

非自治分数阶 Duffing 系统的激变现象

刘晓君 洪灵 江俊

Crises in a non-autonomous fractional-order Duffing system

Liu Xiao-Jun Hong Ling Jiang Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 180502 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.180502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.180502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I18>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于忆阻器反馈的 Lorenz 超混沌系统及其电路实现

Memristor-based Lorenz hyper-chaotic system and its circuit implementation

物理学报.2016, 65(19): 190502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.190502>

局部不均匀性对时空系统振荡频率的影响

Oscillatory frequencies in spatiotemporal system with local inhomogeneity

物理学报.2016, 65(15): 150503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.150503>

有限理性视野下网络交通流逐日演化规律研究

Day-to-Day dynamical evolution of network traffic flow under bounded rational view

物理学报.2016, 65(15): 150502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.150502>

部分时滞诱发 Watts-Strogatz 小世界神经网络产生随机多共振

Stochastic multi-resonance induced by partial time delay in a Watts-Strogatz small-world neuronal network

物理学报.2016, 65(12): 120502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.120502>

多平衡态下簇发振荡产生机理及吸引子结构分析

Mechanism of bursting oscillations with multiple equilibrium states and the analysis of the structures of the attractors

物理学报.2016, 65(9): 090501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.090501>

非自治分数阶 Duffing 系统的激变现象*

刘晓君^{1)2)†} 洪灵²⁾ 江俊²⁾

1) (西北农林科技大学理学院, 杨凌 712100)

2) (西安交通大学, 机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

(2016年2月20日收到; 2016年7月1日收到修改稿)

对一个非自治分数阶 Duffing 系统的激变现象进行了研究. 首先介绍了一种研究分数阶非线性系统全局动力学的数值方法, 即拓展的广义胞映射方法 (EGCM). 该方法是基于分数阶导数的短记忆原理, 并结合了广义胞映射方法和改进的预估校正算法, 根据胞空间的特点, 将胞尺寸作为截断误差的参考值, 以此得到了一步映射时间的估算公式. 用 EGCM 方法分别研究了分数阶 Duffing 系统随分数阶导数的阶数和外激励强度变化发生的边界激变和内部激变. 并基于此, 将激变拓展定义为混沌基本集与周期基本集之间的碰撞, 其中混沌基本集包括混沌吸引子, 边界上的混沌集合以及吸引域内部的非混沌吸引子的混沌集合. 所得结果进一步说明了 EGCM 方法对于分析分数阶系统全局动力学的有效性.

关键词: 关键词分数阶系统, 混沌, 激变

PACS: 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.65.180502

1 引言

分数阶微积分是将整数阶微积分推广到任意阶的一种微积分. 早在 1695 年, Leibniz 和 L'Hospital 两位大数学家在信件中就谈及分数阶微积分的问题. 从此, 分数阶微积分开始进入人们的视野. 由于分数阶微积分缺乏明确的物理意义, 因此在初期时发展较为缓慢, 主要在纯数学领域内被人们研究. 直到 1974 年, Oldham 和 Spanier^[1] 合著的第一部有关分数阶微积分的专著《应用分数阶微积分》拉开了分数阶微积分应用的大幕. 20 世纪 70 年代 Mandelbrot^[2] 指出了自然界中存在着大量分数维的事实, 从此分数阶微积分理论得到了迅猛发展, 各种应用分数阶微积分的实例大量涌现^[3-9].

非线性动力学的分岔和混沌的研究一直是非线性科学领域中最活跃的研究前沿问题^[10-13]. 混沌是非线性动力系统一种特殊现象, 它的产生往往

是由于分岔引起的, 如周期倍分岔、准周期环面破裂等道路是混沌产生的重要途径. 对于混沌系统, 往往会发生激变, 这是一种非常独特的分岔现象, 主要指混沌吸引子的突然消失或者出现的问题, 这种变化在非线性动力学系统中普遍存在^[14]. 按照激变所导致的混沌吸引子不连续变化的性质, 常见的激变分为边界激变和内部激变. 边界激变是由混沌吸引子和其所在的吸引域边界上的不稳定周期轨道发生碰撞而引起的, 导致混沌吸引子突然消失. 内部激变是由混沌吸引子和其吸引域内部的不稳定周期轨道发生碰撞而导致的, 这种激变会引起混沌吸引子的突然扩张.

胞映射方法是 20 世纪 80 年代由 Hsu 提出的, 其基本思想是将连续的相空间转化为离散的胞状态空间, 动力系统相应地转化为胞映射动力系统, 通过研究胞和胞之间的转移关系完成对原动力系统全局动力学的研究^[15]. 一直以来, 胞映射方法在整数阶系统的全局动力学和分岔分析上, 取得了丰富的成果^[16-25]. 但对于分数阶系统的全局动力学

* 国家自然科学基金 (批准号: 11332008) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: flybett3952@126.com

来说,一直没有合适的数值算法对其进行研究.究其原因主要是因为分数阶微积分的算子是全局算子,具有记忆累积性;而Markov链是无后效性的,即无记忆性.因此使得分数阶系统的演化不能用Markov链来描述.所以,对于分数阶系统的动力学目前只限于对单个或者有限几个初值的稳态归属问题的研究,而关于分数阶系统的全局动力学研究鲜有报道.综合以上原因,基于广义胞映射方法和短记忆原理,在文献[26]中提出一种研究分数阶系统的全局动力学的数值方法,即EGCM.本文利用该方法,研究了非自治分数阶Duffing系统的激变现象.

2 拓展的广义胞映射方法 [26]

2.1 短记忆原理

众所周知,传统的微分算子是局部算子,而分数阶微分的算子是非局部算子.所谓的非局部性质就是指系统的下一个状态不仅依赖于它的当前状态,而且依赖于从初值点出发的所有状态.这个性质使得分数阶微积分更适合描述实际问题,也是其越来越受到人们重视的主要原因,但同时也给数值计算带来了一定的困难.

考虑下面的分数阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} D_*^q x(t) = \frac{d^q x(t)}{dt^q} = f(t, x(t)), \\ x^{(k)}(0) = x_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, [q] - 1, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $[q]$ 表示不小于 q 的最小整数, $x^{(k)}$ 表示 k 阶常规导数, D_*^q 表示 Caputo 定义的分数阶微分算子.

(1) 式等价于下面的沃尔泰拉积分方程 [27,28]:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{[q]-1} x_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (2)$$

当阶数 $q \in (0, \infty)$, 因分数阶微分算子的非局部性质所产生的项是 [28]

$$\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_n} [(t_{n+1}-\tau)^{q-1} - (t_n-\tau)^{q-1}] f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad q \in (0, \infty). \quad (3)$$

实际上,如果 $q \in (0, 2)$ 时, (3) 式的积分将随着时间 t 的增加而迅速地衰减 [28].

在文献 [27] 中, Podlubny 为 Riemann-Liouville 分数阶导数提出了定长度积分记忆原理,该原理与短记忆原理的思想是相同的,只是针对不同的分数阶导数而言,当积分长度固定为 T 时的截断误差为 $E < MT^{-q}/[\Gamma(1-q)]$, 可以选择适当的 T 使得它满足我们的截断误差要求.对于 Caputo 定义的导数,在文献 [28] 中,作者详细地分析了短记忆原理对该类型的分数阶导数的适用性,指出当选择积分长度为 T , 并保证 $t_n > T$ (t_n 为整个积分区间长度), 则产生的截断误差为 $E < MT^{q-1}h/\Gamma(q)$. 对于任意给定的全局误差界 E_{global} 或者局部误差界 E_{local} , 只需要选择合适的积分长度 T 使得

$$\frac{M}{\Gamma(q)} T^{q-1} < E_{\text{global}} \quad \text{或} \quad \frac{M}{\Gamma(q)} T^{q-1} h < E_{\text{local}}, \quad q \in (0, 1). \quad (4)$$

从 (4) 式中可以看到积分长度的选取不依赖整个积分区间长度,即与整个积分区间长度无关.

2.2 方法描述

考虑一个分数阶系统,可表示为:

$$\begin{aligned} D^q \mathbf{X} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \boldsymbol{\mu}), \\ \mathbf{X} &\in \mathbb{R}^K, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_K)$ 是阶数的向量,并且 $q_i \in (0, 1)$. \mathbf{X} 是 K 维的状态向量, $\boldsymbol{\mu}$ 是 N 维参数向量, \mathbf{F} 是关于 \mathbf{X} , 和 $\boldsymbol{\mu}$ 的向量函数.假设 $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \boldsymbol{\mu})$ 已经满足 Lipschitz 条件以保证方程解的惟一性.

一般来说,选取一个有界的区域 $D \subset \mathbb{R}^K$ 作为我们要考察的区域,每一个状态变量 x_i , ($x_i \in X, 1 \leq i \leq K$) 都被分割成长度为 s_i 的小区间,那么这 K 维的几何体就作为状态胞.对于任意一个胞,其编号为 $j, 1 \leq j \leq N_c$. 则状态空间中余下的部分整体作为一个陷胞,则胞的总数为 $N_c + 1$.

构造胞状态空间后,采取均匀采样法,对其中每一个状态胞都取 N_p 个采样点.对每一个采样点,它的映射像点都通过改进的预估校正算法得到.而且,因分数阶微分算子的非局部性质,用短记忆原理保证分数阶微分方程的演化可以用 Markov 链来表示.根据短记忆原理,积分长度 T 的选取不依赖整个积分区间长度,则其自然可以作为 EGCM 的一步映射时间,并可以通过 (4) 式计算得到.然而,

(4) 式是建立在仅一个初值的问题上, 通过该式计算得到的 T 并不适合全局分析. 基于胞状态空间的性质, 如果截断误差小于胞尺寸 C_{size} 的一半, 即 $MT^{q-1}h/\Gamma(q) < C_{\text{size}}/2$, 在这样的条件下的截断误差可以保证 EGCM 的计算精度和准确性. 因此, 一步映射时间 T 可以通过下面的式子得到:

$$T > \left(\frac{2Mh}{\Gamma(q)C_{\text{size}}} \right)^{\frac{1}{1-q}}. \quad (6)$$

注解 1 根据胞空间的特点, 函数 M 的值取为参考域 D 中轨线所能达到的最大绝对值. h 为积分步长, 从 (4) 式可以看到随着积分步长 h 的增加, 截断误差 E 变大. 同时, 积分步长太大, 则不能准确地描述系统的运动行为, 太小的积分步长则使得一步映射时间太小而不能满足 EGCM 对映射时间的要求. 所以选择合适的积分步长需经过几次或者多次试验. 当 $K \geq 2$ 时, 胞尺寸 $C_{\text{size}} = \min\{s_1, s_2, \dots, s_K\}$.

注解 2 在 (6) 式中, 当阶数 q 接近 1 时, 式中的 $1/(1-q)$ 趋近无穷大, 这使得一步映射时间过大或者过小, 因而得不到合理的映射时间. 在这种情况下, (6) 式不能用来估算映射时间. 在文献 [29] 中, 作者的研究表明当两个分数阶微分方程具有相近阶数时, 它们具有相近的解. 因此, 在这种情况下, 映射时间取为 2π 的整数倍或者外激励周期的整数倍, 这与广义胞映射方法一致.

注解 3 除了注解 2 的情况外, 对于阶数可约的分数阶系统, EGCM 的一步映射时间可根据 (6) 式来计算. 对于不可约的分数阶系统, 映射时间 T 满足

$$T > \max_{q_i \neq 1} \left\{ \left(\frac{2Mh}{\Gamma(q_i)C_{\text{size}}} \right)^{\frac{1}{1-q_i}}, i = 1, 2, \dots, K \right\}, \quad (7)$$

特别地, 当分数阶系统存在阶数为 1 的方程时, 一步映射时间 T 则由非 1 的阶数计算得到.

对于 EGCM 方法, Markov 链的一步转移概率矩阵是通过改进的预估校正法得到. 利用 Markov 链, 一个分数阶系统的 EGCM 可以表示为

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{P}\mathbf{p}(n) \text{ 或 } \mathbf{p}(n) = \mathbf{P}^n\mathbf{p}(0), \quad (8)$$

其中 \mathbf{P} 表示一步转移概率矩阵, \mathbf{P}^n 表示 n 步转移概率矩阵, $\mathbf{p}(0)$ 表示初始概率分布向量, $\mathbf{p}(n)$ 表示 n 步概率分布向量. 一步转移概率矩阵的元素 p_{ij}

代表了从胞 j 到胞 i 的一步转移概率. 同理, n 步转移概率矩阵 \mathbf{P}^n 的元素 $p_{ij}^{(n)}$ 从胞 j 到胞 i 的 n 步转移概率. 利用 EGCM 系统 (8), 一个分数阶系统的全局动力学行为可以通过 EGCM 来确定. 对于该方法的更多细节, 读者可参考文献 [26].

3 数值仿真

非自治分数阶 Duffing 系统描述如下:

$$\begin{cases} D^{q_1}x_1 = x_2, \\ D^{q_2}x_2 = x_1 - x_1^3 - \alpha x_2 + \delta \cos(\omega t), \end{cases} \quad (9)$$

其中 q_1, q_2 为分数阶数, α, δ, ω 为系统参数.

取参考区域为 $D = \{-2 \leq x_1 \leq 2, -1.5 \leq x_2 \leq 1.5\}$, 划分成 201×201 状态胞, 每个胞中取采样点为 10×10 . 取 $h = 0.005, M = 2, C_{\text{size}} = \min\{s_1, s_2\} = 3/201$, 则有

$$T > \left(\frac{2Mh}{\Gamma(q_1)C_{\text{size}}} \right)^{\frac{1}{1-q_1}} \approx 9.61. \quad (10)$$

对于系统 (9), 其一步映射时间 T 应为外激励周期的倍数, 因此一步映射时间取为 4π . 在文献 [30] 中, 当阶数为 $q_1 = 0.9, q_2 = 1$, 参数为 $\alpha = 0.15, \delta = 0.3, \omega = 1$, 系统 (9) 存在混沌吸引子. 利用 EGCM 法, 得到系统的混沌吸引子 (黑色), 相应的吸引域 (灰色), 见图 1, 所得结果与文献中一致, 同时得到了吸引子的吸引域.

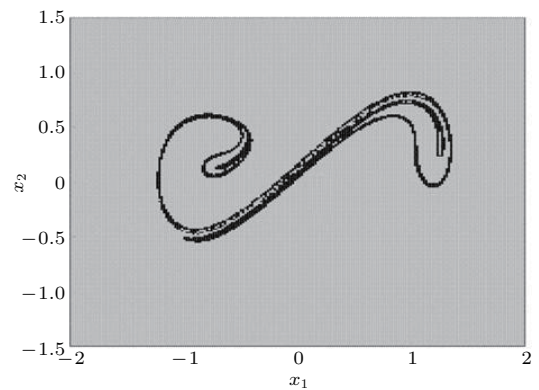


图 1 系统 (9) 的吸引子和吸引域

Fig. 1. The chaotic attractor and basin of attraction of the system (9).

3.1 随阶数 q 的变化

在本节中, 将研究系统 (9) 随阶数变化时的全局动力学问题. 当系统阶数为 $q_1 = q_2 = q$, 得到两

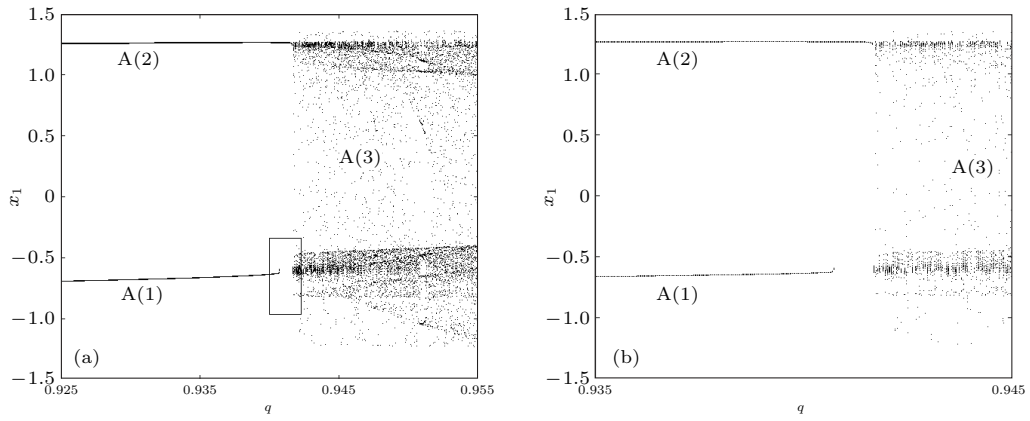


图2 系统(9)随阶数 q 变化的分岔图 (a) $q \in [0.925, 0.955]$; (b) $q \in [0.935, 0.945]$

Fig. 2. The bifurcation diagram of the system (9) with the variation of the order q : (a) $q \in [0.925, 0.955]$; (b) $q \in [0.935, 0.945]$.

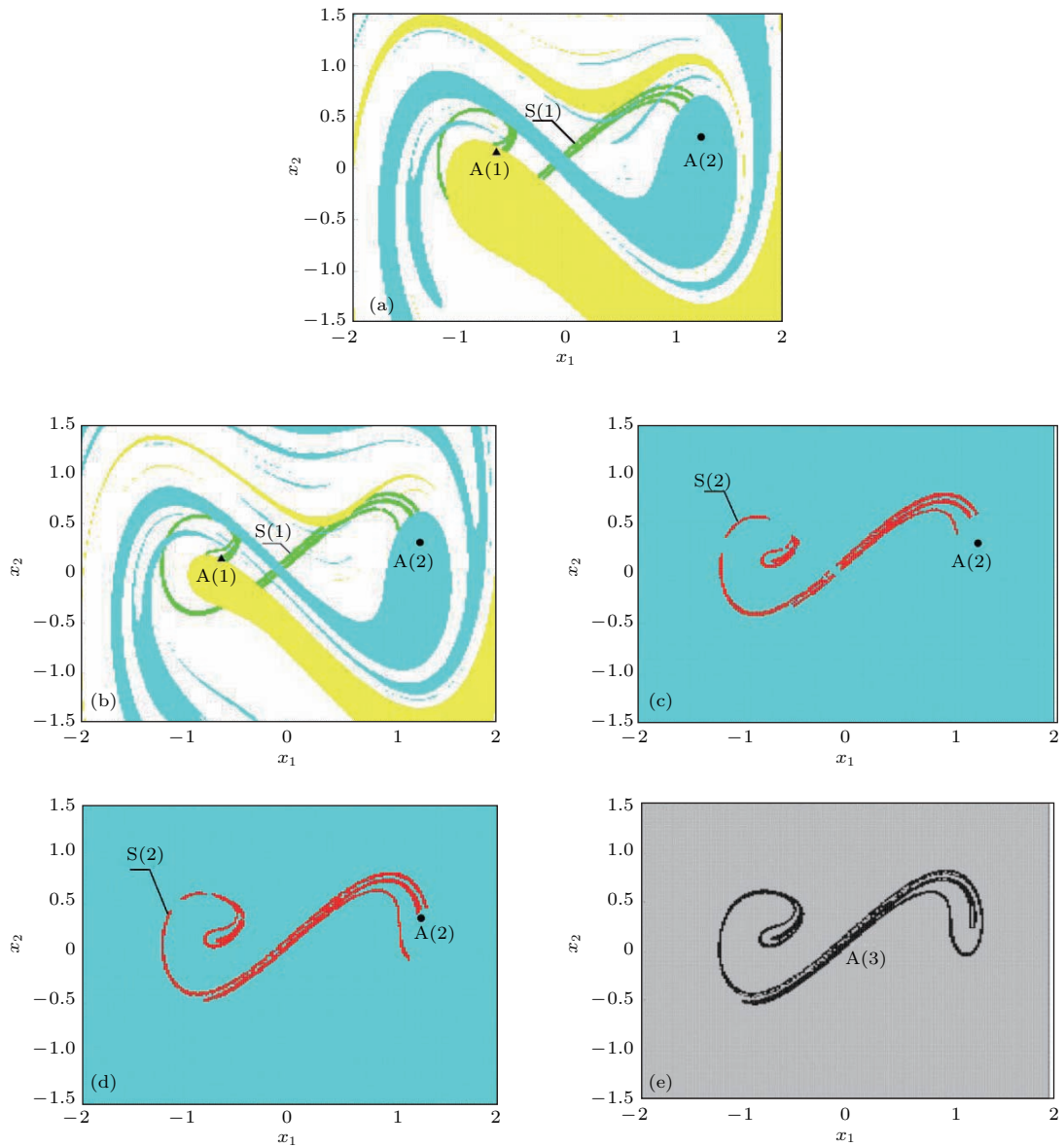


图3 (网刊彩色) 系统(9)随阶数 q 变化的全局动力学 (a) $q = 0.932$; (b) $q = 0.936$; (c) $q = 0.937$; (d) $q = 0.943$; (e) $q = 0.944$

Fig. 3. (color online) The global dynamics of the system (9) with the variation of the order q : (a) $q = 0.932$; (b) $q = 0.936$; (c) $q = 0.937$; (d) $q = 0.943$; (e) $q = 0.944$.

个初值情况下, 系统随阶数 q 变化的分岔图见图 2. 从图 2(a) 中可以看到, 阶数大约在 $q \leq 0.943$ 时, 系统为周期运动, 存在两个周期吸引子 A(1) 和 A(2). 图中的方框区域中吸引子 A(1) 随着阶数的增加突然消失, 系统此时只存在一个周期吸引子 A(2), 见图 2(b). 当阶数通过临界值 0.943 时, 系统进入了混沌运动.

图 2 作为局部分岔图并不能反映吸引子 A(1) 如何消失以及系统进入混沌的机理, 所以我们利用 EGCM 方法, 得到系统随阶数 q 变化的全局动力学, 如图 3. 下文中为了统一起见, 用黑色表示吸引子, 蓝绿色、黄色以及灰色表示吸引域. 用白色表示边界, 绿色表示边界上的鞍, 红色表示吸引域内部的鞍.

当 $q = 0.932$ 时, 两个周期吸引子 A(1), A(2) 和一个在边界上的混沌鞍 S(1) 共存, 对应的吸引域和边界见图 3(a). 随着阶数从 0.932 增加到 0.936, 两个吸引域的尺寸都在减小, 而混沌鞍 S(1) 逐渐变大, 见图 3(b).

当阶数 q 从 0.936 增加到 0.937, 吸引子 A(1) 与混沌鞍 S(1) 发生碰撞, 即系统发生了边界激变. 这使得 A(1) 连同其吸引域以及鞍 S(1) 突然消失, 同时吸引域内出现了一个新的混沌鞍 S(2), A(1) 和 S(1) 成为 S(2) 的一部分, 见图 3(c). 此时, 相空间中为周期吸引子 A(2) 和一个混沌鞍 S(2) 共存. 随着阶数的继续增加, 混沌鞍 S(2) 逐渐靠近吸引子 A(2).

当 q 从 0.943 增加到 0.944 时, 吸引子 A(2) 与混沌鞍 S(2) 在吸引域内部发生碰撞, 系统发生了内部激变. 混沌鞍 S(2) 突然消失, 同时周期吸引子 A(2) 变成了一个混沌吸引子 A(3), 见图 3(d) 和图 3(e).

3.2 随外激励强度 f 变化

本节研究系统 (9) 随外激励强度 f 变化的全局分岔. 固定阶数 $q_1 = 0.9, q_2 = 1$, 得到系统在两个初值情况下随 f 变化的分岔图, 见图 4. 可以看到当 $f < 0.29$ 时, 系统为周期运动. 当参数大于临界值 0.29 时, 进入混沌运动. 借助 EGCM 方法, 系统随 f 变化的全局动力学, 见图 5.

当 $f = 0.285$ 时, 相空间中为两个周期吸引子 A(1), A(2) 和一个分形边界上的混沌鞍 S(1) 共存.

同时得到了对应的吸引域和边界, 见图 5(a). 随着 f 的增大, 两个吸引域的尺寸都在减小.

当 f 从 0.288 增加到 0.289 时, 吸引子 A(2) 与混沌鞍 S(1) 碰撞, 系统发生了边界激变. 吸引子 A(2) 连同其吸引域以及混沌鞍 S(1) 突然消失, 相空间中为周期吸引子 A(1) 和一个新的混沌鞍 S(2) 共存, 见图 5(b) 和图 5(c).

当 f 从 0.289 增加到 0.290 时, 吸引域内部的混沌鞍 S(2) 与吸引子 A(1) 发生碰撞, 系统发生了内部激变. 混沌鞍 S(2) 突然消失, 吸引子 A(1) 变成了一个混沌吸引子 A(3), 见图 5(d).

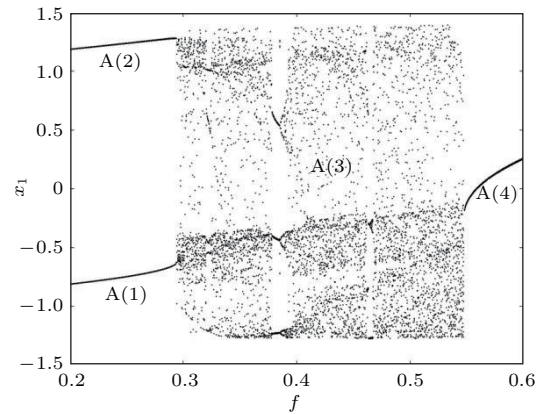


图 4 系统 (9) 随 f 变化的分岔图

Fig. 4. The bifurcation diagram of the system (9) with the variation of the parameter f .

从图 4 中可以看到, 当 f 大于 0.54 后, 系统再次进入周期运动窗口. 利用 EGCM, 得到当 $f = 0.539$ 时, 在相空间中混沌吸引子 A(3) 和其吸引域内一个常规鞍 S(3) 共存, 见图 6(a).

当 f 从 0.539 增加到 0.540, 系统发生了鞍结分岔, 产生了一个周期吸引子 A(4) 和一个光滑边界上的常规鞍 S(4). 此时, 相空间中为一个混沌吸引子 A(3), 一个周期吸引子 A(4), 以及一个常规鞍 S(4) 共存, 见图 6(b). 随着 f 的继续增加, 周期吸引子 A(4) 的吸引域逐渐增大, 混沌吸引子 A(3) 的吸引域逐渐减小.

当 f 从 0.542 增加到 0.543 时, 混沌吸引子 A(3) 与边界上的常规鞍 S(4) 碰撞, 发生了边界激变, 见图 6(c). 吸引子 A(3) 和鞍 S(4) 突然消失, 在吸引域内出现一个新的混沌鞍 S(5). 此时, 在相空间内周期吸引子 A(4) 和混沌鞍 S(5) 共存, 如图 6(d).

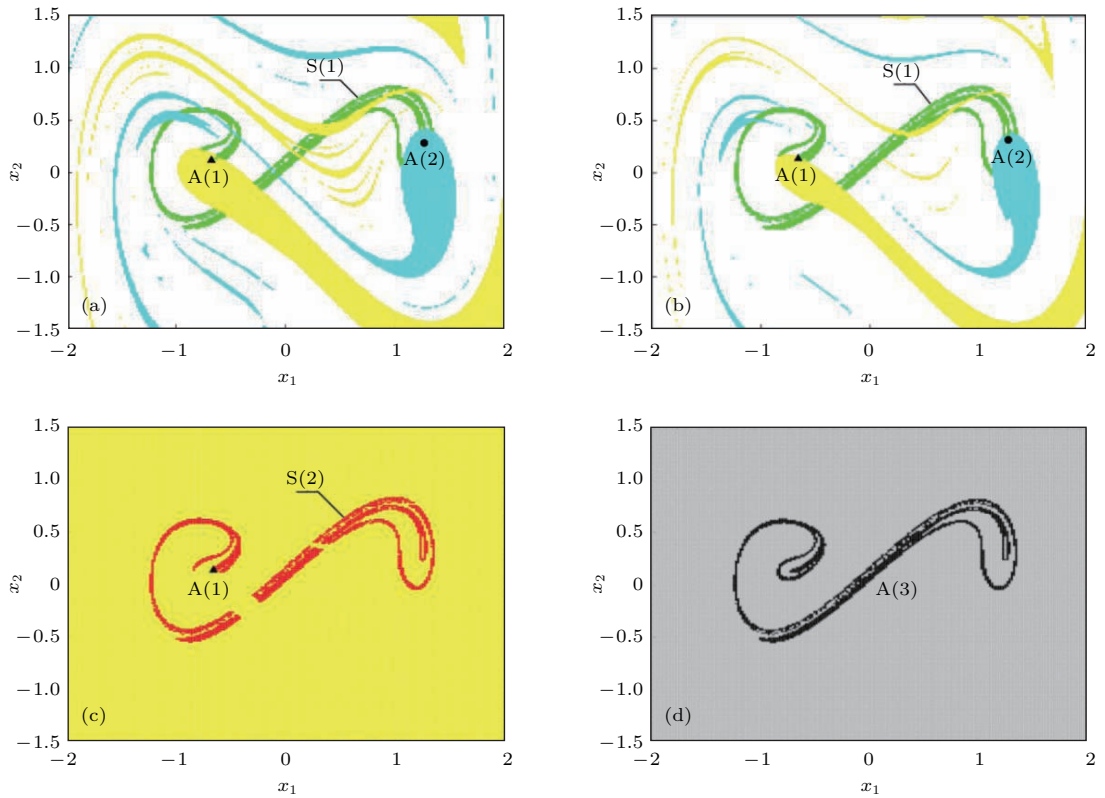


图5 (网刊彩色) 系统 (9) 在 $f \in [0.285, 0.29]$ 的全局动力学 (a) $f = 0.285$; (b) $f = 0.288$; (c) $f = 0.289$; (d) $f = 0.29$
 Fig. 5. (color online) The global dynamics of the system (9) when $f \in [0.285, 0.29]$ (a) $f = 0.285$; (b) $f = 0.288$; (c) $f = 0.289$; (d) $f = 0.29$.

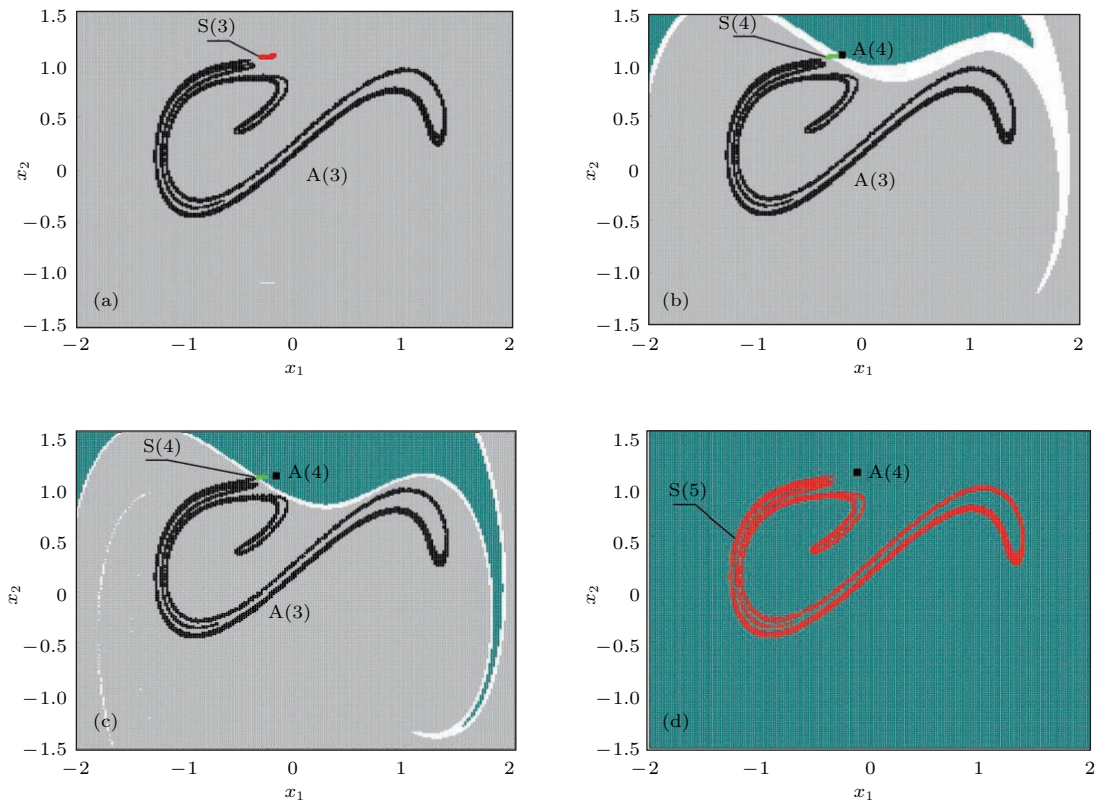


图6 (网刊彩色) 系统 (9) 在 $f \in [0.539, 0.543]$ 的全局动力学 (a) $f = 0.539$; (b) $f = 0.540$; (c) $f = 0.542$; (d) $f = 0.543$
 Fig. 6. (color online) The global dynamics of the system (9) when $f \in [0.539, 0.543]$: (a) $f = 0.539$; (b) $f = 0.540$; (c) $f = 0.542$; (d) $f = 0.543$.

4 结 论

本文研究了非自治分数阶 Duffing 系统的激变现象. 首先基于分数阶导数的短记忆原理, 使得分数阶系统的演化过程可以近似通过 Markov 链来描述. 在此基础上结合了胞映射和改进的预估校正算法, 为分数阶系统设计了一种全局动力学数值方法, 即拓展的广义胞映射法. 并根据胞空间的特点, 将胞的大小作为截断误差的参考, 以此得到了一步映射的估算公式.

以拓展的胞映射法研究了非自治分数阶 Duffing 系统随阶数和外激励强度变化分别发生了边界激变和内部激变. 其中边界激变是一个周期(混沌)吸引子与一个混沌(周期)鞍碰撞, 使得吸引子和鞍突然消失, 并在吸引域内部出现一个新的混沌鞍. 内部激变是吸引域内部的混沌鞍和一个周期吸引子碰撞, 使得混沌鞍突然消失, 同时周期吸引子变成一个大的混沌吸引子. 文献[14]中激变的经典定义为混沌吸引子的突然变化, 本文在此基础上, 将激变拓展定义为混沌基本集与周期基本集之间的碰撞, 其中混沌基本集包括混沌吸引子、边界上的混沌集合以及吸引域内部的非混沌吸引子的混沌集合. 数值结果进一步说明了所提出的拓展的胞映射法对于研究分数阶系统全局动力学的有效性.

参考文献

- [1] Oldham K B, Spanier J 1974 *The Fractional Calculus* (New York: Academic Press) pp1–150
- [2] Mandelbrot B B 1982 *The fractal geometry of nature* (San Francisco: W H Freeman) pp1–32
- [3] Bagley R L, Torvik P J 1983 *J. Rheol.* **27** 201
- [4] Bagley R L, Torvik P J 1983 *Aiaa J.* **21** 741
- [5] Bagley R L, Torvik P J 1985 *Aiaa J.* **23** 981
- [6] Agrawal O P 2004 *Nonlinear Dyn.* **38** 191
- [7] Deng R, Davies P, Bajaj A K 2004 *Nonlinear Dyn.* **38** 247
- [8] Depollier C, Fella Z E, Fella M 2004 *Nonlinear Dyn.* **38** 181
- [9] Chen Y Q, Vinagre B M, Podlubny I 2004 *Nonlinear Dyn.* **38** 355
- [10] Zhang Y X, Kong G Q, Yu J N 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6182 (in Chinese) [张永祥, 孔贵琴, 俞建宁 2008 物理学报 **57** 6182]
- [11] Zhang G J, Xu J X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 557 (in Chinese) [张广军, 徐健学 2005 物理学报 **54** 557]
- [12] Yu J J, Cao H F, Xu H B, Xu Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 29 (in Chinese) [于津江, 曹鹤飞, 徐海波, 徐权 2006 物理学报 **55** 29]
- [13] Li C P, Chen G R 2004 *Chaos, Solitons Fractals* **22** 549
- [14] Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1983 *Physica D* **7** 181
- [15] Hsu C S 1992 *Int. J. Bifurcation Chaos* **2** 727
- [16] Xu J X, Guttalu R S, Hsu C S 1985 *Int. J. Non-Linear Mech.* **20** 507
- [17] Ushio T, Hsu C S 1986 *Int. J. Non-Linear Mech.* **21** 183
- [18] Guzzetta V, Franco B, Trask B J, et al. 1992 *Genomics* **13** 551
- [19] Xiong F R, Qin Z C, Xue Y, et al. 2014 *Commun. Non-linear Sci. Numer. Simul.* **19** 1465
- [20] Tongue B H, Gu K 1988 *J. Appl. Mech. Trans. ASME* **55** 461
- [21] Zufria P, Guttalu R 1993 *Nonlinear Dyn.* **4** 207
- [22] Levitas J, Weller T, Singer J 1994 *J. Sound Vib.* **176** 641
- [23] Hong L, Xu J X 1999 *Phys. Lett. A* **262** 361
- [24] Jiang J, Xu J X 1994 *Phys. Lett. A* **188** 137
- [25] Guder R, Kreuzer E 1999 *Nonlinear Dyn.* **20** 21
- [26] Liu X J, Hong L, Jiang J, Tang D F, Yang L X 2016 *Nonlinear Dyn.* **83** 1419
- [27] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego: Academic Press) pp130–132
- [28] Deng W H 2007 *J. Comput. Appl. Math.* **206** 174
- [29] Ford N J, Charles Simpson A 2001 *Numer. Algorithms.* **26** 333
- [30] Petráš I 2011 *Fractional-order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation* (Beijing Higher: Education Press) pp238–242

Crises in a non-autonomous fractional-order Duffing system*

Liu Xiao-Jun^{1)2)†} Hong Ling²⁾ Jiang Jun²⁾

1) (College of Science, Northwest A&F University, Yangling 712100, China)

2) (State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Received 20 February 2016; revised manuscript received 1 July 2016)

Abstract

In this paper, the crises in a non-autonomous fractional-order Duffing system are investigated. Firstly, based on the short memory principle of fractional derivative, a global numerical method called an extended generalized cell mapping (EGCM), which combines the generalized cell mapping with the improved predictor-corrector algorithm, is proposed for fractional-order nonlinear systems. The one-step transition probability matrix of Markov chain of the EGCM is generated by the improved predictor-corrector approach for fractional-order systems. The one-step mapping time of the proposed method is evaluated with the help of the short memory principle for fractional derivative to deal with its non-local property and to properly define a bound of the truncation error by considering the features of cell mapping. On the basis of the characteristics of the cell state space, the bound of the truncation error is defined to ensure that the truncation error is less than half a cell size. For a fractional-order Duffing system, boundary and interior crises with varying the derivative order and the intensity of external excitation are determined by the EGCM method. A boundary crisis results from the collision of a chaotic (or regular) saddle in the fractal (or smooth) basin boundary with a periodic (or chaotic) attractor. An interior crisis happens when an unstable chaotic set in the basin of attraction collides with a periodic attractor, which causes a chaotic attractor to occur, and simultaneously the previous attractor and the unstable chaotic set are converted into a part of the chaotic attractor. It is found that a crisis can be generally defined as a collision between a chaotic basic set and a basic set, either periodic or chaotic, to cause the chaotic set to have a sudden discontinuous change. Here the chaotic set involves three different kinds of chaotic basic sets: a chaotic attractor, a chaotic saddle on a fractal basin boundary, and a chaotic saddle in the interior of a basin and disjoint from the attractor. The results further reveal that the EGCM is a powerful tool to determine the global dynamics of fractional-order systems.

Keywords: fractional-order systems, chaos, crises

PACS: 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Pq

DOI: [10.7498/aps.65.180502](https://doi.org/10.7498/aps.65.180502)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11332008).

† Corresponding author. E-mail: flybett3952@126.com