春华, 林愿, 骆小文 2014 物理学报 **63** 240506]
- [13] Bao B C 2013 *An Introduction to Chaotic Circuits* (Beijing: Science Press) p68 (in Chinese) [包伯成 2013 混沌电路导论 (北京: 科学出版社) 第 68 页]
- [14] Chua L O 2012 *Proc. IEEE* **100** 1920
- [15] Wang G Y, He J L, Yuan F, Peng C J 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 110506
- [16] Bao B C, Hu F W, Liu Z, Xu J P 2014 *Chin. Phys. B* **23** 070503
- [17] Li Q D, Zeng H Z, Li J 2015 *Nonlinear Dyn.* **79** 2295
- [18] Li Z J, Zeng Y C, Li Z B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 010502 (in Chinese) [李志军, 曾以成, 李志斌 2014 物理学报 **63** 010502]
- [19] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Williams R S 2008 *Nature* **453** 80
- [20] Kim H, Sah M P, Yang C, Cho S, Chua L O 2012 *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Regular Papers* **59** 2422
- [21] Bao B C, Xu J P, Zhou G H, Ma Z H, Zou L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 120502
- [22] Wu H G, Bao B C, Chen M 2014 *Chin. Phys. B* **23** 118401
- [23] Wang X Y, Fitch A L, Iu H H C, Sreeramb V, Qi W G 2012 *Chin. Phys. B* **21** 108501
- [24] Corinto F, Ascoli A 2012 *Electron. Lett.* **48** 824
- [25] Bao B C, Yu J J, Hu F W, Liu Z 2014 *Int. J. Bifurcation Chaos* **24** 1450143
- [26] Leonov G A, Kuznetsov N V, Vagaitsev V I 2011 *Phys. Lett. A* **375** 2230
- [27] Leonov G A, Kuznetsov N V, Mokaev T N 2015 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **28** 166
- [28] Li C B, Sprott J C 2014 *Int. J. Bifurcation Chaos* **24** 1450034
- [29] Li Q D, Zeng H Z, Yang X S 2014 *Nonlinear Dyn.* **77** 255
- [30] Wei Z C 2011 *Phys. Lett. A* **376** 102
- [31] Sharma P R, Shrimali M D, Prasad A, Leonov G A, Kuznetsov N V 2015 *Int. J. Bifurcation Chaos* **25** 1550061
- [32] Zhao H T, Lin Y P, Dai Y X 2014 *Int. J. Bifurcation Chaos* **24** 1450080
- [33] Dang X Y, Li C B, Bao B C, Wu H G 2015 *Chin. Phys. B* **24** 050503
- [34] Xu Q, Lin Y, Bao B C, Chen M 2016 *Chaos, Solitons Fractals* **83** 186
- [35] Bao B C, Li Q D, Wang N, Xu Q 2016 *Chaos* **26** 043111
- [36] Pisarchik A N, Feudel U 2014 *Phys. Rep.* **540** 167

- [37] Patel M S, Patel U, Sen A, Sethia G C, Hens C, Dana S K 2014 *Phys. Rev. E* **89** 022918
- [38] Bao B C, Xu Q, Bao H, Chen M 2016 *Electron. Lett.* **52** 1008
- [39] Kuznetsov A P, Kuznetsov S P, Stankevich N V 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** 1676
- [40] Kuznetsov A P, Kuznetsov S P, Mosekilde E, Stankevich N V 2013 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **222** 2391
- [41] Kuznetsov A P, Kuznetsov S P, Mosekilde E, Stankevich N V 2015 *J. Phys. A* **48** 125101
- [42] Chen M, Yu J J, Bao B C 2015 *Electron. Lett.* **51** 462
- [43] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285
- [44] Bao B C, Wang C L, Wu H G, Qiao X H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 240504 (in Chinese) [包伯成, 王春丽, 武花干, 乔晓华 2014 物理学报 **63** 240504]
- [45] Kengne J, Tabekoueng Z N, Tamba V K, Negou A N 2015 *Chaos* **25** 103126

Hidden attractor and its dynamical characteristic in memristive self-oscillating system*

Bao Han Bao Bo-Cheng[†] Lin Yi Wang Jiang Wu Hua-Gan

(School of Information Science and Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

(Received 8 May 2016; revised manuscript received 6 June 2016)

Abstract

The classical attractors, defined as self-excited attractors, such as Lorenz attractor, Rössler attractor, Chua's attractor and many other well-known attractors, are all excited from unstable index-2 saddle-foci, namely, an attractor with an attraction basin corresponds to an unstable equilibrium. A new type of attractors, defined as hidden attractors, was first found and reported in 2011, whose attraction basin does not intersect with small neighborhoods of the equilibria of the system. Due to the existences of hidden attractors, some particular dynamical systems associated with line equilibrium, or no equilibrium, or stable equilibrium have attracted much attention recently. Additionally, by introducing memristors into existing oscillating circuits or substituting nonlinear resistors in classical chaotic circuits with memristors, a variety of memristor based chaotic and hyperchaotic circuits are simply established and has been broadly investigated in recent years. Motivated by these two considerations, in this paper, we present a novel memristive system with no equilibrium, from which an interesting and striking phenomenon of coexistence of the behaviors of hidden multiple attractors and the corresponding multistability is perfectly demonstrated by numerical simulations and experimental measurements.

According to a newly proposed circuit realization scheme, a new type of four-dimensional memristive self-oscillated system is easily implemented by directly replacing a linear coupling resistor in an existing three-dimensional self-oscillated system circuit with a voltage-controlled memristor. The proposed system has no equilibrium, but can generate various hidden attractors including periodic limit cycle, quasi-periodic limit cycle, chaotic attractor, and coexisting attractors and so on. Based on bifurcation diagram, Lyapunov exponent spectra, and phase portraits, complex hidden dynamics with respect to a system parameter of the memristive self-oscillated system are studied. Specially, when different initial conditions are used, the system displays the coexistence phenomenon of chaotic attractors with different topological structures or quasi-periodic limit cycle and chaotic attractor, as well as the phenomenon of multiple attractors of quasi-periodic limit cycle and chaotic attractors with multiple topological structures. The results imply that some coexisting hidden multiple attractors reflecting the emergences of multistability can be observed in the proposed memristive self-oscillated system, which are well illustrated by several conventional dynamical analysis tools. Based on PSIM circuit simulation model, the memristive self-oscillated system is easily made in at a hardware level on a breadboard and two kinds of dynamical behaviors of coexisting hidden multiple attractors are captured in hardware experiments. Hardware experimental measurements are consistent with numerical simulations, which demonstrates that the proposed memristive self-oscillated system has very abundant and complex hidden dynamical characteristics.

Keywords: memristive self-oscillated system, hidden attractor, dynamical characteristic

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.65.180501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51277017), the Natural Science Foundation of the Higher Education Institutions of Jiangsu Province, China (Grant No. 15JKB510001), and the Basic Research Foundation of Changzhou, China (Grant No. CJ20159026).

[†] Corresponding author. E-mail: mervinbao@126.com