

软物质中的理性连续介质力学基础

陈恩惠 杨锦鸿 李栋 赵亚溥

On the theoretical basis of rational continuum mechanics in softmatter

Chen En-Hui Yang Jin-Hong Li Dong Zhao Ya-Pu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 188103 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.188103

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.188103>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I18>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于第一性原理计算 Rh 含量对 Ir-Rh 合金力学性能的影响

Effect of Rh content on the mechanical properties of Ir-Rh alloy based on the first principle

物理学报.2016, 65(15): 156201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.156201>

钝感高能炸药三氨基三硝基苯高温高压下热力学性质的分子动力学模拟研究

A molecular dynamics simulation of thermodynamic properties of 1, 3, 5-triamino-2, 4, 6-trinitrobenzene under high pressure and high temperature

物理学报.2016, 65(6): 066201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.066201>

La<sup>3+</sup> 存在形式对白云鄂博稀选尾矿微晶玻璃性能的影响

Effect of existence form of La<sup>3+</sup> on the properties of the Bayan Obo Mine tailing glass ceramics

物理学报.2015, 64(19): 196201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.196201>

一个新的自由能函数对介电高弹薄膜的多组等双轴预拉伸下力电耦合实验的预测

A new free energy model for predicting the qual-biaxial tests of dielectric elastomers

物理学报.2015, 64(18): 184601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184601>

喷射成形 FGH4095 的热变形特征

Hot deformation behavior of spray formed FGH4095

物理学报.2012, 61(21): 218102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.218102>

专题: 软物质研究进展

## 软物质中的理性连续介质力学基础\*

陈恩惠<sup>1)2)</sup> 杨锦鸿<sup>1)2)</sup> 李栋<sup>1)2)</sup> 赵亚溥<sup>1)2)†</sup>

1) (中国科学院力学研究所, 非线性国家重点实验室, 北京 100190)

2) (中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

(2016年8月9日收到; 2016年9月12日收到修改稿)

本文介绍了理性连续介质力学在软物质研究中的意义与特点, 简要回顾了软物质的理性连续介质力学背景与发展, 重点介绍了关于软物质主要力学模型的本构关系: 熵弹性、超弹性本构关系、黏弹性本构关系、多孔弹性介质本构关系、非牛顿流体本构关系, 以及近年来这些模型在生物体系如细胞、肌肉、血管、脑组织, 非生物体系如移动接触线、复合软材料, 以及 3D/4D 打印等体系中的应用. 在此基础上, 结合近几年国内外软物质力学研究进展与应用需求, 提出了学科关键科学问题和前沿问题, 指出了软物质理性连续介质力学在软物质-硬物质界面相互作用力学, 发展活性软材料多场耦合的弹性理论模型, 加强与其他相关学科的联系等方面的发展方向.

**关键词:** 软物质, 连续介质力学, 理性力学, 本构方程

**PACS:** 81.40.Jj, 83.10.Ff, 83.10.Gr, 46.05.+b

**DOI:** 10.7498/aps.65.188103

## 1 引言

软物质是指所有处于固体和理想流体之间的复杂态物质, 包括液晶、聚合物、薄膜、泡沫、表面活性剂、乳状液、胶体、颗粒物质、生物大分子、细胞、生物组织等<sup>[1-3]</sup>. 软物质研究是典型的多场耦合(化学场、电场、磁场、热场等)、多学科交叉(物理、力学、化学、生物等学科)、跨时间-空间尺度(从纳秒到秒, 从原子尺度到宏观尺度)的具有广泛研究对象的重要科学问题. 软物质除了具有柔软性和复杂性外, 一个基本特征是对微小的外界刺激产生大的响应, 诸如力、声、光、电、磁、热、pH值等刺激, 均可能引起软物质的运动变形<sup>[4]</sup>.

软物质具有极其广阔的应用前景, 与人们的日常生活、生命活动、工业技术发展、社会资源需求、自然与环境保护等各个方面密切相关, 占有重要的地位<sup>[5]</sup>. 例如, 药品、化妆品的作用机理, DNA、蛋

白质等生物大分子及细胞、组织、器官等的运动、变形规律, 液晶等柔性电子器件的应用, 肿瘤等重大疾病的检测, 油气的开采、运输、分离、加工的过程, 以及泥石流等自然灾害的防范与预测等广泛的领域.

然而, 软物质作为复杂系统, 表现出许多独特的现象, 具有涌现(emergence)的特征, 即不能用其中单个个体的行为简单累加来推整体现象<sup>[6,7]</sup>; 其运动变化规律不能用传统的流体、固体理论全面描述. 构成软物质的基元复杂, 多数是结构颇为复杂的链状和支状分子或分子集团(如聚合物分子), 并且这些分子本身具有不同的官能团, 对周围介质具有不同的响应, 且可能自组装形成各种复杂结构(蛋白质折叠等), 这种复杂性使得一般流体和固体的本构关系难以适用于软物质<sup>[3]</sup>. 软物质组成复杂, 常是多相集合体, 且往往涉及与硬物质的界面相互作用, 因此软物质的运动和变化规律

\* 国家自然科学基金(批准号: U1562105, 11372313)、中科院创新交叉团队项目、前沿科学研究重点计划(批准号: QYZDJ-SSW-JSC019)和中国科学院战略性先导科技专项(B类)(批准号: XDB22040401)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yzhao@imech.ac.cn

呈现出许多独特现象,与一般流体和固体迥异.软物质中结构单元之间的作用力弱,表、界面作用力, van de Waals 力等在一般流体和固体中作用较小的力,可能在软物质中起到主导作用.此时传统的流体/固体理论已无法全面刻画软物质所呈现的许多独特现象.因此软物质的力学理论研究受到了学术界的普遍关注,已成为国际上受到普遍重视的学科领域.

理性连续介质力学是软物质运动变化规律研究的有力工具.理性力学 (rational mechanics) 是力学中的一门横断学科,研究对象不限于某一领域或某种物质,横贯于众多力学分支学科中.理性力学力图用统一的观点和严密的逻辑推理研究力学的带有共性的基础问题,以建立力学的公理化体系<sup>[8,9]</sup>.理性力学是连续介质力学的理论基础.连续介质力学最基本的假设是“连续介质假设”:认为真实的流体和固体可以近似看作由连续的、充满全空间的介质组成,物质的宏观性质受牛顿力学的支配.连续介质力学是处理连续介质宏观性质的力学,重点研究带有共性的公理体系、守恒律、建立本构关系所需的客观性要求等.连续介质力学大致分为固体力学、流体力学和流变学.其中,流变学的内容与软物质存在很大重叠.一切连续介质必须满足质量守恒定律、动量守恒定律、角动量守恒定律、能量守恒定律,当考虑热力学时,还需要 Clausius-Duhem 和 Clausius-Planck 不等式.本构关系是介质应力张量和应变张量之间的关系,也是连续介质力学的核心内容.连续介质力学的八大本构公理分别为:因果性公理,确定性公理,等存在公理,客观性公理,物质不变公理,邻域公理,记忆公理,相容性公理<sup>[10-13]</sup>.如何建立具有普遍意义的本构关系,是理性连续介质力学的核心问题,而且也是最困难的问题.因此研究软物质的理性连续介质力学,必然是研究软物质运动和变形规律的基本任务.软物质的理性连续介质力学已经有许多进展,并且表现出广阔的应用前景,如在神经心理学、脑科学<sup>[14]</sup>、组织器官等生物医学领域得到了大量应用.

人们接触软物质已有很长的历史,软物质前期的研究散布于流变学、生物医学等许多领域,例如对液晶、聚合物、生物膜、泡沫、生物大分子、颗粒物质等若干体系的研究工作.但将软物质作为一类普遍物质形态进行深入的物理研究还只有 20 年左右

的时间.自从 1991 年 Pierre-Gilles de Gennes 明确提出软物质的概念以来,软物质物理已成为凝聚态物理领域的热点之一<sup>[2]</sup>.进入 21 世纪以来,软物质的研究更加活跃,这是因为软物质物理和化学是连接生命科学和纳米科技的重要桥梁.相比于软物质在物理、化学、生物学科的研究,软物质力学研究具有自身独特的优势,力学的观点、力学建模方法和力学计算手段的引入,为软物质带来深刻的监察力,丰富了软物质研究的模型和方法<sup>[15]</sup>,已经成为当前力学的研究前沿.

软物质研究对象的广阔性,扩大了理性连续介质力学的研究对象,拓展了理性连续介质力学的公理体系<sup>[16]</sup>;同时,理性连续介质力学为软物质提供了有效的研究工具,丰富了软物质的应用范围.

本文重点介绍软物质连续介质力学的主要模型及本构关系,以及近年来这些模型在一些重要体系中的应用.在此基础上,结合国内外软物质力学研究进展和重大应用需求,提出了软物质理性连续介质力学理论在固-液界面动力学、耦合外场作用、学科间交叉融合方面的发展方向.

## 2 理性连续介质力学基础

软物质研究体系具有多样性和多相性的特点,为建立软物质的本构模型提出了大的挑战.总体来看,软物质中的理性连续介质力学具有广阔的应用前景和发展空间.下面重点介绍目前软物质的几大类弹性本构关系:熵弹性,超弹性本构关系,黏弹性本构关系,多孔弹性介质本构关系,非牛顿流体本构关系<sup>[8]</sup>.

### 2.1 熵弹性

软物质的弹性与硬物质的弹性存在显著的区别.硬物质如陶瓷、金属在变形过程发挥主导作用的是“键力”,主要为内能改变,因此称为能弹性.而软物质如 DNA、细胞膜在变形过程发挥主要作用的是“熵力”,主要为微观构形数的改变,即熵能项改变,因此称为熵弹性.熵弹性是软物质的基本特征之一<sup>[2]</sup>.熵弹性来自 Helmholtz 自由能的熵能项.体系的 Helmholtz 自由能为  $F = U - TS$ ,即内能  $U$  与熵能  $-TS$  的和.对于软物质,变形过程的内能变化很小,体系的自由能变化主要由熵变决定.这里的熵  $S = k_B \ln \omega$  为构形熵,  $\omega$  为微观构形

数. 例如, 对于单分子力不能引起软物质中共价键破坏的情况, 影响的只能是体系的熵. 对于拉伸的大分子, 可能的微观构形数较少, 对应低熵状态, 而卷曲的大分子可能的微观构形数较多, 对应的熵增加. DNA 分子<sup>[17]</sup>、液晶、细胞膜等软物质是研究熵弹性的重要对象<sup>[18,19]</sup>.

## 2.2 超弹性本构关系

超弹性是指物体某一点在任意时刻的内能密度完全由该时刻点的应变状态确定, 即材料存在一个弹性势能函数, 该函数是应变张量的标量函数, 其对应应变分量的导数是对应的应力分量, 在卸载时应变可自动恢复. 超弹性的应力和应变为非线性关系, 以弹性能函数的形式一一对应. 多种软物质, 例如凝胶、橡胶、聚二甲基硅氧烷 (polydimethylsiloxane, PDMS) 等, 都属于超弹性体. 因此建立超弹性体的本构关系, 对于研究软物质力学是必不可少的. 超弹性体理论由 Green 于 1839 年创立<sup>[1,20]</sup>, 因此又被称为 Green 弹性体. 1894 年, Finger<sup>[21]</sup>完成了超弹性体的有限变形理论. 迄今已建立了多种超弹性体的本构模型. 常见的不可压缩弹性本构模型归为三类: 唯象型超弹性本构模型, 基于材料微结构的超弹性本构模型, 唯象和基于微结构的杂交模型 (Gent 模型).

### 2.2.1 唯象型超弹性本构模型

#### 1) Ogden 模型

1972 年, Ogden<sup>[22]</sup> 得到了一种适用于不可压缩橡胶类材料大变形情形的本构关系, 即

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3), \quad (1)$$

式中,  $\mu_n$  为材料常数 (剪切模量),  $\alpha_n$  为无量纲待定常数,  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 为三个方向上的主伸长比,  $N$  为正整数. 在一些特殊取值情况下, Ogden 模型可退化为 neo-Hookean 模型, Mooney-Rivlin 模型或 Varga 模型<sup>[23]</sup>.

Mooney-Rivlin 本构模型是在假设材料是各向同性的、体积变化和滞后可忽略的情况下得到<sup>[24]</sup>:

$$W = c_{01} (I_1 - 3) + c_{10} (I_2 - 3), \quad (2)$$

式中,  $c_{01}$  和  $c_{10}$  为材料常数,  $I_1$  和  $I_2$  分别为应变的第一、第二不变量.

Varga 模型为: 令方程 (1) 中  $N = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ , 得到 Varga 模型  $W = \mu_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)$ . 由于 Ogden 模型中存在六个参数, 因此模型又被称为 Ogden 六参数本构模型.

#### 2) 多项式模型

该模型是由 Rivlin 和 Saunders<sup>[25]</sup> 于 1949 年提出的, 它将应变能函数展开成第一主不变量和第二主不变量的多项式形式:

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} (I_1 - 3)^m (I_2 - 3)^n, \quad (3)$$

$$c_{00} = 0.$$

1993 年, Yeoh 发现在关于橡胶类材料的本构关系中,  $\partial W / \partial I_1$  应变往往比  $\partial W / \partial I_2$  大得多, 于是可以忽略  $\partial W / \partial I_2$  这一项的影响, 在此基础上给出了应变能函数<sup>[26]</sup>:

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i0} (I_1 - 3)^i, \quad (4)$$

该模型称为 Yeoh 模型或退化的多项式模型, 只与第一应变不变量有关, 往往被用来表征填充有炭黑的橡胶材料的力学性能.

#### 3) Veronda-Westmann 模型

1970 年, Veronda-Westmann 提出了该模型来表述皮肤的力学行为, 其应变能函数为<sup>[27]</sup>

$$W = a \left[ e^{\alpha(J_1-3)} - 1 \right] - b(J_2 - 3) + g(J_3), \quad (5)$$

$a, b$  是材料常数,  $g(J_3)$  是与应变第三不变量有关的函数. 在后来的研究中, 许多生物组织的本构关系都建立在这一本构模型的基础上. 例如, Humphrey 在 1987 年研究心肌时, 建立了本构方程:

$$W = c (e^Q - 1), \quad (6)$$

其中  $c$  是材料参数, 而  $Q$  是由以右 Cauchy-Green 张量为变量的函数. Martins 在 1998 研究骨骼肌时提出的本构关系:

$$W = c_1 \left[ e^{c_2(J_1-3)} - 1 \right] + c_3 \left[ e^{c_4(\lambda_f-3)} - 1 \right], \quad (7)$$

其中  $J_1$  是应变第一不变量;  $c_1, c_2, c_3, c_4$  均为材料常数.

### 2.2.2 基于材料微结构的超弹性本构模型

#### 1) Arruda-Boyce 模型

1993 年, Arruda 和 Boyce 基于橡胶材料中大分子网状结构的八链描述和其中单个链的非高斯



行为, 提出了一种用于描述该类材料变形的本构关系<sup>[28]</sup>, 该模型有时也被称为八链模型.

### 2) neo-Hookean 模型

从橡胶类材料中无定形结构中的分子链状网络结构的统计力学出发, Treloar 在 1943 年给出了最简单的适用于橡胶类材料的超弹性本构关系<sup>[29]</sup>:

$$W = c_1 (I_1 - 3) = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3), \quad (8)$$

该模型只与第一应变不变量有关. neo-Hookean 模型是 Ogden 本构模型的特例.

### 2.2.3 唯象和基于微结构的杂交模型——Gent 模型

1996 年, Gent 通过考虑分子链的极限伸长率的影响, 将应变能函数表示成第一应变不变量  $I_1$  的对数函数形式, 且包含两个材料常数  $\mu$  和  $J_m$ <sup>[30]</sup>:

$$\begin{aligned} W_{\text{Gent}} &= -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) \\ &= -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left( 1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{J_m} \right), \quad (9) \end{aligned}$$

式中,  $\mu$  为微小变形时的剪切模量,  $J_m$  为  $I_1 - 3$  的最大值 (常数). 当  $J_m \rightarrow \infty$  时, Gent 模型将退化到 neo-Hookean 模型.

### 2.2.4 可压缩超弹性体的本构关系

对于可压缩超弹性体, 不仅要考虑形状畸变, 还要考虑体积变化. 相比于不可压缩超弹性体, 可压缩超弹性体的变形梯度和变形张量均需要分解为体积发生变化的部分和体积不变形状畸变部分. 用第二类 Piola-Kirchhoff 应力表示的可压缩超弹性本构关系为<sup>[31]</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{T}_{\text{vol}} + \mathbf{T}_{\text{iso}}, \\ \mathbf{T}_{\text{vol}} &= 2 \frac{\partial W_{\text{vol}}(\rho_s)}{\partial \mathbf{C}} = \rho_s p \mathbf{C}^{-1}, \\ \mathbf{T}_{\text{iso}} &= 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}} = \rho_s^{-2/3} \mathbf{P} : \bar{\mathbf{S}}, \quad (10) \end{aligned}$$

式中, 下标 vol 表示体积膨胀 (volumetric 或 dilatational) 变形, 下标 iso 表示保体积的畸变 (isochoric, distortional) 变形;  $W(\mathbf{C})$  为单位参考构形体积下的应变能函数,  $\mathbf{C}$  为单位参考构形体积下的右 Cauchy-Green 张量;

$$p = \frac{dW_{\text{vol}}(\rho_s)}{d\rho_s}; \quad \bar{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}},$$

$\bar{\mathbf{C}}$  为修正的右 Cauchy-Green 变形张量, 满足  $\mathbf{C} = \rho_s^{2/3} \bar{\mathbf{C}}$ ;  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}$  为相对于参考

构形通过  $\mathbf{C}$  表示的投影张量,  $\mathbf{I}$  为四阶等同张量;  $\rho_s = \rho_0/\rho$  为参考构形和即时构形中物质的密度之比.

用 Cauchy 应力表示可压缩超弹性体的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{p \mathbf{I}}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}}} + \underbrace{\rho_s^{-1} \bar{\mathbf{F}} (\mathbf{P} : \bar{\mathbf{T}}) \bar{\mathbf{F}}^T}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}}}, \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{F}$  为变形梯度,  $\bar{\mathbf{F}}$  为修正的变形梯度, 满足  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ ,  $\bar{\mathbf{F}} = \rho_s^{1/3} \mathbf{F}$ .

特别地, 对于横观各向同性超弹性体, 其弹性张量的独立常数减少到 5 个, 一点的应变和应力状态除了和局部的变形梯度张量有关外, 还和材料的对称轴, 即纤维方向有关. 应用如血管等纤维状的生物器官, 在第 3 节有详细讨论.

超弹性体的本构模型在各种活性软材料中已得到广泛应用, 例如柔性电子器件. 针对许多新出现的材料, 新的力学理论和模型还在完善和发展, 以更好地描述材料的性能.

### 2.3 黏弹性本构关系

许多生物组织, 如骨骼肌、关节、声带等软组织 (soft tissue) 的力学行为属于黏弹性力学的范畴. 早在十九世纪, 对黏弹性力学问题的研究就开始了<sup>[32-36]</sup>. 在黏弹性实验的基础上, 1867 年, Maxwell<sup>[37]</sup> 针对黏性气体提出了微分形式的黏弹性理论模型, 应力  $\sigma$  和应变  $\varepsilon$  之间的关系为如下微分形式:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{t_r}, \quad (12)$$

式中,  $E$  表示杨氏模量,  $t_r$  表示弛豫时间. Maxwell 将弹性模量和弛豫时间的乘积称为“黏度系数”.

1874 年, Meyer<sup>[38]</sup> 针对固体的黏弹性, 建立了微分型的黏弹性理论模型, 他将应力表达为线弹性项和应变率相关的黏性项之和:

$$\begin{aligned} -X_y &= -Y_x \\ &= \underbrace{\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\text{线弹性项}} + \underbrace{\eta \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\text{和应变率相关的黏性项}}, \quad (13) \end{aligned}$$

式中,  $X_y$  和  $Y_x$  为剪切应力,  $u$  和  $v$  分别为  $x$  和  $y$  方向上的位移,  $\mu$  为剪切弹性模量,  $\eta$  为黏度系数. Meyer 的黏弹性理论模型后来在一般性教科书中以“Kelvin-Voigt 黏弹性模型”冠名. 然而, Maxwell 和 Meyer 黏弹性模型仅适用于小变

形情形, 对于黏弹性大变形情况, 需要用 1950 年 Oldroyd [39] 建立的“Oldroyd B 模型”。

随后, Boltzmann [40] 也于 1874 年提出了积分型的黏弹性理论模型, 且认为 Meyer 的黏弹性模型缺乏广泛适用性. Boltzmann 首先针对线性黏弹性问题, 给出了如下叠加原理: 黏弹性物质的力学松弛行为是其整个历史上松弛过程的线性加和结果; 对于蠕变过程, 每个负荷对黏弹性物质的变形的贡献是独立的, 总的蠕变是各个负荷引起的蠕变的线性加和; 对于应力松弛, 每个应变对于黏弹性物质的应力松弛的贡献也是独立的, 总应力等于历史上诸应变引起的应力松弛过程的线性加和. 符合 Boltzmann 叠加原理的黏弹性称为线性黏弹性, 反之称为非线性黏弹性. 由该叠加原理可以得出描述黏弹性的积分方程, 由于只有一个积分参数, 所以又被称为 Volterra 型积分方程, 其本构模型可表示为:

$$\begin{cases} \text{蠕变:} \\ \varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_{0c}} + \int_0^t K(t-t') \dot{\sigma}(t') dt', \\ \text{松弛:} \\ \sigma(t) = E_{0r} \varepsilon(t) + \int_0^t F(t-t') \dot{\varepsilon}(t') dt', \end{cases} \quad (14)$$

式中,  $\sigma(t)$  和  $\varepsilon(t)$  分别为随时间  $t$  变化的应力和应变,  $E_{0c}$  和  $E_{0r}$  分别为蠕变和应力松弛的即时弹性模量, 而  $K(t)$  和  $F(t)$  则分别为蠕变和应力松弛函数.

1972 年, 冯元桢基于多种软组织 (soft tissue) 的 1D 拉伸实验结果 [41], 通过应用 Boltzmann 叠加原理和黏弹性材料的应力松弛的积分型方程, 建立了“准线性黏弹性 (quasi-linear viscoelasticity, QLV) 理论”. 该理论假设软组织的应力松弛行为可表示为软组织的瞬态弹性响应  $\sigma^c(\varepsilon)$  (针对软组织施加一个瞬态应变 Heaviside 阶梯型应变时, 软组织中的最大应力值) 和退化松弛函数  $G(t)$  (归一化的与时间相关的应力响应) 的积, 即

$$\sigma(t) = G(t) \sigma^c(\varepsilon). \quad (15)$$

通过 Boltzmann 叠加原理, 瞬时应力可通过应变历史和退化松弛函数的卷积得到

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{d\sigma^c(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau, \quad (16)$$

式中, 瞬态弹性响应  $\sigma^c(\varepsilon) = a(e^{b\varepsilon} - 1)$ ,  $a$  和  $b$  为待定材料常数.

为了说明许多生物软组织材料的应力应变关系以及滞后回路的应变率不敏感性, 冯元桢还给出了松弛谱. 近年来, 关于关节软骨、声带、骨骼肌的黏弹性力学研究蓬勃发展, 极大地丰富了黏弹性力学成果.

## 2.4 多孔弹性介质本构关系

多孔介质在很多工程领域中都占有重要地位, 比如土木工程、水力工程、石油开采等, 随着科研和工程领域的扩展, 近年来也被引入生物、医学等领域 [42-45]. 凝胶以及许多生物组织, 兼具聚合物网络和小的溶剂分子, 构成多孔弹性体. 自 1941 年 Biot 关于三维线性各向同性多孔材料 [46] 的开创性工作之后, 多孔介质的理论模型被逐渐补充完善. Biot 于 1955 年 [47], 1956 年 [48] 和 1973 年 [49], 分别将模型扩展到各向异性、动态和几何非线性问题, 补充加入了多孔材料的理论模型. 多孔弹性体的本构关系可基于微小变形下均匀各向同性弹性材料的本构关系加上孔隙压力项修正得到:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \underbrace{\frac{\sigma_{ij}}{2} - \left(\frac{1}{6\mu} - \frac{1}{9K}\right) \sigma_{kk} \delta_{ij}}_{\text{经典弹性项}} + \underbrace{\frac{p}{3H'}}_{\text{孔隙压力附加项}} \delta_{ij}, \\ \zeta = \frac{\sigma_{kk}}{3H''} + \frac{p}{R'}, \end{cases} \quad (17)$$

上式中,  $p$  为孔隙压强 (pore pressure);  $\zeta$  为无量纲量, 表征多孔介质中流体含量的改变, 其定义为单位体积多孔材料中流体体积的改变, 也可理解为多孔介质中液体的体积应变;  $K$  和  $\mu$  分别为排水后弹性固体 (drained elastic solid) 的体模量和剪切模量;  $H'$ ,  $H''$  和  $R'$  均具有应力的量纲, 表征的是固体、流体应力和应变之间的耦合, 三者之间只有两个是线性无关的. 事实上, 变形可逆性的假定使得功的增量成为一个全微分, 结合所需满足的 Euler 条件, 得到  $H' = H''$ , 因此对于各向同性多孔弹性介质只有四个独立的本构参数.

经过以上分析可看出, Biot [46,47] 针对充液多孔介质的本构描述主要基于两个基本假定 [50]: 1) 应力张量、液体压强与应变张量、液体体积应变满足线性关系; 2) 变形过程的可逆性——针对一个封闭的变形循环, 无能量耗散.

流体渗透的多孔材料 (fluid-infiltrated porous material) 力学响应的一个重要特点是排水和非排水变形的巨大差异. 这两种情形分别代表了两种极限情况: 1) 非排水响应 (undrained response) 表征的是流体被陷在多孔固体中, 而流体的体积应变为零; 2) 排水响应 (drained response) 对应于孔隙压强为零的情形. 对于非排水响应, 孔隙压力正比于静水压强, 对于排水响应, 体积应变与球应力成正比. 各向同性的多孔弹性介质具有四个独立的弹性常数.

在线性各向同性弹性理论的基础上, 引入排水和非排水两种情况的 Poisson 比 (分别用  $\nu, \nu_u$  表示), 可以得到线性各向同性多孔弹性介质的本构关系:

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{1}{2\mu}\frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{ij}}_{\text{经典弹性项}} + \underbrace{\frac{1-2\nu}{2\mu(1+\nu)}\alpha p\delta_{ij}}_{\text{孔隙压力附加项}}, \quad (18)$$

式中,  $\alpha$  为有效应力系数.

多孔弹性介质有两类扩散方程, 分别为依赖体积应变率  $\partial\varepsilon/\partial t$  的针对孔隙压强  $p$  的扩散方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \kappa M \nabla^2 p = -\alpha M \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + M \left( Q - \kappa \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \quad (19)$$

和有关流体体应变的扩散方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - c \nabla^2 \zeta = \frac{\beta c}{\mu} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + Q - \kappa \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad (20)$$

式中,  $\kappa$  为渗透系数;  $f_i$  为单位流体体积的体力;  $Q$  为单位多孔固体所注入的流体体积率;  $\beta, M, c$  分别为多孔弹性应力系数、Biot 模量、扩散系数 (或广义固结系数), 表达式如下:

$$\beta = \frac{\alpha(1-2\nu)}{2(1-\nu)},$$

$$M = \frac{2\mu(\nu_u - \nu)}{\alpha^2(1-2\nu_u)(1-2\nu)},$$

$$c = \frac{2\kappa\mu(1-\nu)(\nu_u - \nu)}{\alpha^2(1-2\nu)^2(1-\nu_u)}.$$

Biot 的多孔介质弹性理论最初用于研究固体中流体的输运, 广泛应用于土木、水利、石油开采等工业领域, 随着科研领域的不断扩大, 该理论逐渐

涉及生物组织、聚合物、胶体、薄膜、颗粒物质等领域. 该理论在凝胶中的应用详见第 3 节.

## 2.5 非牛顿流体本构关系

对一些软物质, 诸如大分子溶液、熔融物、肥皂液、悬浮液等复杂流体, 以上的弹性模型不再适用. 并且不同于空气、水等简单流体 (即牛顿流体, 指剪切应力与应变率成正比的流体), 这类软物质具有流体黏度与剪切速率、剪切历史有关、不能由牛顿流体的本构方程来描述的特点, 因此也被称为非牛顿流体或流变体. 尽管这类软物质不能用弹性理论模型来描述, 由于它们是软物质的一大类, 因此这里介绍这类物质的流体本构关系.

牛顿流体的本构方程如下:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{d} \quad \text{或} \\ \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{\gamma}_{ij} \\ &= -p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

式中,  $p$  为静水压强,  $\eta$  为动力黏度, 应变率张量为  $\dot{\gamma}_{ij} = (\nu_{i,j} + \nu_{j,i})/2$ ,  $\nu$  为速率.

非牛顿流体可以粗略分为两大类: 时间无关 (无记忆) 流变体和时间相关 (记忆) 流变体. 时间相关流变体分为触变体、震凝体和黏弹性体. 常用的时间无关行为的流变体分类, 是根据 1926 年 Herschel 和 Bulkley [51,52] 提出的具有广泛适用范围的流变体的本构关系, 如图 1 所示. 该关系被称为“Herschel-Bulkley 模型”:

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}^n, & \tau \geq \tau_0, \\ \dot{\gamma} = 0, & \tau < \tau_0, \end{cases} \quad (22)$$

式中,  $\tau$  为剪应力,  $\tau_0$  为初始屈服剪应力,  $\dot{\gamma}$  为剪切应变率. 当  $\tau_0 = 0$  时称为无屈服应力的流变体, 而当  $\tau_0 \neq 0$  时称为有屈服应力的流变体.  $k$  为系数,  $n$  为剪切应变率指数常数.

无屈服应力的非牛顿流体主要用经验性的幂律函数来描述. de Waele [53] 和 Ostwald [54] 给出了称为“Ostwald-de Waele 模型”:

$$\tau = k|\dot{\gamma}|^{n-1}\dot{\gamma}, \quad (23)$$

式中,  $k$  为系数. 根据标度指数  $n$  取值的不同, 可分为如下三种情况:

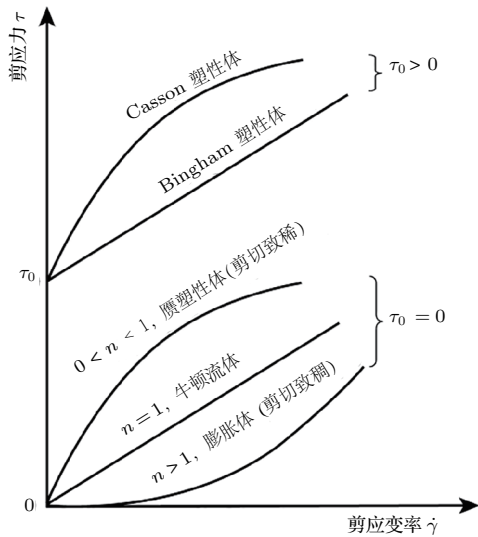


图1 时间无关行为流变体的几种典型模型分类 [8]  
Fig. 1. Classification of time-independent fluids [8].

1)  $0 < n < 1$ , 赝塑性流体, 黏度将随着剪切速率  $\dot{\gamma}$  的增大而逐渐减小, 因此, 该种流变体也被广泛地称为“剪切致稀”型流变体, 诸如油漆、番茄酱、米粥、全血以及很多高分子溶液和悬浮液等;

2)  $n = 1$ , 牛顿流体, 黏度系数不依赖于剪切速率  $\dot{\gamma}$ ;

3)  $n > 1$ , 膨胀流体, 表观黏度系数将随着剪切速率  $\dot{\gamma}$  的增大而逐渐增大, 因此, 该种流变体也称为“剪切致稠”型流变体. 例如, 浆糊或淀粉糊就是典型的剪切致稠流体.

对于有屈服应力的流变体模型 Bingham [55] 塑性体 (如牙膏等), 其本构模型为

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + \eta_p \dot{\gamma}, & \tau > \tau_0, \\ \dot{\gamma} = 0, & |\tau| \leq \tau_0, \end{cases} \quad (24)$$

式中,  $\tau_0$  为屈服剪切应力,  $\eta_p$  为塑性黏度系数. Casson 塑性体本构模型为

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + b\sqrt{\dot{\gamma}}, \quad (25)$$

式中,  $b$  为待定材料常数.

Blair [56,57] 最早将 Casson [58,59] 流变模型用来描述血液的流变行为. 1958 年, Steiner 建议用 Casson 模型来描述熔化巧克力的流变特性 [60]. 在 Casson 模型的基础上, Heinz [61] 进一步结合油漆的流变特性给出了具有更广适用范围的流变体本构模型:

$$\tau^m = \tau_0^m + b\dot{\gamma}^m, \quad (26)$$

式中,  $m$  被称为流动因子 [62].  $m$  的典型值为  $2/3$  以及在  $0.5-0.75$  范围的取值. 这些流变模型也在其他不同领域有着广泛的应用范围, 例如, 石油和能源领域广泛应用的钻井液的流变行为亦可由上述模型来描述, 流变模型中的相应参数需要由具体实验来确定.

### 3 本构关系在软物质中的应用

上述理论模型在诸多领域发挥了重要作用, 对解释软物质行为, 并对医疗、功能电子器件等方面的应用提供了必要的指导, 同时也在应用的驱动下不断发展、完善. 以下仅以细胞、肌肉、血管、组织, 以及移动接触线、凝胶、复合材料、3D/4D 打印技术等为例, 简要介绍连续介质力学体系下本构关系在软物质中的典型应用.

#### 3.1 本构关系在生物组织中的应用

##### 3.1.1 细胞本构模型

作为物理实体, 活细胞的结构和力学性质发生变化时, 有可能导致生理功能的丧失, 甚至可能引发疾病. 由于细胞与周围细胞外基质存在力学相互作用, 使得单细胞的力学性质可以决定整个生物组织的结构稳定性 [63]. 另一方面, 施加在生物组织上的力学荷载传递到单个细胞上, 进而影响细胞的生理功能. 尽管连续介质力学在活组织研究中已有一些成功应用, 但单细胞的力学研究仍然具有挑战性. 目前, 对于悬浮细胞, 通常采用液滴模型; 对于黏附的细胞, 通常采用固体模型; 对于黏附细胞的动态行为, 通常采用标度律结构衰减的模型; 而对于骨骼肌细胞力学, 通常采用两相模型研究 [64].

液滴模型最初是因中性粒细胞在微量注射器中的流变学特性而发展起来的, 根据细胞特点, 液滴模型又分为牛顿流体液滴模型、复合牛顿流体液滴模型、剪切致稀液滴模型、Maxwell 液滴模型, 分别描述相应类型的细胞.

白血球的行为采用如下牛顿流体本构模型 [65]:

$$\sigma_{ij} = \eta d_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (27)$$

这里的  $d_{ij}$  为工程应变率张量的分量, 相当于上文牛顿流体本构关系中的  $2\dot{\gamma}_{ij}$ .



真核细胞由于细胞核的黏度和刚度明显比周围细胞质的大, 在实验观测中表现出无法用均质模型解释的非线性行为, 为了解释这种行为, 采用包含三层结构的液滴模型, 详见文献 [64].

大变形下细胞质的表观黏度依赖于剪切率, 表现出典型的剪切致稀行为. 标度律如下:

$$\tau = \eta_c (\dot{\gamma}_m)^{-n} \dot{\gamma}, \quad (28)$$

$$\eta = \eta_c (\dot{\gamma}_m / \dot{\gamma}_c)^{-n}, \quad (29)$$

$\tau$  为剪应力;  $\eta$  为表观黏度系数;  $\eta_c$  为在特征剪切应变率  $\dot{\gamma}_c$  时的特征黏度;  $\dot{\gamma}_m$  为全过程的平均剪切应变率;  $n$  为标度指数;  $n = 0.52 \pm 0.09$ . 根据前述无屈服应力流变体模型可以判断, 细胞属于剪切致稀流变体.

小变形下, 细胞迅速进入微量注射器时, 表现出类弹性行为, 此时适合用 Maxwell 本构方程描述 [66]:

$$\tau_{ij} + \frac{\eta}{k} \dot{\tau}_{ij} = \eta \dot{\gamma}_{ij}, \quad (30)$$

$k, \eta$  分别为弹性常数和黏度常数.

细胞固体模型为线弹性固体模型和线性黏弹性固体模型. 线弹性模型本构关系为应力应变成比例关系, 比例系数为剪切模量, 在此不再详细讨论. 线弹性模型显然不太适合描述细胞力学模型, 然而线弹性解作为黏弹性解的基础, 有一定研究意义.

线性黏弹性固体模型本构方程如下 [67,68]:

$$\tau_{ij} + \frac{\eta}{k_2} \dot{\tau}_{ij} = k_1 \gamma_{ij} + \eta \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right) \dot{\gamma}_{ij}, \quad (31)$$

$k_1, k_2$  分别为加载和卸载过程中细胞的弹性系数.

总体来说, 连续介质力学方法在预测活细胞整体变形方面成果可观. 但由于活细胞成分、结构的不均匀性和多尺度性, 今后需要更精确的力学模型来描述活细胞, 并考虑应用到对细胞内力传导的研究中.

### 3.1.2 细胞接触单连接模型

在上皮细胞间, 细胞接触不平衡力引发细胞的变形, 促使组织形态发生改变. 但其中仍然存在大量的未知机理, 主要的原因是无法直接准确地测量细胞的表面张力. Bambardekar 等 [69] 在 2015 年展示了利用光镊技术研究细胞接触的具体办法. 使用光镊捕捉并测量细胞的表面张力, 获得细胞在上皮组织形态改变初期的表面张力约为 100 pN. 在此基础上研究了组织形态改变时细胞间接触的力学

特征以及组织内部局部变形的演变. 结合实验结果, 给出细胞“单连接”模型:

$$\dot{f} + \frac{k_2}{\eta} f = (k_1 + k_2) \dot{x} + \frac{k_1 k_2}{\eta} x, \quad (32)$$

$$f = k_t (x_t - x) - C_\eta \dot{x}, \quad (33)$$

其中  $f$  是水平回复力;  $x$  是表面变形;  $k_1, k_2$  是弹性常数;  $k_t$  是光阱的刚度;  $C_\eta$  是细胞质的阻尼系数. 在组织层次上的力学模型为

$$\dot{T} + \frac{k_2}{\eta} T = (k_1 + k_2) \dot{X} + \frac{k_1 k_2}{\eta} X, \quad (34)$$

其中  $T$  是张力,  $X$  是伸长率. 相邻细胞间的界面 (以  $j = adj(i)$  表示) 张力与黏性力保持平衡:

$$C_\eta X_i = \sum_{j=adj(i)} T_{ij}. \quad (35)$$

文中给出了准确测量细胞表面张力的方法及细胞表面张力的量级. 上述本构关系的建立, 有助于我们进一步了解细胞分化的微观机理, 并为解决相关的生理问题提供了指导.

### 3.1.3 声带肌本构模型

Zhang 等 [70] 于 2006 年建立了一个人类声带肌基频调整的本构模型, 该模型可以解释人们经验中声音基频随年龄、性别等因素变化的现象. 通过考虑超弹性平衡网状系统和无弹性与时间有关的网状系统的力学行为, 结合发声的理想弦模型, 建立了采用大应变的超弹性本构模型. 该本构模型中超弹性和含时参数会导致声音基频改变的年龄性别因素相关. 在进一步的研究中, Chan 等 [71] 于 2009 年发现声带肌的应力应变响应呈现出高度非线性、滞后现象. 包含超弹性 (大应变)、平衡网络结构、时间依赖黏塑性的本构模型, 除声带肌大变形外, 能相当好地描述生物组织行为. 他们采用如下—阶 Ogden 模型:

$$w_i = \frac{\mu_i}{\alpha^2} [(\lambda_{i,1}^e)^\alpha + (\lambda_{i,2}^e)^\alpha + (\lambda_{i,3}^e)^\alpha - 3], \quad (36)$$

$$i = A, B, C,$$

其中  $\lambda_{i,1}^e$  是  $A, B, C$  网状结构长度方向的主伸长比;  $\lambda_{i,2}^e, \lambda_{i,3}^e$  分别是横向主伸长比;  $\mu_i$  为材料剪切模量;  $\alpha$  为无量纲待定系数. 这种模型尽管已经能很好地描述声带肌 [72], 然而声带肌在微观结构上不完全是各向同性的, 因此力学性质也可能不完全是各向同性的. 下一步的研究中需要考虑这种各向异性作用.

### 3.1.4 骨骼肌本构模型

由于肌肉具有主动收缩和发力的能力,使得肌肉有别于人体其他大部分软组织,同时也导致了肌肉的主动行为和被动行为分别对应不同的本构关系<sup>[73,74]</sup>.肌肉的特殊行为的数学处理从20世纪30年代就开始了<sup>[75]</sup>,但是这个时候力和收缩速度之间的方程是经验方程.根据肌肉的生物力学特点,目前通常采用准静态不可压横观各向同性超弹性体模型描述骨骼肌.

2011年 Ehret 等<sup>[76]</sup>提出该模型下的应变能函数形式为

$$W = \frac{c}{4} \left\{ \frac{1}{a} \left[ e^{\alpha(\tilde{I}_p-1)} - 1 \right] + \frac{1}{b} \left[ e^{b(\tilde{J}-1)} - 1 \right] \right\}, \quad (37)$$

式中  $\tilde{I}_p, \tilde{J}$  为推广的不变量;  $a, b, c$  均为材料常数.肌肉主动行为和被动行为的不变量存在差异,引起它们的本构关系不同.

主动行为对应的第二类 Piola-Kirchhoff 应力表示的本构关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \frac{\mu}{2} \left\{ e^{\alpha(\tilde{I}_p-1)} \left[ \frac{w_0}{3} \mathbf{I} + (w_p + w_a) \mathbf{M} \right] \right. \\ \left. - e^{\beta(\tilde{K}-1)} \mathbf{C}^{-1} \left[ \frac{w_0}{3} \mathbf{I} + w_p \mathbf{M} \right] \mathbf{C}^{-1} \right\} \\ - p \mathbf{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (38)$$

被动行为对应的第二类 Piola-Kirchhoff 应力表示的本构关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \frac{\mu}{2} \left\{ e^{\alpha(\tilde{I}_p-1)} \left[ \frac{w_0}{3} \mathbf{I} + w_p \mathbf{M} \right] \right. \\ \left. - e^{\beta(\tilde{K}-1)} \mathbf{C}^{-1} \left[ \frac{w_0}{3} \mathbf{I} + w_p \mathbf{M} \right] \mathbf{C}^{-1} \right\} \\ - p \mathbf{C}^{-1}, \end{aligned} \quad (39)$$

$\mathbf{C}, \mathbf{M}, \mathbf{I}$  分别为右 Cauchy-Green 应变张量、结构张量、单位张量;  $w_0, w_p$  分别为各向同性成分、被动肌肉纤维、主动肌肉纤维的质量分数.这种模型把肌肉的微观结构考虑进去,且与实验符合得很好.然而这种模型仍然具有局限性,以后的发展应考虑针对真实肌肉的三维几何模型.

### 3.1.5 动脉血管的本构模型

Holzapfel 等<sup>[77]</sup>在2000年对动脉血管开展了本构关系的研究.他们采用的血管壁模型为厚壁非线性弹性圆管,由血管中层和动脉外膜两层组成.每层均被认为是纤维增强材料,纤维与材料的胶原成

分一致,且为轴对称.得到的本构方程关于每层均为正交.纤维取向由动脉切片的统计平均方向得到.该模型与已有的动脉血管数据符合,并且避开了现有的唯象模型在力学、数学与计算中的缺点.具体来说,血管壁每层均有各自的应变能函数.假设每层的力学特征是相似的,则应变能函数具有相同的形式,仅材料参数的值不同.根据血管的形变由各向同性部分和各向异性部分组成,把应变能函数分为各向同性和各向异性两部分:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) \\ = W_{\text{iso}}(\mathbf{C}) + W_{\text{aniso}}(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}), \end{aligned} \quad (40)$$

$\mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}$  为血管胶原纤维的单位方向矢量;  $\mathbf{C}$  为右 Cauchy-Green 应变张量.

引入两个张量,定义为  $\mathbf{A}_i = \mathbf{a}_{0i} \otimes \mathbf{a}_{0i}, i = 1, 2$ .三个对称的二阶张量  $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  的整基形成如下应变度量的不变量:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \text{tr} \mathbf{C}, \\ I_2(\mathbf{C}) &= \frac{1}{2} \left[ (\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2 \right], \\ I_3(\mathbf{C}) &= \det \mathbf{C} = 1, \\ I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}) &= \mathbf{C} : \mathbf{A}_1, \\ I_5(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}) &= \mathbf{C}^2 : \mathbf{A}_1, \\ I_6(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}) &= \mathbf{C} : \mathbf{A}_2, \\ I_7(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{02}) &= \mathbf{C}^2 : \mathbf{A}_2, \\ I_8(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) &= (\mathbf{a}_{01} \cdot \mathbf{a}_{02}) \mathbf{a}_{01} \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}_{02}, \\ I_9(\mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) &= (\mathbf{a}_{01} \cdot \mathbf{a}_{02})^2, \end{aligned}$$

可以看到,前五个不变量与各向同性超弹性体的五个不变量相同.第三、第九不变量是常数;第四、第六不变量是在两个纤维单位矢量上变形张量的平方,清楚表明这两个不变量的物理意义,属于各向异性部分.如此,应变能函数简化表示如下:

$$W(\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = W_{\text{iso}}(I_1) + W_{\text{aniso}}(I_4, I_6). \quad (41)$$

还可以进一步把各向同性应变能函数表示成含有材料参数的形式.使用 neo-Hookean 模型,可以把各向同性应变能函数表示为

$$W_{\text{iso}}(I_1) = \frac{a}{2} (I_1 - 3), \quad (42)$$

式中  $a$  为材料常数.

本文中多次述及的 Raymond Ogden 由于其在固体力学特别是软物质力学领域引领性的研究

成果, 被授予 ICTAM (International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 世界力学家大会) 2016 Rodney Hill 奖.

### 3.1.6 脑组织的本构模型

对脑组织的力学行为建立模型是最迫切最复杂的课题之一. 在实际治疗中, 本构模型的选取对计算人脑的力学行为至关重要, 而计算大脑力学行为可以为指导显微手术治疗提供更好的视场. 精确可靠地通过计算预测脑组织的受压力程度, 对降低术后并发症具有重大意义. 机器人技术的发展, 尤其是自动外科手术工具的浮现, 对大脑、肝脏、肾脏等软组织的力学性能的精密检查提出了要求.

大脑生物力学的研究已经超过 40 年. 特别是有限元分析和其他有用的计算方法也长期被用来定量分析头部创伤等的动态过程研究. 不同的应用需要, 使得非线性、线性弹性模型, 黏弹性、多孔介质弹性、甚至纯弹性模型都可能在脑组织的力学分析中被使用. 在材料模型的选择中, 特征时间尺度非常重要. 冲击问题通常选取黏弹性模型, 长期过程如脑积水等, 可根据组织间隙液的运动选取多孔弹性介质模型或者混合模型. 在大脑成像应用中, 甚至会用到纯弹性模型 [78].

基于早期的实验结果, Pamidi 和 Advani [79] 于 1978 年, 以及 Mendis 等 [80] 于 1995 年提出人脑组织的非线性本构关系. Miller 和 Chinzei [81] 于 1997 年结合实验, 证明了基于多项式应变能函数, 含有依赖时间参数的非线性黏弹性模型, 对描述外科手术的 low 应变率压缩状态下大脑组织的变形行为是适用的. 他们使用的多项式模型的应变能函数为

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (J_1 - 3)^i (J_2 - 3)^j, \quad (43)$$

式中,  $J_1, J_2$  分别为左 Cauchy-Green 应变张量的第一、第二应变不变量. 当假定脑组织初始为各向同性时, 能量由应变不变量决定. 如果认为脑组织不可压缩, 则应变能函数的前两项将化为适用于不可压缩橡胶材料的 Mooney-Rivlin 能量函数.

三十多年来, 许多研究团队对脑组织力学性质开展了研究, 以期在广泛的加载条件下建立统一的本构关系. 然而应变率达到冲击速率的实验非常有限, 限制了这方面的研究. 2014 年, Rashid 等 [82] 在体外抗拉实验中实现了应变率分别为 30, 60,

90  $s^{-1}$ , 达到 30% 应变的情况. 他们使用各向同性不可压缩超弹性本构模型, 分别采用 Fung 应变能函数, Gent 应变能函数, 单项 Ogden 应变能函数, 结果发现 Fung, Gent, 单项 Ogden 模型的拟合结果都与实验结果非常符合. 该结果为掌握冲击作用下脑组织的行为提供了资料.

动物中的啄木鸟具有独特的脑结构, 可以在反复震荡的状态下不产生任何大脑损伤. 啄木鸟觅食时啄食树木的频率可达 25 Hz, 速度可达 7 m/s, 加速度可达  $-1200g$  ( $g$  为重力加速度). 在高频率高速度冲击下, 啄木鸟如何保护自身大脑不受损, 引起了研究人员的兴趣 [83,84]. 研究人员 [83] 基于 CT 扫描技术, 获得啄木鸟的三维内部结构, 结合有限元计算, 分析啄木鸟身体结构如何分散撞击能量. 结果表明, 啄木鸟独特的身体结构, 使得撞击能量的 99.7% 以应变能储存在体内, 仅 0.3% 被脑组织吸收. 啄木鸟头部的结构, 如鸟喙、头盖骨、舌骨能有效降低大脑的应变能. 进入脑组织的冲击能量最终以热能形式耗散, 导致大脑快速升温. 这就是啄木鸟间歇性啄食树木的原因. 该研究结果可能为材料和器件的防震性能提供设计原则.

然而目前大脑组织的力学研究中尚有一些问题亟待解决, 例如各个本构模型所使用的假设, 需要实验的验证, 但对脑组织, 尤其是人脑开展高应变率冲击实验存在困难; 需要进一步考虑血液、脑脊液的流动对本构模型的影响等.

### 3.1.7 脑组织扩散张量成像技术

水分子在人脑组织中存在两种扩散方式, 在脑脊液及大脑灰质中的扩散近似为各向异性, 在脑白质中的扩散为各向同性. 因此, 获得水分子扩散的各向异性信息, 有助于研究脑组织细微解剖结构及功能改变.

扩散成像技术是基于水分子扩散对磁共振信号产生影响的现象, 通过测量体内水分子扩散运动状况的成像技术. 扩散信号强度由扩散加权因子和表观扩散系数 (apparent diffusion coefficient, ADC) 共同决定. 但 ADC 的值依赖于扩散敏感方向和扩散时间, 且只能反映一个方向上水分子的扩散强度. 利用三个相互垂直方向上施加射频脉冲测量三个方向的 ADC 平均值, 则从一定程度上更加真实地反映了水分子的扩散运动, 该技术称为扩散加权成像 (diffusion weighted imaging, DWI).



然而,这种方法仍然不能全面正确地评估不同组织水分子各向异性扩散特性.

扩散张量成像 (diffusion tensor imaging, DTI) 技术是 DWI 技术的深化与发展. 1994 年, Basser 等 [85,86] 在六个不同方向上施加扩散敏感梯度, 计算出了不同方向的扩散率. 这种基于 DWI 技术, 在多个方向施加扩散敏感梯度的成像技术就是 DTI. DTI 技术是脑组织白质成像中的革命性创新, 不仅能更精确地反映水分子的扩散运动, 而且还能显示体内纤维性结构的走向, 为无创评价体内纤维性结构, 尤其是脑内纤维束的联系和病变开拓了新的前景.

在 DTI 技术中, 水分子的扩散情况用扩散张量  $D$  来表示:

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

基于该张量的本征值、本征向量等参数信息, 可以反映结构的生理、病理信息, 是描述局部微结构和各向异性组织结构特性的有效参数.

扩散张量  $D$  具有三个特征值 ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) 和三个相应的特征向量. 最大特征值表示纤维走向, 扩散张量的迹

$$\text{tr}D = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad (45)$$

由于旋转不变性, 在同一体正常的同一结构内一致性程度较高, 因而在临床上常被用为诊断参数.

为区分脑组织中的各向异性程度, 目前已有一些评价指数, 常用的有: 各向异性分数、相对各向异性指数、容积比等.

各向异性分数 (fractional anisotropy, FA)

$$FA = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(\lambda_1 - \lambda)^2 + (\lambda_2 - \lambda)^2 + (\lambda_3 - \lambda)^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \quad (46)$$

是指各向异性所致的扩散张量占整个扩散张量的比重, 具有旋转不变性和较高的信噪比, 可以提供较好的灰白质对比, 是目前临床应用最广泛的指数之一. FA 值越大, 表示扩散的各向异性越强. 图 2 所示为大脑的 FA 指数成像.

相对各向异性指数 (relative anisotropy, RA)

$$RA = \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda)^2 + (\lambda_2 - \lambda)^2 + (\lambda_3 - \lambda)^2}}{\sqrt{3}\lambda} \quad (47)$$

是扩散张量的各向异性部分与扩散张量总值的比值, 是张量特征值的归一化方差表示, 变化范围从 0 到 1 (各向同性扩散—无穷各向异性).

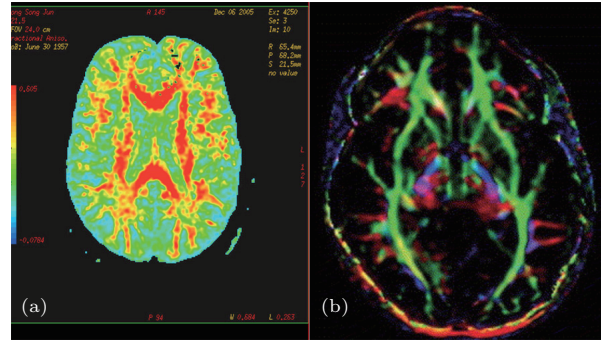


图 2 各向异性分数成像 (a) 普通 FA 图; (b) 彩色 FA 图 [8]

Fig. 2. Imaging of fractional anisotropy: (a) Traditional FA imaging; (b) color coding of FA imaging [8].

容积比 (volume ratio, VR)

$$VR = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda^3} \quad (48)$$

指椭球体积和一个半径为  $\lambda$  的球体积的比值, 其取值范围  $1 \rightarrow 0$  对应各向同性扩散—无穷各向异性.

以上三个参数均可定量地反映水分子在组织中的扩散各向异性. 其中最常用的是 FA 值, 因为它是组织的物理特性, 对每个体素内纤维方向的一致性很敏感, 而且能够较好地体现白质内髓鞘的完整性、纤维的致密性和平行性. 最重要的是各个对象在不同时间、不同成像设备所获得数值具有可比性.

DTI 目前已在定量分析大脑发育、脑肿瘤检测 [87]、脑白质变性等方面获得广泛而成功的应用, 在脑白质纤维的研究中具有广阔的前景, 比如可发现一些疾病的早期改变, 了解主要传导通路的损伤程度; 进行脑肿瘤的术前计划的制订及指导手术. 目前 DTI 最有前景的研究领域还在于将 DTI 技术和血氧水平依赖功能联合应用于脑科学的研究方面, 为脑科学的研究开辟了更广阔的前景. 当然, 目前 DTI 还存在很大的局限性, 还不能成为疾病监测中的金标准. 如何在活体证实 DTI 所追踪的白质纤维走行的精确度与人体是否符合就是当前研究的一个关键.

### 3.1.8 关节软骨的本构模型

对关节软骨的研究追溯到 1743 年 Hunter [88] 的工作. 软骨是两相组织, 含有质量分数 20% 的固



体基质和 80% 的组织间隙液. 这两相各自的力学性质及它们之间的相互作用, 决定了软骨的流变学行为. 压力作用下软骨呈现黏弹性行为, 突然施加负载荷, 关节软骨将立即发生弹性响应, 之后发生蠕变直至达到平衡状态, 这个时间通常长于 1000 s. 组织间隙液的渗透率与压缩状态有关, 并对软骨的黏弹性行为产生显著影响. 两相理论为描述关节软骨变形行为的主要流变学模型.

1980 年, Mow 等 [89] 假定固体基质不可压、线弹性、无耗散, 流体不可压、无耗散, 并认为耗散只发生在两相的摩擦阻力之间, 发展了固体基质黏弹性耗散和组织间隙液弹性耗散的更具普遍性的本构方程. 考虑固体基质的黏弹性耗散和组织间隙液的黏性耗散项的本构方程, 结合实验, Mow 等得到了两相模型非线性渗透率, 和相对运动的摩擦阻力是产生软骨黏弹性性质的主要因素的结论.

后来在 1984 年, Mow 等 [90] 进一步发展了关节软骨的黏弹性性质, 进一步探讨了依赖于压力的渗透率对组织间隙液流动的控制和对黏弹性的贡献. 在小应变假设下, 固体初等理论的各向同性应力应变关系为

$$\sigma^s = -\alpha p \mathbf{I} + E_{1s} \epsilon \mathbf{I} + 2E_{2s} \mathbf{e}, \quad (49)$$

式中,  $p$  是流体表现压强;  $E_{1s}$ ,  $E_{2s}$  分别为固体基质弹性模量;  $\mathbf{e}$  是固体基质的小变形张量. 更一般性的应力-应变关系在 Mow 和 Lai [91] 1979 年的文章中有详细介绍. 研究组织液在组织的多种受压情况下的流动行为, 对于其他两相生物组织的研究, 例如半月板、鼻软骨、韧带等组织均具有促进作用. 然而此时该理论的假设尚缺乏充足的实验验证, 例如固体基质的不可压缩性、黏弹性假设等需要实验的证实. 关于两相本构模型对关节软骨功能的描述, 目前已经有大量实验和模拟方面的研究, 以修正本构模型, 使结果适用于处于不同条件下软骨组织的行为 [92].

### 3.1.9 肝硬化后肝脏本构模型

肝硬化作为当代常见的都市病, 其主要的病理特征是肝脏节点纤维化. 纤维化的肝脏的弹性特征比正常的肝脏更为明显, 如 Yin 等 [27] 的实验结果所示 (图 3). 数据表明硬化的肝脏是超弹性体. 该工作使用 Veronda 和 Westmann [93] 在 1970 年根据

猫皮肤单向拉伸的实验结果提出的超弹本构模型, 来研究肝硬化后肝脏力学特性的研究. Veronda-Westmann 模型基于应变不变量  $J_1, J_2, J_3$ , 其本构方程的完整形式为:

$$W = a \left[ e^{\alpha(J_1-3)} - 1 \right] - b(J_2 - 3) + g(J_3), \quad (50)$$

$a, b, \alpha$  是材料常数;  $g(J_3)$  是与应变第三不变量有关的函数. 硬化后的组织的应变能为

$$W_p = \mu_1 \chi^2 (\ln^2 \lambda_1 + \ln^2 \lambda_2 + \ln^2 \lambda_3) + g_1(J_3), \quad (51)$$

其中

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\mu_0}{(2\omega - N - \phi)(\mu_1 - \mu_0)}, \\ N &= \frac{8(14\iota - 5)\iota^3}{9(1 - \nu)}, \\ \omega &= \frac{1}{30}(1 - \nu)\beta + \frac{N}{5}, \\ \beta &= \frac{15(1 - \nu)\mu_0}{\mu_1 - \mu_0} + 2(4 - 5\nu); \end{aligned}$$

$\mu_0$  和  $\mu_1$  分别是正常肝脏组织和硬化组织的剪切模量;  $\phi$  是硬化组织的体积分数;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  分别是 Boyce 模型中链的三个主方向的伸长;  $\iota$  是硬化组织的半径与相邻组织距离之比;  $\nu$  是 Poisson 比. 总应变能为

$$W = (1 - 2\iota)W_c + \phi W_p. \quad (52)$$

该本构关系有利于进一步详细了解肝硬化的机理, 便于疾病的早期诊断和后期治疗.

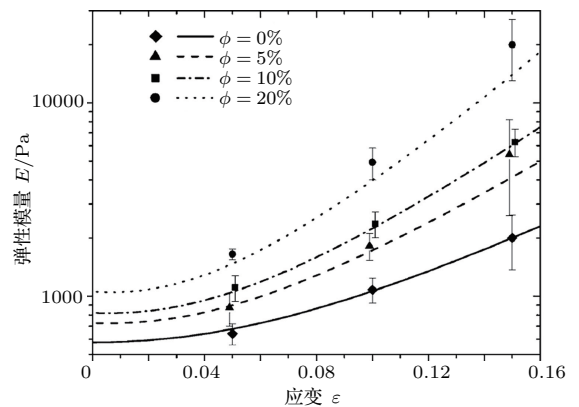


图 3 不同预加载应变下人体肝脏弹性模量的变化 [27]

Fig. 3. Comparisons of effective elastic modulus between the proposed model and the experimental data with 5%, 10%, 15% uniaxial preload strain for human liver [27].

### 3.2 本构关系在非生物体系中的应用

#### 3.2.1 移动接触线中的熵弹性

将一个液滴置于固体表面, 将有固、液、气三相共存, 同时有固-气、固-液、液-气三种界面共存. 其中, 固-气和液-气界面的夹角称为接触角, 固-液-气三相共存的形貌为一条闭合曲线, 称为三相接触线. 液滴在固体表面的润湿与铺展, 是固-气界面被固-液界面取代的动态过程. 对于铺展表面, 铺展过程伴随三相接触线不断向前推移, 形成移动接触线.

1984年, Joanny和de Gennes<sup>[94]</sup>提出了表面缺陷对三相接触线的“钉扎-畸变-去钉扎-跳跃”的物理图像. 对于有单个缺陷的表面, 三相接触线通过缺陷处时像被拉长的弹簧一样出现弹性行为, 如图4所示.

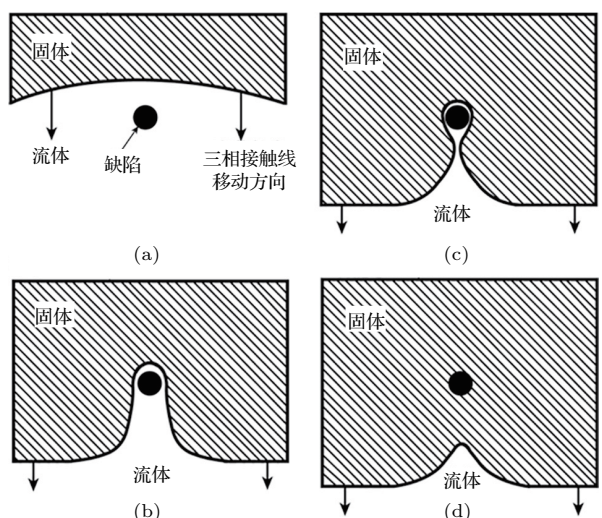


图4 三相接触线通过单个缺陷时弹性行为的物理图像<sup>[7]</sup>

Fig. 4. Schematic time sequence of the elastic motion of a triple contact line going through a defect<sup>[7]</sup>.

当接触线离该缺陷较远时, 三相接触线和缺陷之间无相互作用; 当接触线遇到该缺陷时, 缺陷将对接触线进行“钉扎”作用, 此时将引起接触线局部的畸变, 移动接触线像弹簧一样被拉长. 随着接触线的前移和张力的进一步增大, 发生畸变的接触线和缺陷将发生“去钉扎”, 滑过该缺陷点并跳跃回来未发生畸变的接触线整体部分<sup>[7]</sup>.

De Gennes通过三相接触线畸变的幅值, 和三相接触线畸变引起的接触线额外的毛细力, 类比弹簧的胡克定律, 计算得到接触线的弹性系数

$k = \pi\gamma_{lv}/\ln(L/d)$  ( $\gamma_{lv}$ 为液-气界面张力,  $L$ 为宏观液滴的尺度或可忽略重力影响的毛细尺度,  $d$ 为缺陷直径). 该物理图像于1992年由Nadkarni和Garoff<sup>[95]</sup>在实验上验证.

#### 3.2.2 凝胶本构模型

凝胶兼具聚合物网络和小的溶剂分子. 聚合物网络的存在, 使得凝胶具有类似弹性固体的行为. 凝胶可以吸入大量的液体分子, 因此具有输运能力. 凝胶的这种组成, 导致凝胶构成多孔弹性体, 有诸多独特的性质, 在自然界和实际应用中广泛存在. 在外力或者化学势梯度的影响下, 聚合物网络发生变形, 与此同时, 溶剂分子发生迁移, 从而组织体现出多孔介质的弹性性质<sup>[96]</sup>.

Yoon等<sup>[97]</sup>通过实验和理论两种方式研究了水凝胶(hydrogels)在膨胀和压缩过程中其内部溶剂的输运现象, 证实了此线性的多孔介质弹性理论依然可以描述诸如水凝胶的超弹性材料, 这项研究结果更加拓展了线性多孔介质理论的应用范围. 相应的本构模型为前述2.4节线性、各向同性多孔弹性介质本构模型. 由于线性多孔介质理论的简洁性, 这项研究结果拓展了其应用范围. 然而, 由于凝胶聚合物具有吸收大量溶剂的能力, 导致体积可以发生剧烈变化, 研究本构模型来描述凝胶的耦合变形和扩散行为仍然极具挑战性<sup>[97-100]</sup>.

#### 3.2.3 蛋白质-矿物纳米级复合材料本构模型

在自然界中, 大量的蛋白质-矿物纳米级复合材料有着不同寻常的强度. 随着矿物晶体的尺寸缩小到纳米尺度, 材料对缺陷失去了敏感性, 材料强度则接近原子键的理论强度, 对其本构关系开展研究有利于优化该复合材料的断裂韧性. Ji和Gao<sup>[101]</sup>在2004年为蛋白质-矿物纳米级复合材料提出了拉-剪链模型, 如图5所示.

在这一模型中, 蛋白质承受剪应力, 由较大纵横比的矿物质承担拉应力, 并假设应力主要沿矿物质的长度方向, 因此材料中的最大拉应力和平均拉应力可以写成

$$\sigma_m = \vartheta\tau_p, \quad \bar{\sigma}_m = \vartheta\frac{\tau_p}{2}, \quad (53)$$

$\tau_p$ 为蛋白质受到的剪应力,  $\vartheta = L/h$ 是矿物质薄片的纵横比,  $L$ 和 $h$ 分别是薄片的长度和厚度.

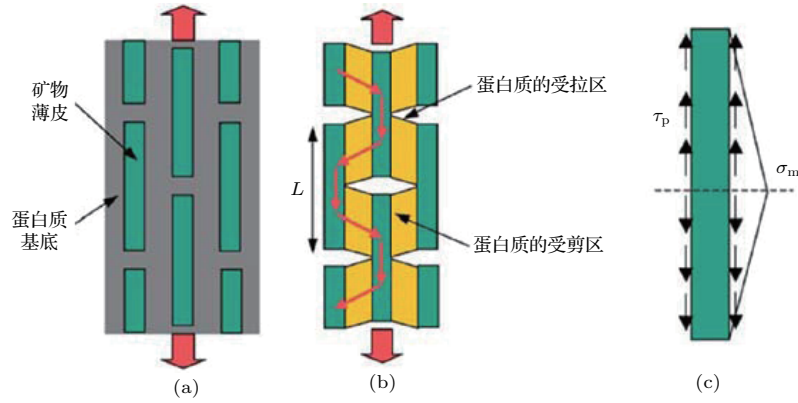


图5 生物复合材料模型 [101]

Fig. 5. Models of biocomposites [101].

在表征材料的弹性时, 考虑到只有矿物质薄片承受拉应力, 因此材料的等效拉应力为:

$$\sigma = \phi \bar{\sigma}_m, \quad (54)$$

$\phi$  是矿物质的体积分数. 材料的等效应变是由蛋白质的剪应变和矿物质薄片的拉应变组成, 因此表示为

$$\varepsilon = \frac{\Delta_m + 2\varepsilon_p h(1 - \phi)/\phi}{L}, \quad (55)$$

其中  $\Delta_m = \sigma_m L / (2E_m)$  和  $\varepsilon_p = \tau_p / \mu_p$  分别是矿物质薄片的伸长和蛋白质的剪应变,  $E_m$  和  $\mu_p$  分别是矿物质薄片的弹性模量和蛋白质的剪切模量. 结合 (53), (54), (55) 式可以得到材料的等效杨氏模量为

$$\frac{1}{E} = \frac{4(1 - \phi)}{\mu_p \phi^2 \vartheta} + \frac{1}{\phi E_m}. \quad (56)$$

在描述材料的黏弹性模型时, 利用玻尔兹曼叠加积分, 将其本构关系表示为

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int C_{ijkl}(t - \tau) \frac{d\sigma_{kl}}{d\tau} d\tau, \quad (57)$$

其中  $C_{ijkl}(t)$  是蠕变柔量张量,  $\tau$  是弛豫时间. 每一份弛豫时间  $\tau_i$  与一个柔量  $C_{ijkl}^{(i)}$  相关联, 因此蠕变柔量可以表示为

$$C_{ijkl}(t) = C_{ijkl}^{(0)} + \sum_{i=1}^n C_{ijkl}^{(i)} (1 - e^{-t/\tau_i}). \quad (58)$$

假设蛋白质松弛可用单一的弛豫时间来描述, 则蛋白质的一维应力应变关系表示为

$$\varepsilon(t) = C_p^\infty \sigma + (C_p^0 - C_p^\infty) \times \int_0^t \exp[-(t-s)/\tau] \dot{\sigma}(s) ds, \quad (59)$$

其中  $C_p^\infty$  是蛋白质的长期剪切柔量,  $C_p^0$  是蛋白质的短期剪切柔量. 因此在瞬间加上载荷

$\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ , 蛋白质的蠕变本构方程为

$$\varepsilon(t) = [C_p^\infty + (C_p^0 - C_p^\infty) \exp(-t/\tau)] \sigma(t), \quad (60)$$

因此, 蛋白质的蠕变柔量为

$$C_p = C_p^\infty + (C_p^0 - C_p^\infty) \exp(-t/\tau), \quad (61)$$

由此可得生物复合材料的蠕变柔量为

$$C(t) = \frac{4(1 - \phi)}{\phi^2 \rho^2} [C_p^\infty + (C_p^0 - C_p^\infty) \exp(-t/\tau)] + \frac{1}{\phi} C_m. \quad (62)$$

利用 Griffith 判据可以估计矿物质相的临界长度:

$$h^* \approx \alpha^2 \frac{\gamma E_m}{\sigma_{th}^2}, \quad (63)$$

其中  $\gamma$  形成新表面所需能量. 如果裂纹极小且深度是材料厚度的一半, 则系数  $\alpha = \sqrt{\pi}$ ,  $\sigma_{th}$  是完美材料的理论强度. 如果矿物相小于这一尺度, 则可以认定为完美晶体. 为了确定断裂区域的尺寸  $w$ , 使用虚内键方法, 利用 J 积分得到断裂能量:

$$\varpi = w \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (64)$$

虽然这些蛋白质-矿物纳米级复合材料的结构通常非常复杂, 具有多尺度性和多级结构, 但同时又表现出非凡的简单和优雅性. 在生物复合材料中矿物相在材料的刚度上有着重要的贡献, 而蛋白质则在材料的韧性上扮演重要角色. 本构关系的建立有助于复合生物材料在生活和生产中的推广和应用.

### 3.3 本构关系在3D/4D打印中的应用

3D打印又称增量制造、积层制造. 3D打印基于三维模型, 在计算机控制下, 通过不断添加材料、逐层打印的方式, 获得目标形状和几何特征的三维



物体. 3D 打印技术已经在汽车、飞机、建筑、服装、食品、生物组织、艺术等诸多方面具有广泛应用, 并具有速度快、打印范围广等优势.

3D 打印常用的材料类型包括热塑性塑料、合金、光聚合物、金属粉末、石膏粉末等. 目前已有多种不同的工艺技术, 不同的技术区别主要在于层叠方法和使用的材料, 例如, 通过熔化或软化材料分层, 光刻加工液体原料, 在这些工艺过程中, 多种多样的软材料经过降温、光刻等过程固化, 从而形成目标形状并具备目标性能. 具体来说, 技术类型大致分为挤压沉积技术、颗粒材料组合技术、层压技术和光聚合技术<sup>[102]</sup>. 挤压沉积技术制作方法是熔融材料输出并即时硬化形成分层. 热塑丝或金属丝从卷轴上逐渐被输送到加热室, 然后由喷嘴输出. 喷头的移动和材料的输出由计算机监控操纵. 颗粒材料结合技术打印过程中, 使用烧结、激光、电子束等技术熔化粉末颗粒, 来完成部件的生产. 层压技术是将薄片材料层层压合在一起组合出成品. 光聚合是液态光聚物在可控光照射下, 进行逐层固化, 直到整个模型成型. 在这些技术过程中, 材料在温度场、压力场、化学场作用下经历了物理化学状态的转变. 因此, 为了提高产品力学性能, 提高打印过程的精度控制, 需要建立适当的本构关系描述材料在不同环境条件下的性质. 近些年来, 3D 打印逐步向 4D 打印技术过渡. 4D 打印技术是在 3D 打印的基础上, 使用具有“形状记忆”效应的材料, 使得打印出的构件可以在一定条件下实现原有形状和特定形状之间的相互转换. 下面以近期若干 3D 打印应用的重大突破为例, 介绍本构关系在 3D 和 4D 打印技术中的应用.

### 3.3.1 3D 打印在大脑研究中的应用

Tallinen 等<sup>[103]</sup>在 2016 年发表了有关大脑脑回和沟壑形成机理的工作. 他们通过核磁共振扫描得到了胎儿的大脑, 并根据发育中光滑胎儿大脑的核磁共振图像, 利用 3D 打印制成大脑模型. 将该大脑模型浸入溶液, 模型外层相对于内部膨胀, 以模仿大脑皮层的生长. 这种相对膨胀使得外层处于力学不稳定性, 产生的褶皱与胎脑的沟回非常相似. 随后, 他们利用有限元对大脑模型进行分析. 作者采用 neo-Hookean 模型, 假设大脑为 neo-Hookean 材料, 而 neo-Hookean 材料的应变能只和第一应变不变量有关, 因此文中作者给出的本

构关系为

$$W = \frac{\mu}{2} [\text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)I_1^{-2/3} - 3] + \frac{K}{2}(I_1 - 1)^2, \quad (65)$$

上式中,  $W$  是应变能密度,  $\mu$  是剪切模量,  $\mathbf{F}$  是变形梯度,  $I_1$  是  $\mathbf{F}$  的第一主不变量,  $K$  是体积模量.

文中通过测量核磁共振的图像, 认为大脑皮层比白质更加柔软, 两者的剪切模量之比为 0.86. 模量的变化取决于公式  $\mu(y) = \theta(y)\mu_c + [1 - \theta(y)]\mu_w$ . 其中函数  $\theta(y) = [1 + e^{10(y/h-1)}]^{-1}$  用来区分大脑皮层和白质区域. 当  $\theta$  从 1 变化到 0, 表示从大脑皮层过渡到白质区域. 通过这些实验与数值计算分析, 他们证明了脑皮层力学不稳定性机理主要导致脑褶皱的形成.

### 3.3.2 3D 打印在陶瓷生产中的应用

Eckel 等<sup>[104]</sup>于 2016 年发表了有关 3D 打印方法制造陶瓷的工作. 他们提出了一种 3D 打印制造陶瓷的新方法, 克服了原有 3D 打印陶瓷技术生产速度缓慢、生产过程须添加引起材料破裂倾向的物质的难题. 该方法生产的陶瓷材料高度致密, 并表现出高的强度和韧性, 且能被塑成复杂、弯曲且多孔的形状. 新方法采用立体平版印刷技术, 以陶瓷聚合物前体为基础, 随后进行高温烧结, 引起聚合物热解, 最终得到高度致密、几乎没有孔隙的陶瓷产物. 因为这些聚合物在多聚化时能截留紫外光, 所以在打印过程中无须再添加用于吸收紫外光的额外添加物. 这就克服了传统方法必须逐一添加每一层, 然后接触紫外光的缺陷, 因而大幅提升了生产效率. 同时, 由于没有添加物引起的材料的破裂倾向, 这种方法打印出的陶瓷是一种破裂倾向性很小的强韧材料. 在用电子显微镜分析终产物时, 研究人员没有发现孔隙或表面破裂.

这种新陶瓷材料具有高强度的两个原因是具有周期性的结构和材料高固有强度. 材料的弹性模量和断裂强度由 Gibson 和 Ashby<sup>[105]</sup>给出:

$$\begin{aligned} E &\approx C_1 (E_s) (\rho/\rho_s)^{n_1}, \\ \sigma &\approx C_2 (\sigma_s) (\rho/\rho_s)^{n_2}, \end{aligned} \quad (66)$$

其中,  $E$  为弹性模量;  $\sigma$  为断裂强度;  $\rho/\rho_s$  为材料相对密度;  $C_1, C_2$  为与材料几何构形和加载方向有关的常数. 指数  $n_1, n_2$  分别为 2 和 1.5. 材料的断裂强度为

$$\sigma = \sqrt{\frac{E\gamma_r}{4ad_0}}, \quad (67)$$



式中,  $\gamma$  为材料表面能,  $d_0$  为原子间距,  $a$  为裂纹半长,  $r$  为裂纹尖端半径.

### 3.3.3 3D 打印在纤维网制造中的应用

Giorgio 等<sup>[106]</sup>在2015年发表的文章中,展示了一种利用3D打印制造高弹性纤维网的方法.为了描述纤维网的变形,文章通过每根纤维的变形构建了网状构件的本构关系.  $\mathbf{L}$  和  $\mathbf{O}$  是定义在参考构形的相互正交的单位矢量,用来描述纤维变形前的方向,  $\mathbf{l}$  和  $\mathbf{o}$  是定义在当前构形的单位矢量,用来描述纤维变形后的方向.网状构件的变形用  $\mathbf{r}$  表示,由此可得纤维变形为

$$\lambda \mathbf{l} = (\nabla \mathbf{r}) \mathbf{L}, \quad i \mathbf{o} = (\nabla \mathbf{r}) \mathbf{O}, \quad (68)$$

$\lambda$  和  $i$  是  $\mathbf{l}$  和  $\mathbf{o}$  方向上的伸长量. 用  $\Xi$  表示剪切变形:

$$\sin \Xi = \mathbf{l} \cdot \mathbf{o}, \quad (69)$$

由(68)式可得

$$\nabla \mathbf{r} = \lambda \mathbf{l} \otimes \mathbf{L} + i \mathbf{o} \otimes \mathbf{O}, \quad (70)$$

Cauchy-Green 变形张量可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{D}^T \mathbf{D} \\ &= \lambda^2 \mathbf{L} \otimes \mathbf{L} + i^2 \mathbf{O} \otimes \mathbf{O} \\ &\quad + \lambda i \sin \Xi (\mathbf{L} \otimes \mathbf{O} + \mathbf{O} \otimes \mathbf{L}), \end{aligned} \quad (71)$$

其中  $\mathbf{D}$  是变形梯度张量. 由(68)式得

$$U \mathbf{n} = (\nabla \mathbf{r}) \mathbf{L} \times (\nabla \mathbf{r}) \mathbf{O}, \quad (72)$$

其中  $U = \lambda i |\cos \Xi|$ ,  $\mathbf{n}$  是变形面的单位法向量.

网状构件变形的二阶导数为

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \mathbf{r} &= (\mathbf{g}_l + K_L \mathbf{n}) \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{L} \\ &\quad + (\mathbf{g}_o + K_O \mathbf{n}) \otimes \mathbf{O} \otimes \mathbf{O} \\ &\quad + (\mathbf{T} + T \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{L} \otimes \mathbf{O} + \mathbf{O} \otimes \mathbf{L}), \end{aligned} \quad (73)$$

其中,  $\mathbf{g}_l = \lambda^2 \Lambda_l \mathbf{p} + (\mathbf{L} \cdot \nabla \lambda) \mathbf{l}$ ,  $\mathbf{g}_o = i^2 \Lambda_o \mathbf{q} + (\mathbf{O} \cdot \nabla \lambda) \mathbf{o}$ ,  $\mathbf{T} = (\mathbf{L} \cdot \nabla i) \mathbf{o} + \lambda i \zeta_o \mathbf{q} = (\mathbf{O} \cdot \nabla \lambda) \mathbf{l} + \lambda i \zeta_l \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{n} \times \mathbf{l}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}$ ,  $K_L = \lambda^2 \kappa_l$ ,  $K_O = \lambda^2 \kappa_o$ ,  $T = \lambda \xi f$ . 其中  $\kappa_l$  和  $\kappa_o$  是法向曲率,  $\Lambda_l$  和  $\Lambda_o$  是测地曲率,  $\zeta_l$  和  $\zeta_o$  是 Tchebychev 曲率,  $f$  表征变形曲面的旋转量. 测地曲率和 Tchebychev 曲率分别表示为

$$\begin{aligned} U \Lambda_l &= \mathbf{L} \cdot \nabla (i \sin \Xi) - \mathbf{O} \cdot \nabla \Xi, \\ U \Lambda_o &= \mathbf{L} \cdot \nabla \xi - \mathbf{O} \cdot \nabla (\lambda \sin \Xi), \\ U \zeta_l &= U \cdot \Lambda_o + \lambda \mathbf{O} \cdot \nabla (\sin \Xi), \end{aligned} \quad (74)$$

$$U \zeta_o = U \cdot \Lambda_l - i \mathbf{L} \cdot \nabla (\sin \Xi). \quad (75)$$

综上, 应变能密度可以表示为

$$\begin{aligned} W &= w(\lambda, i, U) + \frac{1}{2} (A_l |\mathbf{g}_l|^2 + A_o |\mathbf{g}_o|^2 + A_\Gamma |\mathbf{T}|^2 \\ &\quad + k_L K_L^2 + k_O K_O^2 + k_T T^2), \end{aligned} \quad (76)$$

$$w(\lambda, i, U)$$

$$= \frac{1}{2} (E_L \chi_L^2 + E_O \chi_O^2) - \aleph (\ln U + 1 - U), \quad (77)$$

$$\chi_L = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1), \quad \chi_O = \frac{1}{2} (i^2 - 1), \quad (78)$$

其中  $A_l$ ,  $A_o$ ,  $A_\Gamma$ ,  $k_L$ ,  $k_O$ ,  $k_T$ ,  $E_L$ ,  $E_O$ ,  $\xi$  为材料常数.

这一本构关系被应用到有限元的模拟, 所得的结果与实验结果很好地符合, 证明了该本构关系的有效性.

### 3.3.4 4D 打印——折叠技术的应用

折叠技术通常被形象地类比为折纸, 其在生产和生活的运用非常广泛. 例如在卫星的太阳能电池板上, 如果能使用 4D 打印技术, 则可以省去相关的传动装置, 从而有效地减少载荷. 在 2014 年, Qi 等<sup>[107]</sup>提出利用 4D 打印技术制造出曲率可变的薄层, 从而使薄板在温度改变的情况下从二维变成三维构件. 曲率可变的薄层可作为构件中的铰, 利用温度的变化使得薄层应力失配从而实现弯曲. 将薄层简化为梁以描述薄层的弯曲, 提出材料的本构关系. 图 6 为铰结构和变形过程.

为了构建本构关系, 定义薄层总变形为  $\lambda^{\text{total}} = l/L$ , 其中  $l$  为薄层当前构形的长度,  $L$  为参考构形中的长度, 薄层的变形分为受力产生的变形  $\lambda$  和由于温度改变产生的变形  $\lambda^{(T)}$ . 因此, 总变形可表示为  $\lambda^{\text{total}} = \lambda^{(T)} \lambda$ .

另外, 铰的变形分为三步, 首先在一个较高的温度  $T_H$  使铰产生应变  $\varepsilon_0$ . 此时薄层的拉伸为  $\lambda_0$  ( $\lambda_0 = 1 + \varepsilon_0$ ). 其中假设纤维和基底的应变一致, 则由于受力而产生的应变可表示为

$$\varepsilon_M(t) = \ln \left( \frac{t}{t_1} \varepsilon_0 + 1 \right) \quad (t \leq t_1), \quad (79)$$

其中  $\varepsilon_M$  是基底的 Hencky 应变,  $t_1$  是变形时间. 其次, 在冷却阶段保持应变, 将温度降至  $T_L$ . 冷却时间是  $t_2 = (T_H - T_L)/\dot{T}$ , 其中  $\dot{T}$  为冷却速度. 基底和纤维由于温度引起的变化为

$$\begin{aligned} \lambda_M^{(T)}(t) &= 1 + \alpha_M (T - T_H), \\ \lambda_F^{(T)}(t) &= 1 + \alpha_F (T - T_H), \end{aligned} \quad (80)$$

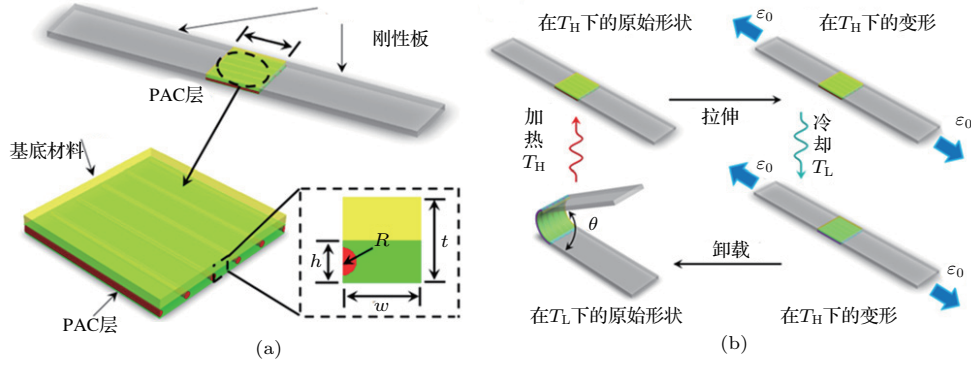


图6 铰结构及其变形过程 [107]

Fig. 6. The construction and thermomechanical programming of hinges [107].

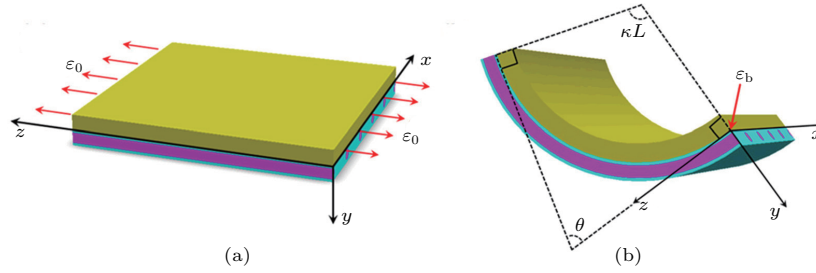


图7 铰的弯曲 [107]

Fig. 7. Schematics of achieving bending of a hinge [107].

其中  $\alpha_M, \alpha_F$  分别是基底和纤维的热膨胀系数。由此可以分别得出基底和纤维由于受力产生的变形为:

$$\begin{aligned} \lambda_M(t) &= \lambda_0/\lambda_M^{(T)}(t), \\ \lambda_F(t) &= \lambda_0/\lambda_F^{(T)}(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2). \end{aligned} \quad (81)$$

因此由于外力而产生的应变可以表示为

$$\begin{aligned} \varepsilon_M(t) &= \ln \left[ \lambda_0/\lambda_M^{(T)}(t) \right], \\ \varepsilon_F(t) &= \ln \left[ \lambda_0/\lambda_F^{(T)}(t) \right] \quad (t_1 \leq t \leq t_2). \end{aligned} \quad (82)$$

第三阶段将约束释放,薄片会产生曲率  $\kappa(t)$ 。图7为变形前后薄片的对比,由于弯曲会在  $y = 0$  的面上产生变形  $\Delta\lambda(0, t) = 1 + \varepsilon_b(t)$ , 在垂直于  $y$  轴的其他面上变形为

$$\Delta\lambda(y, t) = 1 + \varepsilon_b(t) + y\kappa(t), \quad (83)$$

所以在弯曲时的总变形为

$$\begin{cases} \lambda_M(y, t) = \Delta\lambda(y, t) \lambda_0/\lambda_M^{(T)} \\ \lambda_F(y, t) = \Delta\lambda(y, t) \lambda_0/\lambda_F^{(T)} \end{cases} \quad (t > t_2). \quad (84)$$

Hencky 应变为

$$\begin{cases} \varepsilon_M(y, t, \lambda_0, \lambda_M^{(T)}, \varepsilon_b, \kappa) \\ = \ln \left( \lambda_0/\lambda_M^{(T)} \right) + \varepsilon_b(t) + y\kappa(t), \\ \varepsilon_F(y, t, \lambda_0, \lambda_F^{(T)}, \varepsilon_b, \kappa) \\ = \ln \left( \lambda_0/\lambda_F^{(T)} \right) + \varepsilon_b(t) + y\kappa(t), \end{cases} \quad (t > t_2). \quad (85)$$

根据力平衡和力矩平衡:

$$\begin{cases} \sum F = \iint \sigma_M \left[ \varepsilon_M(y, t, \lambda_0, \lambda_M^{(T)}, \varepsilon_b, \kappa) \right] dy dx \\ + \iint \sigma_F \left[ \varepsilon_F(y, t, \lambda_0, \lambda_F^{(T)}, \varepsilon_b, \kappa) \right] dy dx = 0, \\ \sum M = \iint \sigma_M \left[ \varepsilon_M(y, t, \lambda_0, \lambda_M^{(T)}, \varepsilon_b, \kappa) \right] y dy dx \\ + \iint \sigma_F \left[ \varepsilon_F(y, t, \lambda_0, \lambda_F^{(T)}, \varepsilon_b, \kappa) \right] y dy dx = 0, \end{cases} \quad (86)$$

通过求解上述方程组可以得到  $\varepsilon_b$  和  $\kappa$ 。一旦得到  $\kappa$  可以通过几何关系

$$\kappa L + \theta = \pi \quad (87)$$

得到弯曲角  $\theta$ 。薄层的基底部分的本构关系为

$$\sigma_M = E_M(T)e_M, \quad (88)$$

其中,  $E_M(T)$  是随温度改变的杨氏模量  $E_M(T) = 3N_M k_B T$ ,  $N_M$  是交联密度,  $k_B$  是 Boltzmann 常数,  $T$  是绝对温度. 对于纤维, 其本构方程由两部分组成: 弹性响应的平衡分支, 黏弹性响应的非平衡分支:

$$\sigma_F = \underbrace{E_F(T)\varepsilon_F}_{\text{Equilibrium}} + \underbrace{\sum_{m=1}^n E_{\text{mon}}^m \int_0^t \frac{\partial \varepsilon_F(T, t)}{\partial s} \exp\left[-\int_s^t \frac{dt'}{\tau_m(T)}\right] ds}_{\text{Nonequilibrium}} \quad (89)$$

其中  $E_F(T)$  是随温度改变的杨氏模量  $E_F(T) = 3N_F k_B T$ ,  $E_{\text{mon}}^m$  和  $\tau_m(T)$  分别是第  $m$  个不平衡分支的杨氏模量和弛豫时间.  $\tau_m(T)$  可以表示为

$$\tau_m(T) = a_T(T)\tau_m^R. \quad (90)$$

$\tau_m^R$  是第  $m$  分支在参考温度下的弛豫时间,  $a_T(T)$  计算方法是:

$$\log a_T(T) = -\frac{C_1(T - T_r)}{C_2 + (T - T_r)} \quad (T \geq T_r), \quad (91)$$

$$\ln a_T(T) = \exp\left[-\frac{AF_c}{k_B} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_r}\right)\right] \quad (T < T_r), \quad (92)$$

其中  $C_1$ ,  $C_2$  和  $A$  是材料常数;  $F_c$  是构形能,  $T_r$  是参考温度.

该本构关系成功地预测了材料的弯曲, 并且实现了让传统的折纸折叠成目标结构而“动起来”.

### 3.3.5 4D 打印在仿生材料中的应用

在自然界中, 植物的纤维有着独特力学性能, 传统的金属的泊松比为  $-1$  到  $0.5$ . 但是植物的纤维则可以大于  $0.5$ . 基于此, Gladman 等<sup>[108]</sup> 利用植物细胞壁的力学特性, 制造出一种复合材料, 使得利用该材料构建的结构在水的浸泡下可以产生定向的弯曲变形. 材料的横向膨胀应变大于纵向膨胀应变. 构建的结构由两个组成一定夹角  $\theta$  的纤维构成. 采用经典的 Timoshenko 模型描述结构的弯曲变形, 将应变分成弹性应变  $\varepsilon^e$  和膨胀应变  $\varepsilon^s = \begin{pmatrix} \alpha_{//} & 0 \\ 0 & \alpha_{\perp} \end{pmatrix}$ , 即  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^s$ . 复合材料为满足正交异性弹性材料  $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e$ , 其中弹性模量  $E_{ijkl}$  满足  $E_{xxxx} = E_{//}$ ,  $E_{yyyy} = E_{\perp}$ ,  $E_{xyxy} = E_x$ . 在打印时, 第一层的纤维沿着  $x$  轴方向, 第二层沿

着  $x \cos \theta + y \sin \theta$  方向. 因此第二层的弹性模量为

$$E_{mnpq}(\theta) = \tau_{im}(\theta) \tau_{ij}^{-1}(\theta) \tau_{kp}(\theta) \tau_{lp}^{-1}(\theta) E_{ijkl}, \quad (93)$$

应变为

$$\varepsilon_{ij}(\theta) = \tau_{ik}(\theta) \tau^{-1}(\theta)_{jl} \varepsilon_{kl}, \quad (94)$$

其中  $\tau_{ik}$  和  $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ji}$  分别是旋转张量的分量及其逆. 定义膨胀位移为  $u^s(x, y) = \int dA \varepsilon_{ij}^s$ , 并且使第一层和第二层的位移相等, 即

$$\begin{aligned} & \int dA \left[ \varepsilon_{ij}^{s(1)} + \frac{1}{a_1} E_{ijkl}^{-1}(0) M_{kl} \right] \\ &= \int dA \left[ \tau_{ik}(\theta) \tau_{jl}^{-1}(\theta) \varepsilon_{kl}^{s(2)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{a_2} E_{ijmn}^{-1}(\theta) M_{mn} \right], \quad (95) \\ M_{ij} &= \int_{-a_1}^0 E_{ijkl}(0) \kappa_{kl} z^2 dz \\ & \quad + \int_0^{a_2} E_{ijkl}(\theta) \kappa_{kl} z^2 dz, \quad (96) \end{aligned}$$

其中  $\kappa$  是曲率张量,  $a_1$  和  $a_2$  是层厚. 给定膨胀张量和弹性模量, 可以求解出曲率张量. 由此得到平均曲率  $H = \frac{1}{2} \text{tr} \kappa$  和高斯曲率  $K = \det \kappa$ , 用来表征结构的弯曲.

利用该本构关系打印出来的网状结构, 在水中浸泡就可以弯曲成特定的形状, 如图 8 所示.

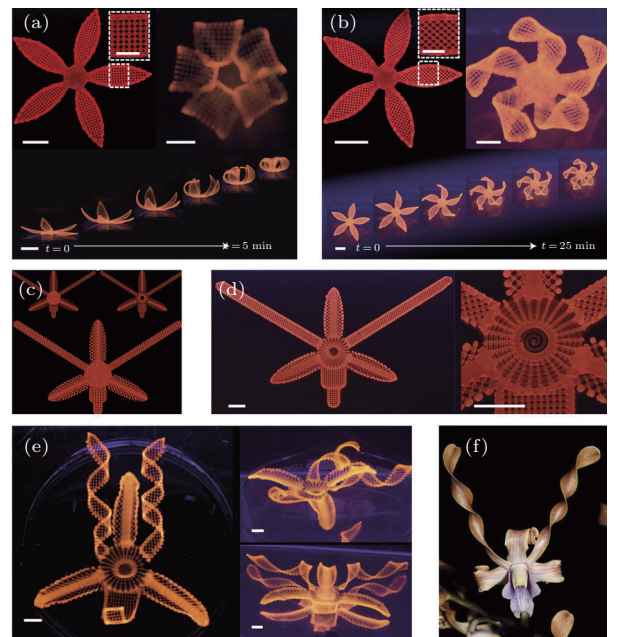


图 8 用仿生 4D 打印制造的花朵<sup>[108]</sup>

Fig. 8. Complex flower morphologies generated by biomimetic 4D printing<sup>[108]</sup>.

3D和4D打印的独特优势,使其在广阔的应用领域内有巨大发展潜力.例如,在一些地方,3D打印住房已经成为现实.这种建筑方式与传统建筑方式相比,具有快速、廉价的特点.近年来,更有学者设想在月球和火星上,就地取材,利用3D打印技术建设基地<sup>[109]</sup>.在蓬勃发展的各种3D,4D打印技术中,无疑地,研究其中的本构关系将起到至关重要的作用.

#### 4 学科发展前沿问题

软物质力学的出现和发展是典型的应用驱动,因此软物质力学研究时需要针对几类有明确应用前景的对象.近年来国内外软物质力学相关会议议题集中在活性软材料、柔性电子器件、微小液滴与界面相互作用、细胞生物组织、生物大分子、反应凝胶和离子聚合物金属复合材料、3D打印、液晶、仿生材料、泥沙颗粒流、锂电池、形状记忆高分子材料等方面<sup>[110-112]</sup>.由此,结合目前国内外的研究进展,我们将连续介质力学框架内软物质力学的关键问题和发展方向进行了归纳,主要分为以下几个方面.

1) 固-液界面动力学问题<sup>[113]</sup>.软物质所处的环境多涉及与硬物质的界面接触,如壁虎、昆虫等生物通过爪垫处液膜在固体壁面自由爬行<sup>[114]</sup>,自清洁表面固体的微结构与液滴相互作用,脑组织发育过程褶皱的产生,皮肤起皱现象.能源方面,亟需发展非常规油气资源开采技术,我国页岩气储量世界第一,但开采技术尚不成熟,采收率仅为5%—15%,水力压裂作为页岩气开采的两个关键核心技术之一,其研究将对我国能源问题的缓解起到极大的促进作用<sup>[115]</sup>,因此,研究压裂流体(压裂液,超临界流体等)与井壁及岩体的相互作用,包括压裂流体与岩石界面的吸附/解吸附问题,在岩石表面的润湿/润湿反转问题,油气在固体缝隙中的运输,是油气开采中亟待解决的关键科学问题,也是软物质-硬物质界面力学问题的难点.软物质中亲液与疏液作用是最重要的分子相互作用<sup>[2]</sup>,这种作用在胶体、液晶、聚合物等广阔的体系有着至关重要的作用<sup>[116]</sup>,因此开展润湿/电(磁、热等外场)润湿问题的研究,具有重要应用意义<sup>[117]</sup>.根据以上可以归纳出软物质在自然界和应用领域中广泛存在着固-液界面动力学问题.固-液耦合界面的复

杂性,对传统连续介质力学提出新的挑战<sup>[118]</sup>,同时也是当前构成软物质理性连续介质力学的重要组成部分.

2) 耦合外场作用,构建本构方程.微小的外场变化,可能引起软物质体系的巨大响应,这是软物质体系的基本特征之一.例如,介电高弹聚合物材料,在较小的电场作用下,可以发生大变形行为;一些水凝胶类型对于环境温度、pH值具有灵敏的力学响应;胶体、颗粒体系对于添加的少量化学物质可能产生很大的力学、化学性质的改变.这些对外场变化的敏感响应,使得活性软材料在机器人、微流体、俘能器、石油采集、柔性电路转印、心脏或大脑贴膜传感器、人体智能贴膜传感器等各种领域有着广阔的应用前景,而力学成果在软材料的制备、应用以及软材料与环境相互作用的分析中提供重要、甚至指导性支持的作用<sup>[110]</sup>.如何在传统的连续介质力学中耦合化学场、电场等外场作用,以及将应力与扩散、化学反应结合,以描述材料对于多种刺激的响应,如光照、温度、pH值、电场、磁场等引起的大变形,成为软物质力学的一大挑战.此外,构建参数较少的本构模型来合理描述软物质复杂的耦合行为也是软物质理性连续介质力学建立的难点.

3) 加强学科间交叉融合.例如,软物质的自组织等行为,可能无法使用现有的力学框架解释和预测,需要发展新的理论,切实结合生物学、化学等学科,特别是由热力学出发的新理论;血管、肌肉、脑组织等生物器官组织,需要力学与生理学、解剖学、组织形态学领域的知识有机地结合起来<sup>[119]</sup>;胶体、表面活性剂、生物膜等类软物质的特性是基于他们的化学结构和官能团性质,研究这类物质的行为,必须在力学框架内结合化学特征考虑;蛋白质、DNA、细胞膜等生物软组织具有复杂特性,同时为软物质物理、力学非平衡态的研究提供了很好的背景和素材,针对生命体系的非平衡态特性,发展软物质物理和生物物理的非平衡态理论和模型也是软物质力学研究中的重要问题.生物医学方面,在疾病研究、预防、检测等方面的研究中,诸如前述神经心理学、3D打印组织器官,及扩散张量成像技术在大脑发育、病变检测、脑手术方面的指导<sup>[87]</sup>,肿瘤细胞迁移、干细胞分化、细胞吞噬等过程,生物体生长、发育、重建、适应性变化和修复等之间的相互关系,力学都发挥了无可替代的作用;因此力学与



其他学科,尤其是生命科学之间切实合作、有机结合,扩大连续介质力学研究对象,拓展学科的公理体系,有助于解决诸如生理、医学等其他领域面临的复杂体系的难题,也赋予力学新的发展动力。

## 5 结 语

理性连续介质力学为软物质运动变形规律的研究提供了有力的支撑。软物质研究对象的广阔性、界面效应、多相性、作用力的多场耦合性、时间-空间尺度的多层次性,则扩充了理性连续介质力学理论体系和应用范围。总括来说,软物质力学代表了当前力学的研究前沿,具有很高的科学探索价值和广阔的应用前景<sup>[110]</sup>。本文从软物质的理性连续介质力学理论出发,重点阐述了熵弹性、超弹性体、黏弹性体、多孔弹性体、非牛顿流体的本构关系,介绍了这些理论在一些具体软材料中的应用,提出了学科关键问题和未来发展的一些研究方向。

## 参考文献

- [1] Zhao Y P 2012 *Physical Mechanics of Surfaces and Interfaces* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵亚溥 2012 表面与界面物理力学 (北京: 科学出版社)]
- [2] Ouyang Z C 2007 *Innovative Sci. Tech.* **5** 44 (in Chinese) [欧阳钟灿 2007 创新科技 **5** 44]
- [3] Lu K Q, Liu J X 2006 *Introduction to Soft Matter Physics* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [陆坤权, 刘寄星 2006 软物质物理学导论 (北京: 北京大学出版社)]
- [4] Chen D T N, Wen Q, Janmey P A, et al. 2010 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **1** 301
- [5] Lu K Q, Liu J X 2009 *Physics* **38** 453 (in Chinese) [陆坤权, 刘寄星 2009 物理 **38** 453]
- [6] Zhang G M, Yu L 2010 *Physics* **39** 543 (in Chinese) [张广铭, 于涿 2010 物理 **39** 543]
- [7] Zhao Y P 2014 *Nano and Mesoscopic Mechanics* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵亚溥 2014 纳米与介观力学 (北京: 科学出版社)]
- [8] Zhao Y P 2016 *Modern Continuum Mechanics* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵亚溥 2016 近代连续介质力学 (北京: 科学出版社)]
- [9] Truesdell C 1959 *Appl. Phys. Lett.* **12** 75
- [10] Eringen A C 1980 *Mechanics of Continua* (New York: Robert E Krieger)
- [11] Truesdell C, Noll W 1965 *The Non-linear Field Theories of Mechanics* (Berlin: Springer)
- [12] Eringen A C 2002 *Nonlocal Continuum Field Theories* (New York: Springer)
- [13] Eringen A C 1974–1976 *Continuum Physics* (Vol. IV) (New York: Academic Press)
- [14] Yang W 2013 *Celebration of Winning the State Supreme Science and Technology Award of Cheng Chemin and Seminar of the Development of Mechanics* **1** 16 (in Chinese) [杨卫 2013 庆祝郑哲敏先生荣获国家最高科学技术奖暨力学学科发展研讨会 **1** 16]
- [15] Li S, Sun B 2012 *Advances in Soft Matter Mechanics* (Beijing: Higher Education Press)
- [16] Capaldi F M 2012 *Continuum Mechanics: Constitutive Modeling of Structural and Biological Materials* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [17] Austin R H, Brody J P, Cox E C, Duke T, Volkmuth W 1997 *Phys. Today* **50** 32
- [18] Ouyang Z C, Liu J X 1994 *From Soup Bubbles to Liquid Crystalline Biomembrane* (Changsha: Hunan Education Publishing House) (in Chinese) [欧阳钟灿, 刘寄星 1994 从肥皂泡到液晶生物膜 (长沙: 湖南教育出版社)]
- [19] Xie Y Z, Liu J X, Ouyang Z C 2003 *Elastic Theory of Surfaces of Biomembrane-Vesicle* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers) (in Chinese) [谢毓章, 刘寄星, 欧阳钟灿 2003 生物膜泡曲面弹性理论 (上海: 上海科学技术出版社)]
- [20] Ottosen N S, Ristinmaa M 2005 *The Mechanics of Constitutive Modeling* (Amsterdam: Elsevier)
- [21] Finger J 1894 *Sitzber. Akad. Wiss. Wien.* **103** 1073
- [22] Ogden R W 1972 *Proc. R. Soc. London Ser. A* **326** 565
- [23] Varga O H 1966 *Stress-strain Behavior of Elastic Materials; Selected Problems of Large Deformations* (New York: Wiley)
- [24] Mooney M 1940 *J. Appl. Phys.* **11** 582
- [25] Rivlin R S, Saunders D 1951 *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **243** 251
- [26] Yeoh O 1993 *Rubber Chem. Technol.* **66** 754
- [27] Yin H M, Sun L Z, Wang G, Vannier M W 2004 *IEEE Trans. Bio-med. Eng.* **51** 1854
- [28] Arruda E M, Boyce M C 1993 *J. Mech. Phys. Solids* **41** 389
- [29] Treloar L R G 1943 *Trans. Faraday Soc.* **39** 241
- [30] Gent A 1996 *Rubber Chem. Technol.* **69** 59
- [31] Flory P 1961 *Trans. Faraday Soc.* **57** 829
- [32] Weber W 1835 *Ann. Phys-berlin.* **110** 247
- [33] Weber W 1841 *Ann. Phys-berlin.* **130** 1
- [34] Kohlrausch F 1847 *Ann. Phys-berlin.* **148** 353
- [35] Kohlrausch F 1863 *Ann. Phys-berlin.* **195** 337
- [36] Kohlrausch F 1866 *Ann. Phys-berlin.* **204** 1
- [37] Maxwell J C 1867 *Philos. Trans. R. Soc. London* **157** 49
- [38] Meyer O E 1874 *Ann. Phys-berlin.* **227** 108
- [39] Oldroyd J 1950 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **200** 523
- [40] Boltzmann L 1874 *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe* **70** 275
- [41] Fung Y C 1972 *Stress Strain History Relations of Soft Tissues in Simple Elongation* (In: Biomechanics: Its Foundations And Objectives) (New Jersey: Prentice-Hall)
- [42] Weinbaum S, Cowin S C, Zeng Y 1994 *J. Biomech.* **27** 339
- [43] Cowin S C 1999 *J. Biomech.* **32** 217
- [44] Cowin S C, Cardoso L 2011 *Biomech. Model. Mechan.* **10** 39

- [45] Sandino C, McErlain D D, Schipilow J, Boyd S K 2015 *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* **44** 1
- [46] Biot M A 1941 *J. Appl. Phys.* **12** 155
- [47] Biot M A 1955 *J. Appl. Phys.* **26** 182
- [48] Biot M A 1956 *J. Appl. Phys.* **27** 459
- [49] Biot M 1973 *Indiana. U. Math. J.* **23** 309
- [50] Detournay E, Cheng A H D 1993 *Fundamentals of Poroelasticity* (In: Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects) (New York: Pergamon Press)
- [51] Herschel W H, Bulkley R 1926 *Kolloid-Zeitschrift* **39** 291
- [52] Herschel W H, Bulkley R 1926 *Proc. Am. Soc. Test. Mater.* **26** 621
- [53] de Waele A 1923 *J. Oil Color Chem. Assoc.* **6** 33
- [54] Ostwald W 1925 *Colloid Polym. Sci.* **36** 99
- [55] Bingham E C 1922 *Fluidity and Plasticity* (New York: McGraw-Hill)
- [56] Blair G W S 1959 *Nature* **183** 613
- [57] Reiner M, Blair G S 1959 *Nature* **184** 354
- [58] Casson N 1957 *Bull. Br. Soc. Rheol.* **2** 5
- [59] Casson N 1959 *A Flow Equation for Pigment-oil Suspensions of the Printing Ink Type* (In: Rheology of Disperse Systems) (London: Pergamon Press)
- [60] Steiner E H 1958 *Rev. Int. Chocolat.* **13** 290
- [61] Heinz W 1959 *Mater. Prüfung* **1** 311
- [62] Chevalley J 1975 *J. Texture Stud.* **6** 177
- [63] Li J, Han D, Zhao Y P 2014 *Sci. Rep.* **4** 3910
- [64] Lim C T, Zhou E H, Quek S T 2006 *J. Biomech.* **39** 195
- [65] Yeung A, Evans E 1989 *Biophys. J.* **56** 139
- [66] Dong C, Skalak R, Sung K L P, Schmid-Schönbein G W, Chien S 1988 *J. Biomech. Eng.* **110** 27
- [67] Schmid-Schönbein G W, Sung K L, Tözeren H, Skalak R, Chien S 1981 *Biophys. J.* **36** 243
- [68] Sato M, Theret D P, Wheeler L T, Ohshima N, Nerem R M 1990 *J. Biomech. Eng.* **112** 263
- [69] Bambardekar K, Clément R, Blanc O, Chardès C, Lenne P F 2015 *P. Natl. Acad. Sci. USA* **112** 1416
- [70] Zhang K, Siegmund T, Chan R W 2006 *J. Acoust. Soc. Am.* **119** 1050
- [71] Chan R W, Siegmund T, Zhang K 2009 *Logop. Phoni-atr. Voco.* **34** 181
- [72] Smith S L, Hunter E J 2014 *J. Acoust. Soc. Am.* **135** 2041
- [73] Grasa J, Ramírez A, Osta R, Muñoz M, Soteras F, Calvo B 2011 *Biomech. Model. Mechan.* **10** 779
- [74] Martins J A C, Pires E B, Salvado R, Dinis P B 1998 *Comput. Method. Appl. M* **151** 419
- [75] Hill A V 1922 *J. Physiol.* **56** 19
- [76] Ehret A E, Böl M, Itskov M 2011 *J. Mech. Phys. Solids* **59** 625
- [77] Holzapfel G A, Gasser T C, Ogden R W 2000 *J. Elasticity* **61** 1
- [78] Kyriacou K S, Mohamed A, Miller K, Neff S 2002 *Biomech. Model. Mech.* **1** 151
- [79] Pamidi M R, Advani S H 1978 *J. Biomech. Eng.* **100** 44
- [80] Mendis K K, Stalnaker R L, Advani S H 1995 *J. Biomech. Eng.* **117** 279
- [81] Miller K, Chinzei K 1997 *J. Biomech.* **30** 1115
- [82] Rashid B, Destrade M, Gilchrist M D 2014 *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* **33** 43
- [83] Zhu Z D, Zhang W, Wu C W 2014 *Sci. China: Tech. Sci.* **57** 1269
- [84] Wang L, Cheung J T M, Pu F, Li D, Zhang M, Fan Y 2011 *PLoS One* **6** e26490
- [85] Basser P J, Mattiello J, LeBihan D 1994 *Biophys. J.* **66** 259
- [86] Basser P J, Mattiello J, LeBihan D 1994 *J. Magn. Reson. Ser. B* **103** 247
- [87] Jellison B J, Field A S, Medow J, Lazar M, Salamat M S, Alexander A L 2004 *Am. J. Neuroradiol.* **25** 356
- [88] Hunter W 1743 *Philos. Trans. R. Soc. London* **42** 514
- [89] Mow V C, Kuei S C, Lai W M, Armstrong C G 1980 *J. Biomech. Eng.* **102** 73
- [90] Mow V C, Holmes M H, Lai W M 1984 *J. Biomech.* **17** 377
- [91] Mow V C, Lai W M 1979 *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **11** 247
- [92] Sakai N, Hagihara Y, Furusawa T, Hosoda N, Sawae Y, Murakami T 2012 *Tribol. Int.* **46** 225
- [93] Veronda D R, Westmann R A 1970 *J. Biomech.* **3** 111
- [94] Joanny J F, de Gennes P G 1984 *J. Chem. Phys.* **81** 552
- [95] Nadkarni G D, Garoff S 1992 *Europhys. Lett.* **20** 523
- [96] Wang P F, Zhao X H, Lin M, Lu T J, Xu F 2014 *Adv. Mech.* **44** 201411 (in Chinese) [王鹏飞, 赵兴红, 林敏, 卢天健, 徐峰 2014 力学进展 **44** 201411]
- [97] Yoon J, Cai S, Suo Z, Hayward R C 2010 *Soft Matter* **6** 6004
- [98] Cai S, Hu Y, Zhao X, Suo Z 2010 *J. Appl. Phys.* **108** 113514
- [99] Hu Y, Suo Z 2012 *Acta Mech. Solida. Sin.* **25** 441
- [100] Hu Y, Zhao X, Vlassak J J, Suo Z 2010 *Appl. Phys. Lett.* **96** 121904
- [101] Ji B, Gao H 2004 *J. Mech. Phys. Solids.* **52** 1963
- [102] [https://en.wikipedia.org/wiki/3D\\_printing](https://en.wikipedia.org/wiki/3D_printing)
- [103] Tallinen T, Chung J Y, Rousseau F, Girard N, Lefevre J, Mahadevan L 2016 *Nature Phys.* **12** 588
- [104] Eckel Z C, Zhou C, Martin J H, Jacobsen A J, Carter W B, Schaedler T A 2016 *Science* **351** 58
- [105] Gibson L J, Ashby M F 1997 *Cellular Solids: Structure and Properties* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [106] Giorgio I, Grygoruk R, dell'Isola F, Steigmann D J 2015 *Mech. Res. Commun.* **69** 164
- [107] Qi G, Conner K D, Qi H J, Martin L D 2014 *Smart Mater. Struct.* **23** 094007
- [108] Gladman A S, Matsumoto E A, Nuzzo R G, Mahadevan L, Lewis J A 2016 *Nat. Mater.* **15** 413
- [109] Cesaretti G, Dini E, De Kestelier X, Colla V, Pambaguian L 2014 *Acta Astron.* **93** 430
- [110] Chen W Q, Qu S X, Qian J, Zhan S G, Meng Q G 2012 *Adv. Mech.* **42** 361 (in Chinese) [陈伟球, 曲绍兴, 钱劲, 詹世革, 孟庆国 2012 力学进展 **42** 361]

- [111] Yang Q S, Wei W, Ma L H 2014 *Adv. Mech.* **44** 201404 (in Chinese) [杨庆生, 魏巍, 马连华 2014 力学进展 **44** 201404]
- [112] Witten T A 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 367
- [113] Zhao Y P 2014 *Theor. Appl. Mech. Lett.* **4** 034002
- [114] Zhang T, Zhang Z, Kim K S, Gao H 2012 *J. Adhes. Sci. Technol.* **28** 226
- [115] Li D, Wang F, Yang Z, Zhao Y P 2014 *Sci. China: Phys. Mech.* **57** 2177
- [116] Quéré D, de Gennes P, Brochard-Wyart F, Reisinger A 2004 *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves* (New York: Springer)
- [117] Zuo P, Zhao Y P 2015 *Phys. Chem. Chem. Phys.* **17** 287
- [118] Yuan Q Z, Shen W H, Zhao Y P 2016 *Adv. Mech.* **46** 201608 (in Chinese) [袁泉水, 沈文豪, 赵亚溥 2016 力学进展 **46** 201608]
- [119] Tao Z L 2010 *Adv. Mech.* **40** 113 (in Chinese) [陶祖莱 2010 力学进展 **40** 113]

SPECIAL TOPIC — Progress in Soft Matter Research

# On the theoretical basis of rational continuum mechanics in softmatter\*

Chen En-Hui<sup>1)2)</sup> Yang Jin-Hong<sup>1)2)</sup> Li Dong<sup>1)2)</sup> Zhao Ya-Pu<sup>1)2)†</sup>

1) (State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

2) (School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

( Received 9 August 2016; revised manuscript received 12 September 2016 )

## Abstract

Soft matter has become one of the most active fields since the 1990 s, for it has enormous interesting behaviors and a broad range of applications. Rational continuum mechanics, as a subject mainly dealing with the kinematics and deformation of materials modeled as continuous mass, is a main source of inspiration in the development of soft matter physics. Here we review the development of rational continuum mechanics and soft matter briefly, and focus on the basic mechanical models and constitutive relations relating to soft matter: entropy elasticity, hyperelasticity, viscoelasticity, poroelasticity, non-Newtonian fluid, and the constitutive equations of these models. We simultaneously introduce the applications of these equations in hot issues in recent years, such as brain, blood vessel, cartilage, muscle, gel, cell, three dimensional printing, etc. According to applications and advances in soft matter mechanics, we then propose the key scientific problems and research fronts: mechanics of the solid-liquid interfacial interactions, introducing multiple factors into constitutive equations to describe the complex behaviors of soft matter in coupling multi-physics, and enhancing connections between soft matter mechanics and soft matter physics, chemistry, biology, etc. Finally, we conclude that the rational continuum mechanics in soft matter could be further developed in energy development, fabrication and analysis of diverse soft materials, and biomedicine development areas.

**Keywords:** soft matter, continuum mechanics, rational mechanics, constitutive equation

**PACS:** 81.40.Jj, 83.10.Ff, 83.10.Gr, 46.05.+b

**DOI:** 10.7498/aps.65.188103

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. U1562105, 11372313), the CAS Interdisciplinary Innovation Team Project, the CAS Key Research Program of Frontier Sciences (Grant No. QYZDJ-SSW-JSC019), and the Strategic Priority Research Program of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. XDB22040401).

† Corresponding author. E-mail: [yzhao@imech.ac.cn](mailto:yzhao@imech.ac.cn)