

基于忆阻器反馈的Lorenz超混沌系统及其电路实现

阮静雅 孙克辉 牟俊

Memristor-based Lorenz hyper-chaotic system and its circuit implementation

Ruan Jing-Ya Sun Ke-Hui Mou Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 190502 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.190502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.190502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I19>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

局部不均匀性对时空系统振荡频率的影响

[Oscillatory frequencies in spatiotemporal system with local inhomogeneity](#)

物理学报.2016, 65(15): 150503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.150503>

有限理性视野下网络交通流逐日演化规律研究

[Day-to-Day dynamical evolution of network traffic flow under bounded rational view](#)

物理学报.2016, 65(15): 150502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.150502>

部分时滞诱发Watts-Strogatz小世界神经网络产生随机多共振

[Stochastic multi-resonance induced by partial time delay in a Watts-Strogatz small-world neuronal network](#)

物理学报.2016, 65(12): 120502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.120502>

多平衡态下簇发振荡产生机理及吸引子结构分析

[Mechanism of bursting oscillations with multiple equilibrium states and the analysis of the structures of the attractors](#)

物理学报.2016, 65(9): 090501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.090501>

一种基于非完整二维相空间分量置换的混沌检测方法

[A chaotic signal detection method based on the component permutation of the incomplete two-dimensional phase-space](#)

物理学报.2016, 65(7): 070502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.070502>

# 基于忆阻器反馈的Lorenz超混沌系统及其电路实现\*

阮静雅 孙克辉<sup>†</sup> 牟俊

(中南大学物理与电子学院, 长沙 410083)

(2016年3月8日收到; 2016年7月4日收到修改稿)

采用二次型磁控忆阻器作为系统的正反馈项, 设计了一个超混沌电路, 建立了该系统的无量纲数学模型, 探讨了忆阻器混沌系统与原混沌系统的不同之处. 分析了系统的平衡点集和稳定性, 发现系统继承了原系统的对称性, 确定了系统参数所对应的稳定和不稳定区域分布, 得到了系统的稳定和不稳定平衡点集. 采用分岔图、Lyapunov 指数谱、Poincaré 截面等分析方法, 研究了系统的动力学行为随系统参数和忆阻器初始状态而变化的情况, 观察到了混沌系统随忆阻器初值不同引起的吸引子共存和状态转移现象, 结合相图与谱熵算法分析了状态转移现象. 设计并实现了该系统的模拟电子电路, 实验结果表明, 电路实验结果与数值仿真结果相吻合, 为忆阻器混沌电路的实际应用奠定了基础.

**关键词:** 忆阻器, 超混沌, 简化 Lorenz 系统, 吸引子共存

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Gg

**DOI:** 10.7498/aps.65.190502

## 1 引言

1971年, 蔡少棠教授基于电路元件的对称性理论预言了忆阻器的存在<sup>[1,2]</sup>. 2008年, HP 实验室发现了忆阻器的实物模型<sup>[3,4]</sup>, 引发了忆阻器的研究热潮. 忆阻器作为第四种基本电路元件, 因其具有无源特性、对电流的记忆效应等特性而具有广泛的应用前景<sup>[5-7]</sup>. 忆阻器的输入输出关系是非线性的, 可取代由较多电路元器件构造的非线性函数, 有利于混沌电路的设计与应用.

1963年, Lorenz 教授在研究大气现象时提出了经典的 Lorenz 系统<sup>[8]</sup>, 已成为混沌理论与应用研究的经典模型<sup>[9-13]</sup>. 属于 Lorenz 系统族的简化 Lorenz 系统具有单参数的特点和丰富的动力学行为, 且该系统随参数变化呈现三种拓扑结构<sup>[13]</sup>. 为满足混沌保密通信的安全性要求, 人们提出了通

过构造超混沌系统来提高系统的不可预测性和复杂性的方法. 就 Lorenz 系统而言, 产生超混沌的常用方法有线性反馈法和非线性反馈法<sup>[14,15]</sup>, 其中, 非线性反馈方法优于线性反馈法. 然而, 非线性函数的乘积项使实现电路更加复杂, 若用忆阻器作为非线性反馈, 则会大大降低电路实现难度. 同时, 忆阻器对流经电流的记忆能力是常规混沌电路元件所不具备的. 因此, 研究忆阻器在混沌电路的应用具有现实意义, 它可以应用于混沌保密通信<sup>[16]</sup>, 神经网络的构成<sup>[17]</sup>, 还可以用于实现忆阻混沌振荡器<sup>[18]</sup>. 目前, 常采用忆阻器等效电路来实现<sup>[19,20]</sup>.

在混沌电路系统中, 忆阻器主要应用在以下三个方面: 一是用忆阻器替代原电路的线性或非线性器件, 如蔡氏二极管<sup>[21-24]</sup>; 二是直接使用忆阻器构建新的混沌电路<sup>[25,26]</sup>; 三是用忆阻器作为原

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61161006, 61573383) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: kehui@csu.edu.cn

系统的反馈项<sup>[27-30]</sup>, 构造新的混沌系统. 现有文献中, 使用忆阻器作为反馈项时皆利用它作为负反馈<sup>[7,31]</sup>, 以产生超混沌. 据了解, 尚无文献讨论忆阻器用作系统正反馈项的情形. 当使用忆阻器实现负反馈时需要使用反相器, 给电路的实现带来不便. 若能利用忆阻器作为系统的正反馈项, 通过设计和调整系统参数, 使系统更加复杂却保持稳定不发散, 无疑可以拓展忆阻器作为反馈元件的用途. 基于此, 本文第二部分采用忆阻器模型作为简化 Lorenz 系统的正反馈项, 观察到了超混沌现象. 该忆阻混沌系统同一般混沌系统不同, 具有无限平衡点集. 第三部分分析系统的动力学行为, 研究系统的吸引子共存现象和状态转移现象. 第四部分根据系统方程, 设计了模拟电子电路. 实验结果表明, 电路实验和理论分析以及数值仿真得出的结果一致, 为设计高性能混沌保密通信系统奠定了基础.

## 2 基于忆阻器反馈的超混沌简化 Lorenz 系统

### 2.1 系统数学模型

简化 Lorenz 系统的数学模型为<sup>[13]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x), \\ \dot{y} = (24 - 4c)x - xz + cy, \\ \dot{z} = xz - 8z/3, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $c$  为系统参数,  $x, y, z$  代表系统状态变量. 当参数  $c \in (-1.59, 7.75)$  时, 系统具有混沌特性. 令  $v_x, v_y, v_z$  代表电压, 则系统 (1) 的电路方程为

$$\begin{cases} C_1 \dot{v}_x = \frac{v_y}{R_1} - \frac{v_x}{R_2}, \\ C_2 \dot{v}_y = -\frac{v_x v_z}{R_3} + \frac{v_x}{R_4} + \frac{v_y R_{10} - v_x R_{10}}{R_5 R_9}, \\ C_3 \dot{v}_z = \frac{v_x v_y}{R_6} - \frac{v_z}{R_7}. \end{cases} \quad (2)$$

系统 (2) 可通过运放和乘法器实现, 电路如图 1 所示. 其中, 调节电阻  $R_5$  的值等价于改变系统参数  $c$ .

由忆阻器定义可知, 忆阻器是一种两端口元件, 其两端电压  $v$  与流经电流  $i$  的关系为  $i = W(\varphi)v$ ,  $\dot{\varphi} = v$ ,  $W(\varphi)$  代表磁通控制忆阻器的忆阻增量方程,  $\varphi$  代表忆阻器磁通量. 由于 HP 的忆阻器模型不适合磁通控制忆阻器, 所以此处选择的忆阻器模型为光滑二次型非线性忆阻器模型<sup>[19]</sup>. 若定义忆阻器流经电荷为  $q$ , 则有源磁控忆阻器可表示为

$$q(\varphi) = -a\varphi + 0.5b\varphi|\varphi|, \quad (3)$$

式中,  $a$  和  $b$  是正常数. 因此, 可得到其相应的忆导  $W(\varphi)$  为

$$W(\varphi) = dq(\varphi)/d\varphi = -a + b|\varphi|. \quad (4)$$

在系统 (1) 的第二个方程中引入二次型非线性忆阻器作为正反馈, 得到忆阻电路系统, 如图 2 所示.

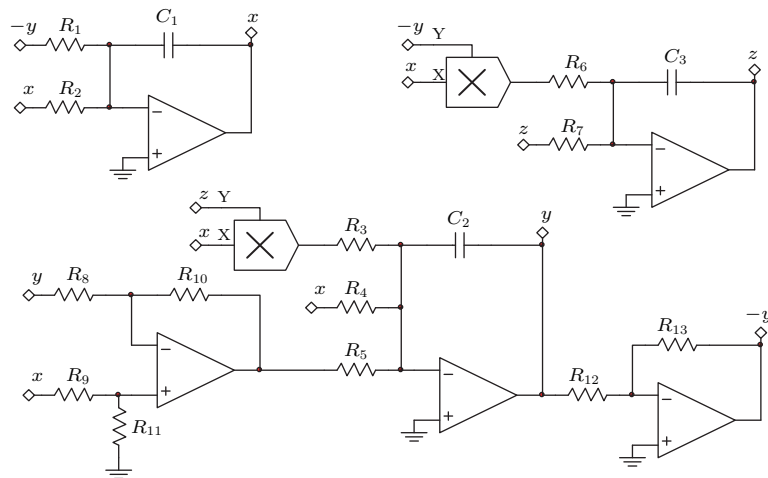


图 1 简化 Lorenz 系统电路图

Fig. 1. Circuit of simplified Lorenz system.

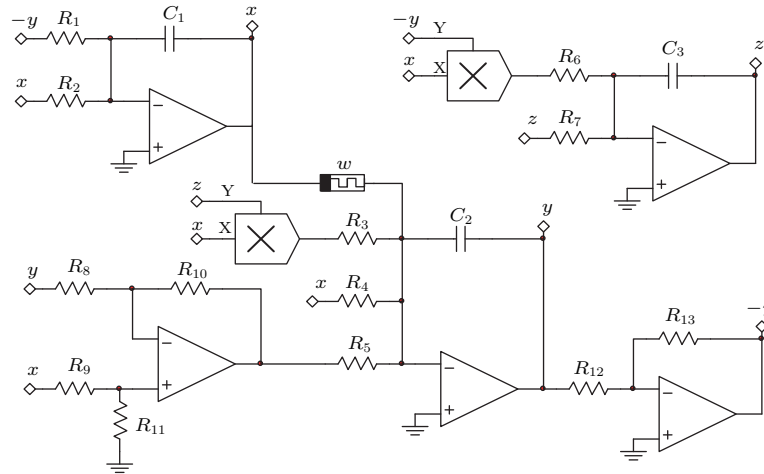


图2 基于忆阻器反馈的简化 Lorenz 系统电路图

Fig. 2. Circuit of simplified Lorenz system with a memristor as feedback.

基于忆阻器反馈的简化 Lorenz 系统的电路方程为

$$\begin{cases} C_1 \dot{v}_x = v_y/R_1 - v_x/R_2, \\ C_2 \dot{v}_y = -\frac{v_x v_z}{R_3} + \frac{v_x}{R_4} \\ \quad + \frac{v_y R_{10}/R_8 - v_x R_{10}/R_9}{R_5} + W(\varphi)v_x, \\ C_3 \dot{v}_z = v_x v_y/R_6 - v_z/R_7, \\ \dot{\varphi} = v_x. \end{cases} \quad (5)$$

经化简, 可得到系统 (5) 的无量纲方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = 35(y - x), \\ \dot{y} = -xz + cy + (95 - 4c)x + kW(w)x, \\ \dot{z} = xy - 3z, \\ \dot{w} = x, \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $k$  表征与忆阻器有关的系数. 值得注意的是,  $W(w)$  与前面提到的忆导模型方程一致, 其与方程

(4) 的区别只在于  $W(w)$  是无量纲的.

选择参数  $c = -10$ ,  $a = 15$ ,  $b = 0.02$ ,  $k = 1$ , 初始条件  $(1, 0, 1, 0)$ , 系统 (6) 产生的混沌吸引子相图如图 3 所示. 利用 Wolf 方法计算 Lyapunov 指数谱得  $L_1 = 1.6313$ ,  $L_2 = 0.0021$ ,  $L_3 = 0$ ,  $L_4 = -48.0608$ . 此时, 系统的 Lyapunov 维数为  $d_L = 3.0340$ , 显然, 系统是超混沌的.

## 2.2 系统特性分析

### 1) 对称性

简化 Lorenz 系统在变换  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$  下是对称不变的, 即系统关于  $z$  轴对称, 该对称性对于所有  $c \in (-\infty, \infty)$  适用. 基于忆阻器正反馈的超混沌简化 Lorenz 系统保持了这种不变性, 系统在变换  $(x, y, z, w) \rightarrow (-x, -y, z, -w)$  下是对称不变的, 系统关于  $z$  轴对称, 并且此对称性对于  $c \in (-\infty, \infty)$  适用.

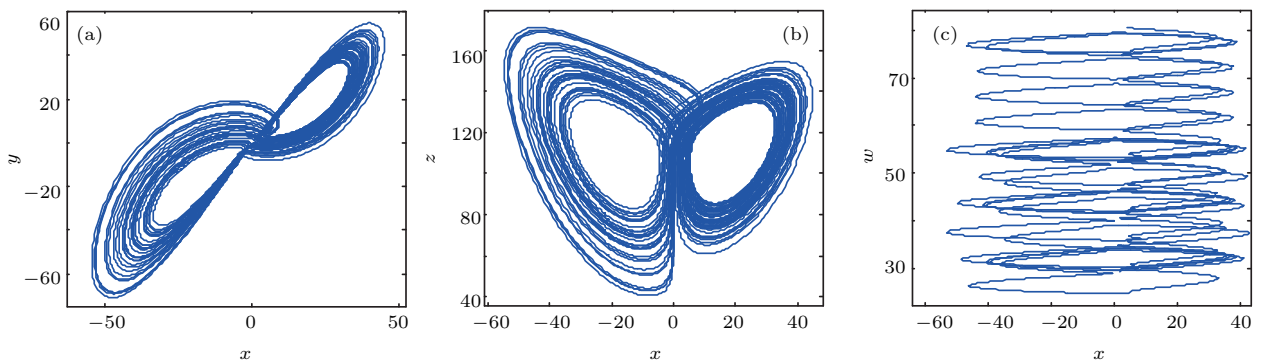


图3 超混沌吸引子相图 (a)  $xy$  平面; (b)  $xz$  平面; (c)  $xw$  平面

Fig. 3. Phase portraits of hyper-chaotic attractor: (a)  $xy$  plane; (b)  $xz$  plane; (c)  $xw$  plane.

2) 耗散性

由系统(6)可得  $\nabla V = \partial \dot{x}/\partial x + \partial \dot{y}/\partial y + \partial \dot{z}/\partial z + \partial \dot{w}/\partial w = -38 + c$ , 所以, 当系统参数  $c < 38$  时, 系统是耗散的.

3) 平衡点集和稳定性

令  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{w} = 0$ , 可得系统(6)的平衡点集为

$$E = \{(x, y, z, w) | x = y = z = 0, w = \alpha\}, \quad (7)$$

其中  $\alpha$  为任意实数, 即系统有无限的平衡点集. 在平衡点附近线性化系统(6), 可得系统的 Jacobian 矩阵为

$$J_E = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 0 \\ (95 - 4c) - kW(\alpha) & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可见, 计算  $J_E$  的特征值和特征向量并不困难. 第一个特征值  $\lambda_1 = 0$ , 特征向量为  $e_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ , 即系统在平衡点集上是亚稳态的. 第二个特征值  $\lambda_2 = -3$ , 特征向量为  $e_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ , 即系统在  $z$  轴方向收缩. 其余的两个特征值分别为

$$\lambda_3 = (c - 35 + \sqrt{-140kW(\alpha) + c^2 - 490c + 14525})/2, \quad (8)$$

$$\lambda_4 = (c - 35 - \sqrt{-140kW(\alpha) + c^2 - 490c + 14525})/2, \quad (9)$$

相应的特征向量为

$$e_3 = [\lambda_3 \ c - kW(\alpha) + c\lambda_3/35 \ 0 \ 1]^T$$

和

$$e_4 = [\lambda_4 \ c - kW(\alpha) + c\lambda_4/35 \ 0 \ 1]^T.$$

由  $\lambda_3$  和  $\lambda_4$  可知, 这两个特征值是复数还是实数是由  $\Delta_c = (-140kW(\alpha) + c^2 - 490c + 14525)$  决定的. 当  $\Delta_c > 0$  时,  $\lambda_3$  和  $\lambda_4$  都是实数, 系统的平衡点稳定; 当  $\Delta_c < 0$  时,  $\lambda_3$  和  $\lambda_4$  都是虚数, 系统的平衡点不稳定;  $\Delta_c = 0$  时为临界点, 此时参数  $c$  为

$$c = \pm 2\sqrt{35(bk|\alpha| - ak + 325)} + 245.$$

由于忆阻器的参数是  $a = 15, b = 0.02$ , 故可得到此时

$$c = \pm(1/2)\sqrt{(56k|\alpha|/5 - 8400k + 182000)} + 245.$$

显然,

$$c = (1/2)\sqrt{(56k|\alpha|/5 - 8400k + 182000)} + 245$$

的值较大, 故只要

$$|c| > (1/2)\sqrt{(56k|\alpha|/5 - 8400k + 182000)} + 245,$$

平衡点集是稳定的; 否则, 平衡点集是不稳定的.

### 3 系统的动力学特性分析

#### 3.1 分岔与混沌特性

系统(6)具有无限的平衡点集, 包括无限的稳定平衡点和无限的不稳定平衡点, 因此系统具有丰富的动力学行为, 如极限环、混沌、超混沌等. 为了进一步研究系统的非线性动力学特性, 计算了参数  $c$  从  $-28$  到  $27, k$  从  $0$  到  $2.5$  的 Lyapunov 指数谱和分岔图.

1) 固定参数  $k = 1, a = 15, b = 0.02$  时, 取系统参数  $c \in (-28, 27)$ , 步长为  $0.005$ , 时间步长为  $0.5$  s, 最大时间为  $1000$  s, 初值  $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (1, 0, 1, 0)$  时, Lyapunov 指数谱及分岔图如图 4 所示. 可见, Lyapunov 指数谱与分岔图相吻合. 图 4(b) 揭示了系统(6)进入混沌的路径, 随着参数  $c$  的增加, 系统从发散态进入混沌态, 其中出现了几个周期窗口, 最终演化为稳定态. 根据图 4(a) 的 Lyapunov 指数谱, 可进一步确定系统参数  $c$  对应的动力学行为, 如表 1 所列. 表中部分动力学行为对应的吸引子相图如图 5 所示, 其中, 图 5(a) 为参数  $c = -8$  时系统的相图, 可见系统此时处于三周期; 图 5(b) 为参数  $c = -1$  时系统的相图, 可见系统此时处于混沌态; 图 5(c) 为参数  $c = 1.1$  时系统的相图, 可见系统此时处于周期态.

Poincaré 映射能够通过寻找合适的 Poincaré 截面, 将系统随时间的连续运动转换为在 Poincaré 截面上的一个离散映射, 降低了系统的维数, 同时保持了原有连续动力学系统的拓扑性质. 常用于超混沌现象的判断. 此处选取参数  $c = -9.5$ , 对系统作 Poincaré 截面分析, 取 Poincaré 截面为  $y = 0$  时  $(x, z)$  平面, 由图 6 可知, 截面中的点呈面状分布, 进一步验证了该系统此时是超混沌态.

值得注意的是, 系统(6)会随着参数  $c$  的改变而出现不同的拓扑结构. 根据系统拓扑结构的定义<sup>[32]</sup>, 系统的线性化系数矩阵为  $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ .



当系统参数  $c < (95 - ak)/4$  时,  $a_{12}a_{21} < 0$ ; 当  $c = (95 - ak)/4$  时,  $a_{12}a_{21} = 0$ ; 当  $c > (95 - ak)/4$  时,  $a_{12}a_{21} > 0$ , 说明系统分别属于三种不同的拓扑结构. 但是从系统的分岔图和 Lyapunov 指数谱中, 看不出拓扑结构的改变对系统动力学行为造成的影响, 有待进一步的研究.

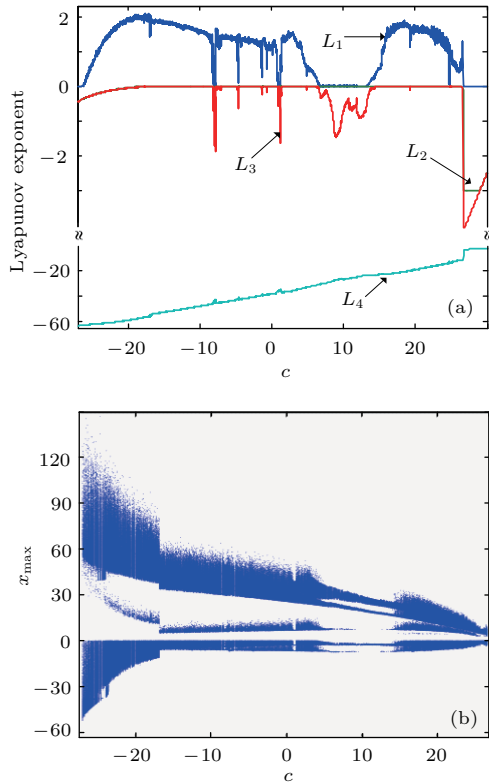


图4 (网刊彩色) 系统随参数  $c$  变化的 Lyapunov 指数谱及分岔图 (a) Lyapunov 指数谱; (b) 分岔图  
Fig. 4. (color online) Lyapunov exponent and bifurcation diagram with  $c$  for  $k = 1$  (a) Lyapunov exponent spectrum; (b) bifurcation diagram.

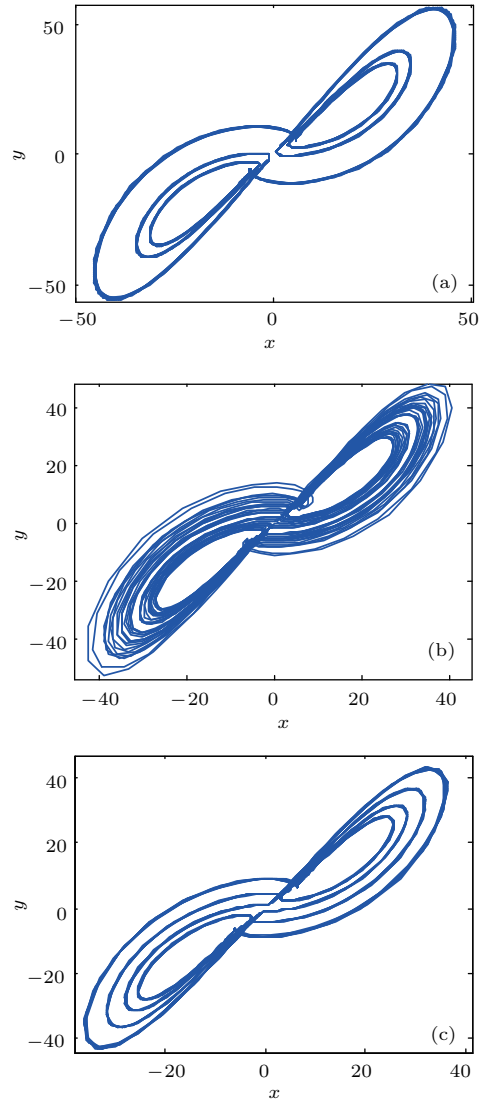


图5 不同系统参数  $c$  对应的系统  $xy$  平面相图 (a)  $c = -8$ ; (b)  $c = -1$ ; (c)  $c = 1.1$   
Fig. 5. Phase portraits of attractor with different  $c$  on  $xy$  plane (a)  $c = -8$ ; (b)  $c = -1$ ; (c)  $c = 1.1$ .

表1 系统参数  $c$  不同区间对应的动力学行为  
Table 1. Dynamical behavior with different  $c$ .

参数 $c$	LE 指数谱	系统动力学行为
$(-28, -27.45)$	$(+ - - -)$	缓慢发散
$[-27.45, -27.35] \cup [26.7, 27]$	$(0 - - -)$	极限环
$[-27.35, -8.20] \cup [15.2, 26.7] \cup [-7.95, 0.90] \cup [1.3, 3.6]$	$(+ 0 0 -)$ 或者 $(+ + 0 -)$	混沌态或者超混沌态
$[-8.20, -7.95] \cup [3.6, 15.2] \cup [0.90, 1.3]$	$(0 0 - -)$	环面

2) 固定系统参数  $c=20, a=15, b=0.02$ , 系统参数  $k$  从 0 开始变化. 当  $k$  为 0 时, 系统 (6) 不受忆阻器的影响; 除去第四维, 动力学行为与简化 Lorenz 系统 (1) 一致, 即系统此时只是混沌的. 由图 7 可见, 当参数  $k$  从 0 开始增长时, 在  $k \in (0, 2.343)$  时,

系统是全域混沌的. 此处以  $k=2$  为例, 对系统作 Poincaré 截面分析, 取 Poincaré 截面为  $z = 120$  时  $(y, x)$  平面, 由图 8 可知, 截面中的点呈面状分布, 进一步验证了该系统此时是超混沌态. 当  $k=2.343$  时, 系统突然从超混沌状态变为稳定态.

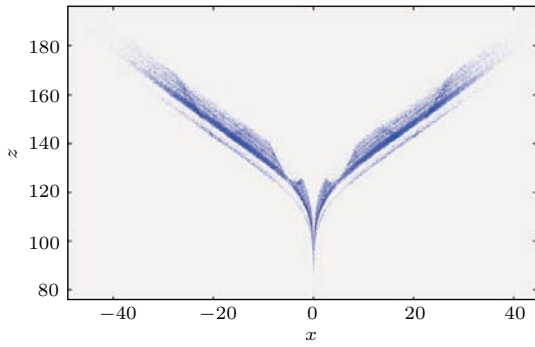


图6 系统(6)的Poincaré截面图

Fig. 6. Poincaré section of the system (6).

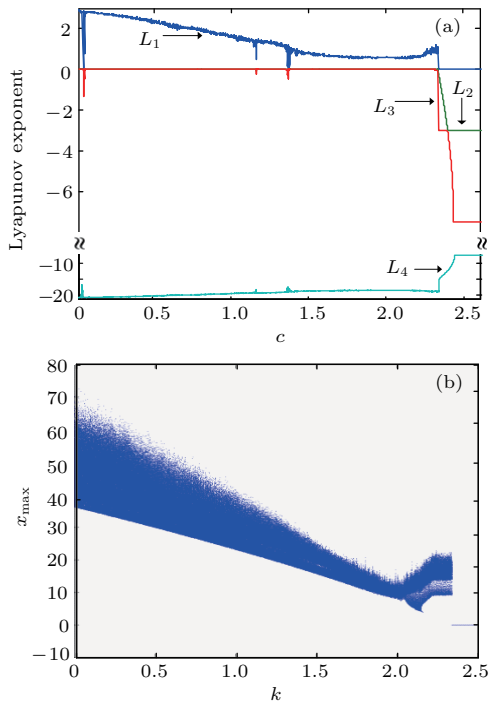


图7 (网刊彩色) 系统随参数  $k$  变化的 Lyapunov 指数谱和分岔图 (a) Lyapunov 指数谱; (b) 分岔图

Fig. 7. (color online) Lyapunov exponents and bifurcation diagram with  $k$  for  $c = 20$ : (a) Lyapunov exponent spectrum; (b) bifurcation diagram.

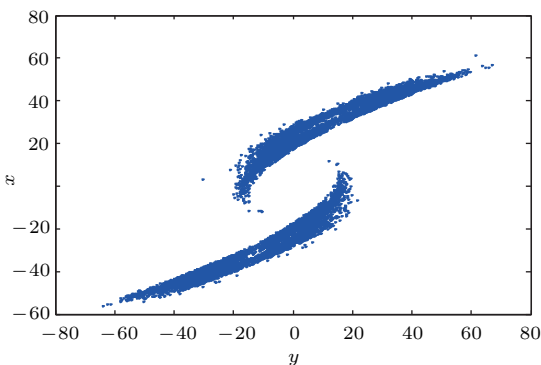


图8 系统(6)的Poincaré截面图

Fig. 8. Poincaré section of the system (6).

从图4(a)和图7(a)可见,系统的最大正Lyapunov指数均高于简化Lorenz系统,显示了相较于简化Lorenz系统,系统(6)的复杂性有所提高.此外,系统(6)所有复杂的动力学现象都与无限的平衡点集和谐共存,这与大部分超混沌系统不同.

### 3.2 多吸引子共存现象

忆阻器对流经电流具有记忆能力,不同的忆阻器初值会导致忆阻器磁滞回线发生改变,即忆阻器的非线性函数会有所不同.基于此,将忆阻器模型(4)引入混沌系统(1),得到混沌系统(6),进一步研究忆阻器是否会呈现出对初值敏感的特性.

采用下面的公式区分不同的吸引子<sup>[33]</sup>:

$$\langle r_x^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{\text{ref}})^2, \quad (10)$$

$$\langle r_y^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_{\text{ref}})^2, \quad (11)$$

$r_x^2$  和  $r_y^2$  表示吸引子在  $x$  和  $y$  平面对参考点  $(x_{\text{ref}}, y_{\text{ref}})$  的均方差,  $x_i$  和  $y_i$  表示吸引子的数值,  $N$  表示吸引子的序列长度.通过选取合适的参考点  $x_{\text{ref}}$  和  $y_{\text{ref}}$ , 可得到每个吸引子惟一的  $\langle r_x^2 \rangle$  和  $\langle r_y^2 \rangle$  值.当固定系统参数,随机选取初始状态时,若存在吸引子共存现象,则共存的吸引子可通过围绕不同值的  $\langle r_x^2 \rangle$  和  $\langle r_y^2 \rangle$  来刻画.  $\langle r_x^2 \rangle$  和  $\langle r_y^2 \rangle$  突然改变时分别意味着不连续或者连续的分岔.

此处令  $c = 0.9, k = 1$ , 系统(6)的  $x, y, z$  三维变量初值为  $(1, 0, 1)$ , 第四维即忆阻器状态变量随机取值,若存在吸引子共存现象,则不同的吸引子对应的  $\langle r_x^2 \rangle$  和  $\langle r_y^2 \rangle$  值不同.此处参考点选为  $(0, 0)$ , 忆阻器的初值通过随机数选取,当然,不同的参考点以及初始值的选取也可以得到相似的结果.

图9(a)显示了当系统参数  $k = 1$ , 参数  $c = 0.9$  时系统的吸引子共存现象,图中显示了三种不同的吸引子状态.其中,红色圆圈内的为混沌态,绿色圆圈内则为极限环状态,图9(a)的其余部分则是周期态.图9(b<sub>1</sub>—b<sub>3</sub>)显示的则是此时系统随初值变化的典型吸引子相图.图9(a)中红色圆圈中对应的吸引子见图9(b<sub>3</sub>),绿色对应的吸引子见图9(b<sub>2</sub>),其余吸引子见图9(b<sub>1</sub>).可见,当系统的结构参数不变时,随着初值变化,系统的状态随之转变.

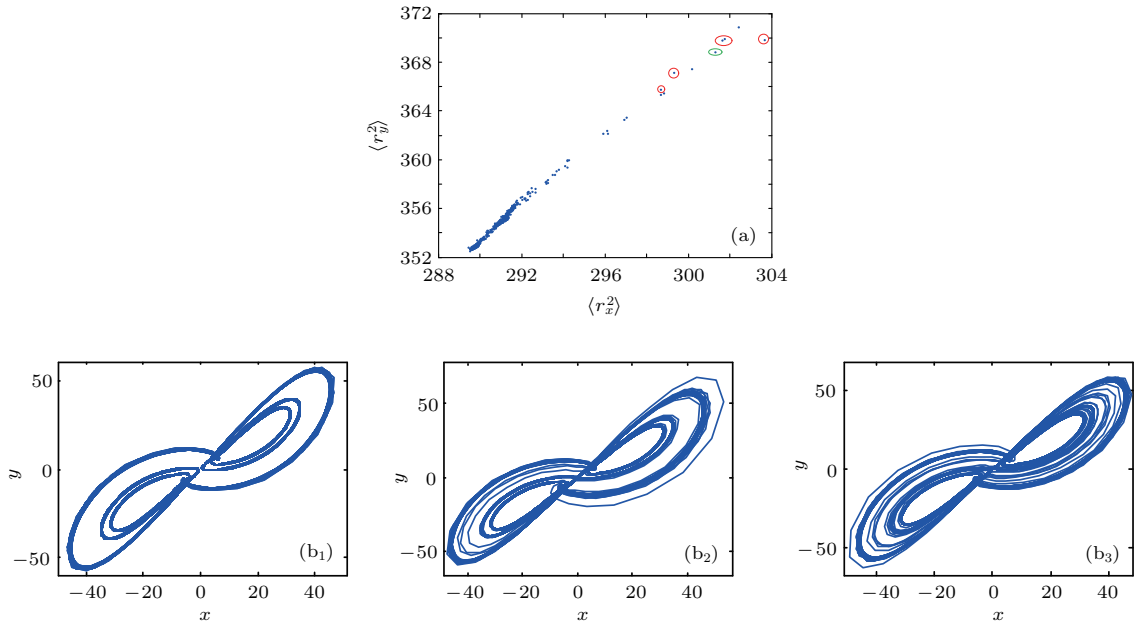


图9  $c = 0.9, k = 1$ 时吸引子共存 (a) 吸引子共存现象; (b) 参数  $k = 1, c = 0.9$ 时不同忆阻器初值对应的系统相图 (b<sub>1</sub>) IC (1, 0, 1, 0), (b<sub>2</sub>) IC (1, 0, 1, 9.1323), (b<sub>3</sub>) IC (1, 0, 1, 7.7917)  
 Fig. 9. Multiple coexisting attractors with  $c = 0.9, k = 1$ : (a) Multiple coexisting attractors; (b) phase portraits with different initial condition and  $k = 1, c = -8$  (b<sub>1</sub>) IC (1, 0, 1, 0), (b<sub>2</sub>) IC (1, 0, 1, 9.1323), (b<sub>3</sub>) IC (1, 0, 1, 7.7917).

### 3.3 系统状态转移现象

在系统(6)中,除了发现吸引子共存之外,还出现了状态转移现象.随着时间的演化,系统从极限环转变为混沌态,而后又从混沌态转成极限环,不断重复.此时,由于系统的状态不固定,且随时间的变化不断改变状态;若使用对时间平均的Lyapunov指数谱,则由于算法对时间取平均而不能即时反映系统的改变.

谱熵算法具有参数少、对序列长度  $N$  (唯一参数)鲁棒性好,能有效地分析混沌伪随机序列的结

构复杂度<sup>[34]</sup>.为了准确分析混沌伪随机序列的结构复杂性,采用谱熵算法对系统(6)产生的混沌伪随机序列复杂度进行了分析.这里,计算了系统信号随时间变化的谱熵复杂度,通过不同的谱熵复杂度来区分系统的不同状态.图10(a)显示了当系统参数  $c = -8, k = 1$ ,初值为(1, 0, 1, 8.2810)时,系统的第一维变量的时域图;图10(b)则是此时系统对应的谱熵复杂度图.由图10(b)可见,系统的复杂度会随时间而改变,从低复杂度跳变至高复杂度,而后出现多次反复.这表示系统会随着时间的推移改变状态,从极限环状态 ( $SE \approx 0.27$ ) 变为混沌

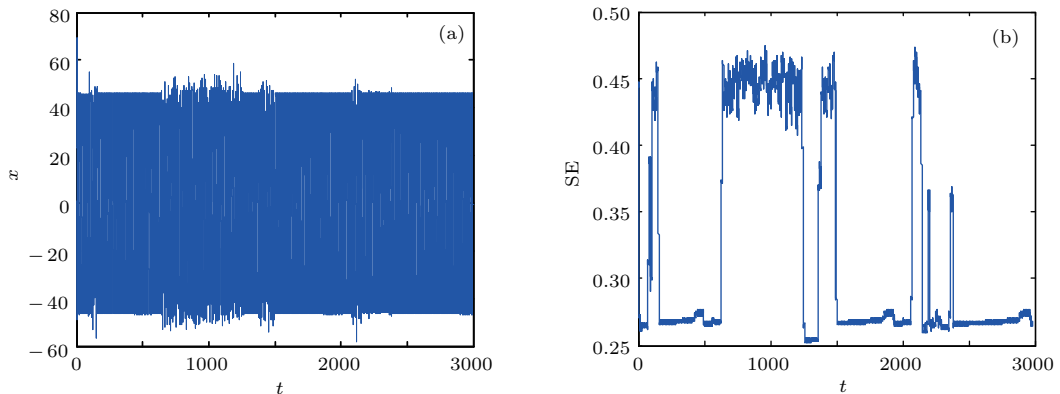


图10 系统(6)中的状态转移 (a) 变量  $x$  时域信号图; (b) 谱熵复杂度  
 Fig. 10. State transition in system (6) : (a) Variables  $x$  of time domain; (b) spectrum entropy complexity.



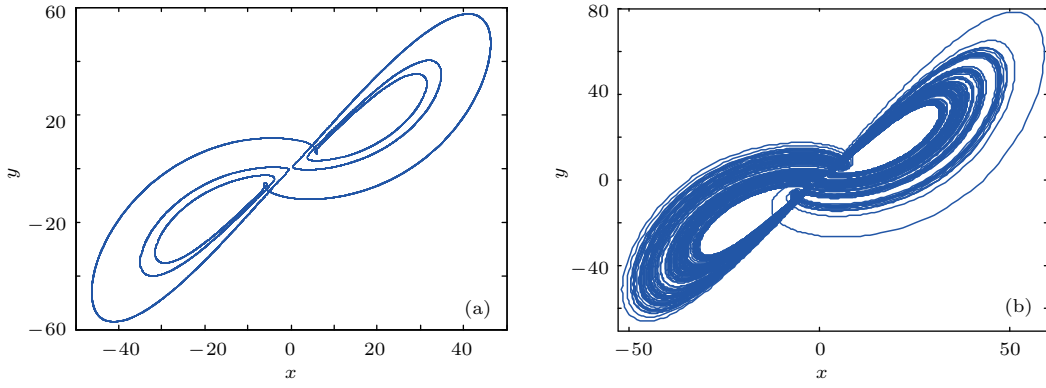


图 11 系统状态转移相图 (a)  $t \in [200 \text{ s}, 400 \text{ s}]$ ; (b)  $t \in [1100 \text{ s}, 1200 \text{ s}]$

Fig. 11. Phase portraits of system state transition (a)  $t \in [200 \text{ s}, 400 \text{ s}]$ ; (b)  $t \in [1100 \text{ s}, 1200 \text{ s}]$ .

态( $SE \approx 0.45$ )再转为极限环状态,周而复始.图 11 显示的是当时间区间分别为 $[200 \text{ s}, 400 \text{ s}]$ (图 11(a))和 $[1100 \text{ s}, 1200 \text{ s}]$ (图 11(b))时系统的相图,分别可以看出系统处于极限环状态以及混沌态.仔细分析发现,该现象类似于阵发混沌,但与阵发混沌有一定的区别.

若将系统(6)用于数据加密,选择系统出现状态转移现象时的参数作为密钥,将系统为混沌态时的序列作为密钥序列,无疑将提高系统的抗破译能力.

#### 4 忆阻超混沌系统的电路实现

使用运算放大器以及二极管构成光滑二次型非线性忆阻器模型的等效电路实现,如图 12(a)所

示.图中,运算放大器 $U_2, U_3$ ,二极管 $D_1, D_2$ ,以及电阻 $R_i (i = 23, 24, 25, 26, 27)$ 构成绝对值电路,实现对通过忆阻器两端的磁通量的绝对值运算,运算放大器 $U_1$ 和电容 $C_4$ 电阻 $R_9$ 构成积分电路,实现对通过忆阻器电压的积分,获得忆阻器通过的磁通量.

因直接以系统(6)的状态变量作为电压量将超过运算放大器、乘法器等器件的电源电压范围,故将变量进行比例压缩变换,即 $v_x = 10v_{x1}$ , $v_y = 10v_{y1}$ , $v_z = 10v_{z1}$ , $v_w = 10v_{w1}$ ,其中 $v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}, v_{w1}$ 分别为积分电容上的电压.通过对系统(6)做时间尺度变换,采用倍乘因子为0.1的乘法器AD633,重写系统(6)的方程为

$$\begin{cases} C_1 \dot{v}_x = v_y/R_1 - v_x/R_2, \\ C_2 \dot{v}_y = -\frac{v_x v_z}{R_3} + \frac{v_x}{R_4} + \frac{c(v_y R_{10}/R_8 - v_x R_{10}/R_9)}{R_5} + W(\varphi)v_x, \\ C_3 \dot{v}_z = v_x v_y/R_6 - v_z/R_7, \\ \dot{\varphi} = v_x. \end{cases} \quad (12)$$

通过比较(12)与(6)式的对应系数,可得到各元件的值为: $C_i (i = 1, 2, 3, 4) = 100 \text{ nF}$ , $R_i (i = 11, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27) = 10 \text{ k}\Omega$ , $R_{10} = 2.5 \text{ k}\Omega$ , $R_{12} = 2 \text{ k}\Omega$ , $R_1 = R_2 = 2.8 \text{ k}\Omega$ , $R_{16} = R_{18} = 2.8 \text{ k}\Omega$ , $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ , $R_4 = 1.01 \text{ k}\Omega$ , $R_5 = 10 \text{ k}\Omega$ , $R_6 = 50 \text{ k}\Omega$ , $R_7 = 1 \text{ k}\Omega$ , $R_8 = 33.3 \text{ k}\Omega$ , $R_9 = 100 \text{ k}\Omega$ , $R_{26} = 5 \text{ k}\Omega$ , $R_{17} = 30 \text{ k}\Omega$ .

电路中运算放大器选用集成运放OP07,乘法

器选择AD633以实现非线性项,得到的电路图如图 12(b)所示.通过调节可变电阻 $R_{21}$ ,在示波器上观察到吸引子的平面相图如图 13所示.可见,在系统参数取值范围内,系统吸引子在极限环与超混沌等状态之间进行演化,表现出丰富的动力学行为,与图 6 数值仿真的吸引子相图相符.其中,图 13(a<sub>1</sub>), (a<sub>2</sub>), (b<sub>1</sub>), (b<sub>2</sub>), (c<sub>1</sub>), (c<sub>2</sub>)系统参数不变,可观察到系统在混沌与极限环之间演变,系统的状态不断转移.

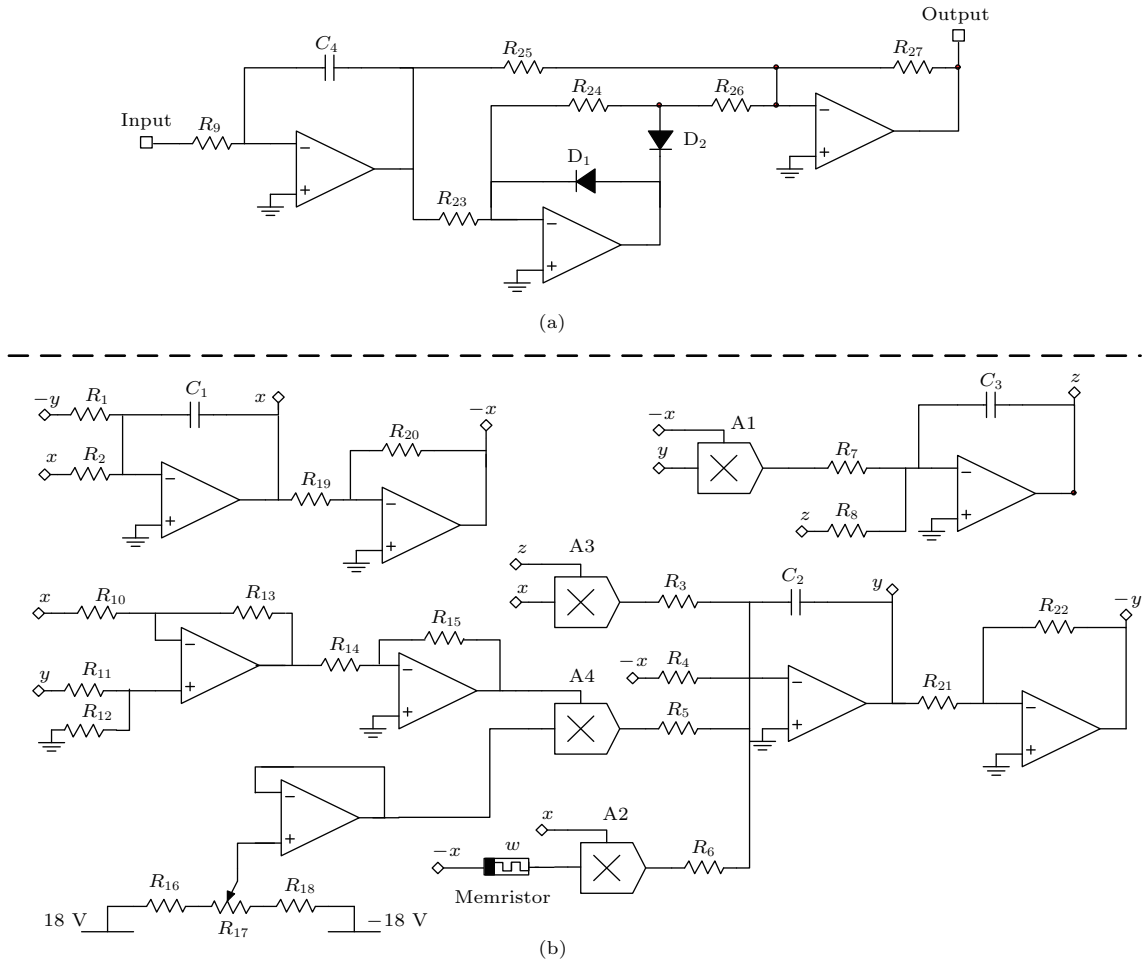


图 12 忆阻器超混沌系统电路实现 (a) 忆阻器模型的等效电路图; (b) 忆阻器超混沌系统电路图  
 Fig. 12. Circuit of memristor-based Lorenz hyper-chaotic system: (a) Equivalent circuit implementation of memristor; (b) circuit schematic of memristor-based Lorenz hyper-chaotic system.

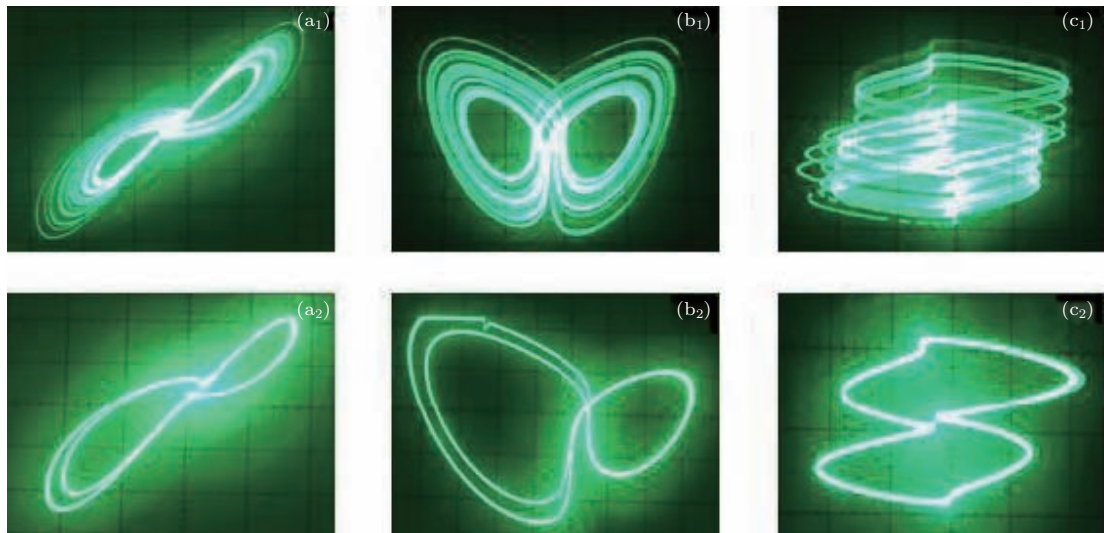


图 13 (网刊彩色) 电路实验吸引子相图 (a<sub>1</sub>), (a<sub>2</sub>)  $x$ - $y$  平面; (b<sub>1</sub>), (b<sub>2</sub>)  $x$ - $z$  平面; (c<sub>1</sub>), (c<sub>2</sub>)  $x$ - $w$  平面  
 Fig. 13. (color online) Attractors observed in analog circuit: (a<sub>1</sub>), (a<sub>2</sub>)  $x$ - $y$  plane; (b<sub>1</sub>), (b<sub>2</sub>)  $x$ - $z$  plane; (c<sub>1</sub>), (c<sub>2</sub>)  $x$ - $w$  plane.

## 5 结 论

设计了一种新的基于忆阻器反馈的 Lorenz 超混沌系统. 该系统不仅保存了原系统的对称性及耗散性, 还具有了新的动力学特性, 比如无限的线性平衡点集, 由忆阻器引起的吸引子共存, 以及超混沌特性等. 该系统的主要特征是具有无限平衡点集, 这一点与大部分已知的有限平衡点集混沌系统不同.

数值仿真结果表明, 当系统参数一致时, 超混沌吸引子可以与平衡点共存, 同时当初值不同时, 超混沌吸引子之间也可以共存, 系统有着丰富的状态转移现象.

采用 Lyapunov 指数谱与 Poincaré 截面图, 验证了系统的超混沌特性. 设计了基于忆阻器的 Lorenz 超混沌系统的电路, 用示波器观察到了系统的吸引子相图, 实验结果验证了系统的物理可实现性, 下一步将研究基于该系统的混沌保密通信.

## 参考文献

- [1] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circ. Theory* **18** 507
- [2] Chua L O, Kang S M 1976 *Proc. IEEE* **64** 209
- [3] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Stanley W R 2008 *Nature* **453** 80
- [4] Williams R 2008 *IEEE Spectrum* **45** 28
- [5] Chua, L 2013 *Nanotechnology* **24** 383001
- [6] Kim H, Sah M P, Yang C, Roska T 2012 *Proc. IEEE* **100** 2061
- [7] Li Q, Tang S, Zeng H, Zhou T 2014 *Nonlinear Dyn.* **78** 1087
- [8] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [9] Jia Q 2007 *Phys. Lett. A* **366** 217
- [10] Lü J, Chen G 2011 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 659
- [11] Bao B C, Liu Z 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 2396
- [12] Sprott J C, Thio W, Zhu H 2014 *IEEE Trans. Circuits Syst. II: Exp. Briefs* **61** 977
- [13] Sun K, Sprott J C 2009 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **19** 1357
- [14] Yu H, Cai G, Li Y 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 2171
- [15] Sun K, Liu X, Zhu C, Sprott J C 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1383
- [16] Wen S, Zeng Z, Huang T 2012 *Phys. Lett. A* **376** 2775
- [17] Ding S, Wang Z 2015 *Neurocomputing* **2** 16
- [18] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Electron. Lett.* **46** 237
- [19] Bao B, Xu J, Liu Z 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 51
- [20] Bao B C, Xu J P, Zhou G H, Ma Z H, Zhou L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 120502
- [21] Bao B, Ma Z, Xu J, Liu Z, Xu Q 2012 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **21** 2629
- [22] Petrá, Ivo 2010 *IEEE Trans. Circuits Syst. II: Exp. Briefs* **57** 975
- [23] Huang J, Wei P, Zhu Y, Yan B, Xiong W, Hu Y 2015 *Advances in Global Optimization* (Switzerland: Springer International Publishing) pp523–527
- [24] Andrewl F, Dongsheng Y, Herberth C I U, Sreeram V 2012 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **22** 1250133
- [25] Bharathwaj M, Chua L 2012 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **20** 1567
- [26] Xu B R 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 190506 (in Chinese) [许碧荣 2013 物理学报 **62** 190506]
- [27] Xi H, Li Y, Huang X 2014 *Entropy* **16** 6240
- [28] Wen S, Zeng Z, Huang T, Chen Y 2013 *Phys. Lett. A* **377** 2016
- [29] Lin T, Huang F 2014 *IEEE International Conference on Fuzzy Systems* Beijing, China, July 6–11, 2014 p2551
- [30] Li Q, Hu S, Tang S, Zeng G 2014 *Int. J. Circuit. Theor. Appl.* **42** 1172
- [31] Ma J, Chen Z, Wang Z, Zhang Q 2015 *Nonlinear Dyn.* **8** 1
- [32] Vaněček A, Čelikovský S 1998 *Automatica* **34** 1479
- [33] Sun K, D Li-Kun, Dong Y, Wang H, Zhong K 2013 *Math. Probl. Eng.* **2013** 256092
- [34] Sun K H, He S B, He Y, Yin L Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010501 (in Chinese) [孙克辉, 贺少波, 何毅, 尹林子 2013 物理学报 **62** 010501]

# Memristor-based Lorenz hyper-chaotic system and its circuit implementation\*

Ruan Jing-Ya Sun Ke-Hui<sup>†</sup> Mou Jun

(School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha 410083, China)

( Received 8 March 2016; revised manuscript received 4 July 2016 )

## Abstract

To study the application of memristor in chaotic system, we employ the smooth continuous nonlinear flux-controlled memristor model and feedback control technique to design a hyperchaotic system based on the simplified Lorenz system. By using memristor as a positive feedback of the simplified Lorenz system, the dimensionless mathematical model is derived. The differences between the memristor-based chaotic system and ordinary chaotic system are then further studied. Firstly, the stable equilibrium and unstable equilibrium point sets of the system are analyzed theoretically, and it is found that the system has infinite equilibrium points including stable and unstable equilibrium points. The stable and unstable ranges of the system with different parameters are also determined. Theoretical analysis shows that the system has the same symmetry as the simplified Lorenz system. Thus the system has rich dynamical behaviors, such as limit cycle, chaotic attractor, and hyper-chaotic attractor. Secondly, by the methods of bifurcation diagram, Lyapunov exponent spectrum, Poincaré section, and Spectral Entropy algorithm, the dynamical behaviors of the system are analyzed in detail. By calculating the Lyapunov exponent spectrum, the dynamical behaviors are studied and they change with system parameters and the initial conditions of memristor respectively. The maximum positive Lyapunov exponent of the memristor-based Lorenz hyperchaotic system is higher than that of the simplified Lorenz system, which indicates the memristor-based Lorenz hyperchaotic system is more complex. Further, we find all the complex dynamical behaviors to be coexisting with the infinite equilibrium sets, which is quite different from those of many ordinary hyperchaotic systems. Meanwhile, we observe the attractors coexisting and state transition phenomenon in this system, caused by changing the initial conditions of the memristor. State transition phenomenon is then further studied by means of phase portraits and spectral entropy algorithm for the first time. Finally, by using operational amplifiers, diodes and other discrete components, we design an equivalent circuit of the smooth continuous nonlinear flux-controlled memristor model, and the equivalent circuit is used to design and realize the analog electronic circuit of the memristor-based Lorenz hyper-chaotic system. By using an analog oscilloscope, the phase portraits of hyper-chaotic attractor are observed clearly. The state transition phenomenon can also be seen using the oscilloscope. It is found that the circuit experimental results are in agreement with those of the theoretical analysis and numerical simulation. It verifies that the system is physically realizable, and lays a strong foundation for its applications in engineering. Next, we will try to investigate the chaotic secure communication based on this hyper-chaotic system.

**Keywords:** memristor, hyperchaos, simplified Lorenz system, attractor coexisting

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Gg

**DOI:** 10.7498/aps.65.190502

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61161006, 61573383).

† Corresponding author. E-mail: [kehui@csu.edu.cn](mailto:kehui@csu.edu.cn)