

相干态和压缩真空态的自适应最优估计方法

陈坤 陈树新 吴德伟 杨春燕 王希 李响 吴昊 刘卓崑

Adaptive optimal measurement for the squeezed vacuum and coherent state

Chen Kun Chen Shu-Xin Wu De-Wei Yang Chun-Yan Wang Xi Li Xiang Wu Hao Liu Zhuo-Wei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 194203 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.194203

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.194203>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I19>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

激光线宽对单次通过 PPMgO:LN 晶体倍频效率的影响

Influence of laser linewidth on the conversion efficiency of single-pass frequency doubling with a PPMgO:LN crystal

物理学报.2016, 65(7): 074207 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.074207>

双光子失谐对慢光和光存储影响的实验研究

Experimental study of the effects of two-photon detuning on slow light and light memory

物理学报.2016, 65(1): 014205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014205>

基于压缩光的量子精密测量

Quantum precision measurement based on squeezed light

物理学报.2015, 64(23): 234210 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.234210>

基于量子相干控制吸收的准  $\Lambda$  型四能级原子局域化研究

Study on atomic localization of  $\Lambda$ -type quasi-four level atoms based on absorption with quantum coherent control

物理学报.2015, 64(13): 134204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.134204>

量子相空间分布函数与压缩相干态表示间的变换关系

Transform relations between squeezed coherent state representation and quantum phase space distribution functions

物理学报.2015, 64(2): 024207 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.024207>

## 相干态和压缩真空态的自适应最优估计方法\*

陈坤 陈树新† 吴德伟 杨春燕 王希 李响 吴昊 刘卓崑

(空军工程大学信息与导航学院, 西安 710077)

(2016年3月30日收到; 2016年7月7日收到修改稿)

针对文献[物理学报 65 054203]中量子零拍探测技术测量的输出相位精度与相位自身相关, 且对本振光、压缩真空光和相干光的相位有严格要求, 在理论上设计了一种相干态和压缩真空态的自适应最优估计方法. 首先以纯态的方法推导得到相干态和压缩真空态的量子费舍尔信息,  $\sinh^2 r + |\alpha|^2 e^{2r}$ . 设计了一组能使估计误差达到量子 Cramer-Rao 下界的最优半正定算子值测量算子, 但该测量算子需要精确已知所要估计的相位参数. 为此, 引入了一种自适应估计方法, 通过不断更新测量算子和概率函数, 利用最大似然估计器逐渐得到相位参数. 经理论证明, 该方法能以概率 1 收敛于相位真值, 且能达到量子 Cramer-Rao 下界.

**关键词:** 量子零拍探测, 半正定算子值测量, 量子 Cramer-Rao 下界, 最大似然估计器

**PACS:** 42.50.-p, 06.20.-f, 06.30.Gv

**DOI:** 10.7498/aps.65.194203

## 1 引言

Sagnac 效应是由 G. Sagnac 在 1913 年首次提出 [1], 在传感 [2]、探测 [3,4] 和旋转精密测量领域 [5-7] 有着广泛的应用. 基于 Sagnac 原理制成的光学陀螺具有全固态、高精度、高稳定性和工作时间长等优点, 是目前不可或缺的惯性导航器件. 但由于误差累积, 需要外部信号 (如 GPS) 不断地进行数据校正. 为实现全自主导航, 有效提高陀螺的输出精度一直是陀螺发展的研究方向 [8].

陀螺精度主要受限于 Sagnac 干涉输出的两光路的相对相位差  $\theta$  的测量精度, 该相位差  $\theta$  与光路的旋转速率  $\Omega_r$  成线性关系  $\theta \propto \Omega_r$ . 在光学领域, 利用量子效应 (纠缠和压缩) 可以有效地增强相位  $\theta$  的测量精度. Bertocchi 小组 [9] 研究了单光子的量子 Sagnac 效应, 因单光子没有关联效应而没有能提高相位  $\theta$  的测量精度. Kolkiran 小组 [10] 研究了双光子纠缠光源的 Sagnac 相位输出精度, 理论表明符合测量技术能够提高测量精度. 但纠缠光子的产生效率相对较低. 我们在文献 [7] 中利用压缩

真空光和相干光分别注入分束器的两输入端口, 并采用量子零拍探测技术提取相位  $\theta$ , 理论表明其输出精度得到明显的提升, 陀螺的动态范围和灵敏度输出极限随着压缩程度的增加呈指数级增长. 但该技术存在两个不足: 1) 对本振光的相位和输入相干光的相位有严苛的要求; 2) 输出的相位灵敏度依赖于待估计的相位  $\theta$  自身, 当 Sagnac 干涉仪旋转较慢时, 相位  $\theta$  的灵敏度很差, 这将不利于实际运用. 尽管可通过对零拍探测后的输出信号作  $\frac{\pi}{2}$  的相位偏置和引入自适应反馈技术使敏感环始终在相位  $\theta = 0$  时有最佳输出灵敏度, 却增加了实现难度. 为此, 我们引进半正定算子值测量 (positive operator-valued measure, POVM) 方法, 利用量子参数估计理论对输出相位  $\theta$  进行估计.

首先推导了压缩真空态和相干态的量子 Fisher 信息 (QFI), 并给出最优测量基的一个充分条件; 对压缩真空态和相干态设计了一组最优 POVM 算子, 但最优算子需精确已知待估计的相位  $\theta$ , 为此, 设计了一种自适应估计方法, 理论证明随着多次迭代能以概率 1 收敛于真值, 且估计精度能确切地达到 Cramer-Rao 下界. 该方法能有效估计

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61573372) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: chenshuxin68@163.com

出相位  $\theta$ , 且不需要引入本振光和相位偏置, 只需设计相应的测量算子即可实现.

### 2 相干态 $\otimes$ 压缩真空态的 Sagnac 干涉

如图 1 所示, 激光光源经过分束器 A 分为两束, 一束信号光用湮灭算符  $\hat{a}_{in}$  表示为 Sagnac 干涉仪的输入, 另一束经过倍频后作为简并参量放大器的抽运光, 以生成压缩真空光  $\hat{b}_{in}$ , 从分束器 C 另一端输入. 将 Sagnac 干涉仪处理成 Mach-Zehnder (MZ) 干涉仪 [7], 由于旋转引起两臂输出的相对相位差  $\theta$ , 如图 1 (b) 所示, 旋转速率  $\Omega_r$  与相位差  $\theta$  有如下线性关系 [11,12]:

$$\theta = \frac{4\pi L r \Omega_r}{c\lambda}, \quad (1)$$

式中  $\lambda$  是光波波长,  $L$  为光纤长度,  $r$  为干涉仪的半径,  $c$  是光速. 旋转速率  $\Omega_r$  的精度取决于相位  $\theta$  的测量精度.

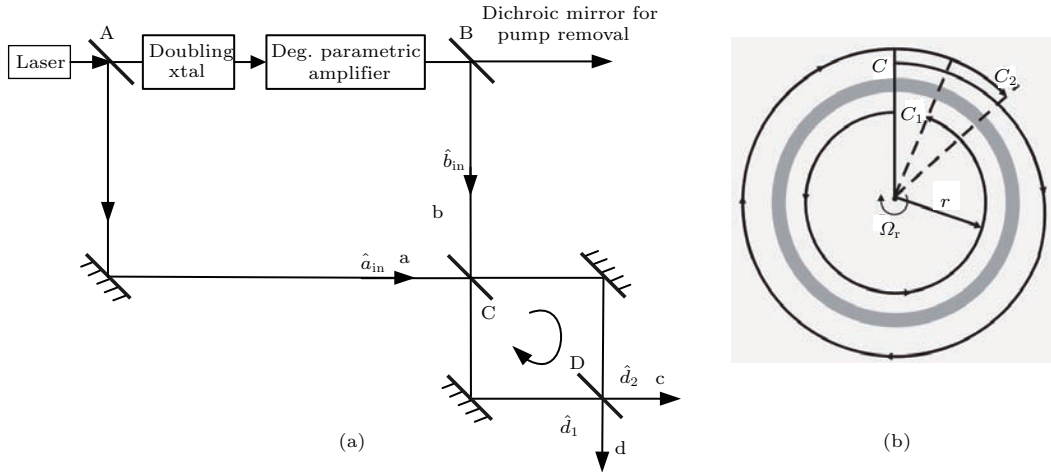


图 1 相干态  $\otimes$  压缩真空态的 Sagnac 干涉 (a) 压缩真空产生及输入; (b) Sagnac 效应原理图

Fig. 1. Sagnac interferometry of squeezed vacuum and coherent state: (a) The generation of squeezed vacuum light and input into Sagnac interferometer; (b) a schematic diagram of Sagnac effect.

## 3 POVM

### 3.1 相干态 $\otimes$ 压缩真空态的 QFI

POVM 中的半正定测量算子是一系列的非负厄米算符  $E(\epsilon)$  (非负是保证得到的概率非负), 满足  $\sum_{\epsilon} E(\epsilon) = 1$  [14]. 标准的投影测量 (von-Neumann measurement) 是一种特殊的 POVM, 若  $E(\epsilon)$  正交, 即  $E(\epsilon)E(\epsilon') = E(\epsilon)\delta(\epsilon - \epsilon')$ , 则 POVM 就是标准的投影测量 (von-Neumann measurement) [15]. 通

过 POVM 能够得到以输出相位的条件概率 [16]

$$P(\epsilon|\theta) = \text{Tr}[E(\epsilon)\rho(\theta)], \quad (4)$$

得到测量输出结果  $\epsilon$ . 对于测量输出的随机结果  $\epsilon$ , 与参数空间  $\theta$  存在着对应关系, 合理地选取参数估计器  $M(\epsilon)$  能得到需要估计的未知参数, 即相位  $\theta \in \Theta$ . 由于估计器是随机变量  $\epsilon$  的函数, 故其输出结果也是随机变

相干光  $\hat{a}_{in}$  和压缩真空光  $\hat{b}_{in}$  输入 Sagnac 干涉仪中, 经过旋转效应引起的两束光的相对相位差  $\theta$ , 经过分束器合成输出, 整个物理过程建模如下:

$$|\psi(\theta)\rangle \equiv |\varphi_{out}\rangle = e^{-i\theta\hat{J}_y}|\varphi_{in}\rangle, \quad (2)$$

其中,  $\hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{a}^\dagger\hat{b} - \hat{b}^\dagger\hat{a})$  为角动量算符 [13],  $|\varphi_{in}\rangle = |\alpha\rangle|\xi\rangle$ ,  $|\alpha\rangle$  和  $|\xi\rangle$  分别表示相干态和压缩态.  $e^{-i\theta\hat{J}_y}$  是对 Sagnac 旋转效应引起的两束光的相对相位差  $\theta$  的物理过程的量子表征. 用密度算符可表示如下:

$$\rho(\theta) = e^{i\theta\hat{J}_y}\rho_0 e^{-i\theta\hat{J}_y}, \quad (3)$$

式中  $\rho_0 = |\varphi_{in}\rangle\langle\varphi_{in}|$  是输入态的密度算符. (3) 式表征的是一个含待估参数的物理系统, 要对该参数进行有效估计, 首先应在系统中进行测量, 得到含参数的函数, 再由函数映射关系得到系统参数. 测量是一个关键步骤, 直接决定了后面参数估计的精度和性能. 我们引入的 POVM 方法得到的是不同测量结果在待估参数条件下的概率.

量, 其输出的期望和方差分别定义为

$$E(\hat{\theta}) = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\theta)M(\varepsilon), \quad (5)$$

$$Var(\hat{\theta}) = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\theta)[M(\varepsilon) - E(\hat{\theta})]^2. \quad (6)$$

一个好的估计器, 必须是无偏的, 即

$$E(\hat{\theta}) = \theta^t, \quad (7)$$

其中  $\theta^t$  是系统中要估计的真实相位值. 而对任何无偏估计器, 其方差有确切的下界, 即 Cramer-Rao 下界,

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{FI(\theta)}, \quad (8)$$

其中  $FI(\theta) = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\theta) \left( \frac{\partial \log P(\varepsilon|\theta)}{\partial \theta} \right)^2$  称为 Fisher 信息. 容易发现, 最大的 Fisher 信息对应着最小的方差, 即估计器的性能最佳. 通常条件下一旦概率密度函数  $P(\varepsilon|\theta)$  确定, 则 Fisher 信息也随之确定. 与经典的信号估计理论, 即在某一环境中其参数的条件概率密度函数只有一个不同, 在量子估计理论中, 条件概率密度函数  $P(\varepsilon|\theta)$  取决于测量算子  $E(\varepsilon)$  和输入量子态. 本文的输入量子态为相干态和压缩真空态已确定, 则测量算子  $E(\varepsilon)$  的选取决定了参数估计的性能是否能达到最优, 是测量方案和参数估计过程中最重要的步骤.

显然, 最优的测量算子  $E(\varepsilon)$  是存在的, 其对应的 Fisher 信息最大, 量子估计理论称之为 QFI, 也是 Fisher 信息的上界<sup>[17,18]</sup>. 具体地, 对于所有可能的 POVM 测量可表示为

$$QFI(\theta) \equiv \max_{\{E(\varepsilon)\}} FI[\rho(\theta), \{E(\varepsilon)\}]. \quad (9)$$

经过严格的理论推导<sup>[15]</sup>, 有

$$QFI[\rho(\theta)] = \text{Tr}[\rho(\theta)L_{\theta}^2], \quad (10)$$

其中  $L_{\theta}$  是称之为 (symmetric logarithmic derivative, SLD) 对称对数导数的厄米特算符, 满足

$$\frac{\partial \rho(\theta)}{\partial \theta} = -[N, \rho(\theta)] = \frac{\rho(\theta)L_{\theta} + L_{\theta}\rho(\theta)}{2}. \quad (11)$$

尽管  $\rho(\theta)$  是相干态和压缩真空态的混合态, 但满足纯态的一个性质, 即  $\rho(\theta) = \rho(\theta)^2$ , 则对  $\theta$  求导有  $\partial_{\theta}\hat{\rho}(\theta) = \partial_{\theta}\hat{\rho}(\theta)^2 = [\partial_{\theta}\hat{\rho}(\theta)]\hat{\rho}(\theta) + \hat{\rho}(\theta)[\partial_{\theta}\hat{\rho}(\theta)]$ . 对比 SLD 的定义 (11) 式, 得到

$$\begin{aligned} L_{\theta} &= 2\partial_{\theta}\hat{\rho}(\theta) \\ &= 2|\psi(\theta)\rangle\langle\partial_{\theta}\psi(\theta)| + 2|\partial_{\theta}\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)| \end{aligned}$$

$$= 2i[\hat{\rho}(\theta), \hat{J}_y]. \quad (12)$$

其中用到  $|\partial_{\theta}\psi(\theta)\rangle = \partial_{\theta}|\psi(\theta)\rangle = -i\hat{J}_y|\psi(\theta)\rangle$ ,  $|\psi(\theta)\rangle = e^{-i\theta\hat{J}_y}|\varphi_{\text{in}}\rangle$ , 该式与纯态的表达式一致. 容易得到

$$QFI[\rho(\theta)] = 4(\Delta\hat{J}_y)^2, \quad (13)$$

其中定义  $(\Delta\hat{J}_y)^2 \equiv \langle\psi_{\text{in}}|\hat{J}_y^2|\psi_{\text{in}}\rangle - |\langle\psi_{\text{in}}|\hat{J}_y|\psi_{\text{in}}\rangle|^2$ .

推导过程如下:

$$\begin{aligned} QFI[\rho(\theta)] &= \text{Tr}[\rho(\theta)L_{\theta}^2] \\ &= \langle\psi(\theta)|L_{\theta}^2|\psi(\theta)\rangle \\ &= -4\langle\psi(\theta)|(\rho(\theta)\hat{J}_y\rho(\theta)\hat{J}_y - \rho(\theta)\hat{J}_y^2\rho(\theta) \\ &\quad - \hat{J}_y\rho(\theta)\hat{J}_y + \hat{J}_y\rho(\theta)\hat{J}_y\rho(\theta))|\psi(\theta)\rangle \\ &= 4(\langle\psi(\theta)|\hat{J}_y^2|\psi(\theta)\rangle - \langle\psi(\theta)|\hat{J}_y|\psi(\theta)\rangle^2) \\ &= 4(\langle\varphi_{\text{in}}|\hat{J}_y^2|\varphi_{\text{in}}\rangle - \langle\varphi_{\text{in}}|\hat{J}_y|\varphi_{\text{in}}\rangle^2) \\ &\equiv (\Delta\hat{J}_y)^2. \end{aligned}$$

其中利用公式  $e^{\delta\hat{A}}\hat{B}e^{-\delta\hat{A}} = \hat{B} + \delta[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\delta^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{\delta^3}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots$ . 在输入态为压缩光和相干光的条件下, 进一步计算可得到该系统的 QFI 为

$$\begin{aligned} QFI[\rho(\theta)] &= 4(\Delta\hat{J}_y)^2 \\ &= 4(\langle\varphi_{\text{in}}|\hat{J}_y^2|\varphi_{\text{in}}\rangle - \langle\varphi_{\text{in}}|\hat{J}_y|\varphi_{\text{in}}\rangle^2) \\ &= \langle\varphi_{\text{in}}|(b^{\dagger}aa^{\dagger}b - b^{\dagger}ab^{\dagger}a - a^{\dagger}ba^{\dagger}b + a^{\dagger}bb^{\dagger}a)|\varphi_{\text{in}}\rangle \\ &\quad + \langle\varphi_{\text{in}}|(a^{\dagger}b - b^{\dagger}a)|\varphi_{\text{in}}\rangle \\ &= \sinh^2 r + |\alpha|^2 e^{2r}, \end{aligned} \quad (14)$$

可以发现, 该结果并不依赖于待估计的相位参数  $\theta$ , 由此可得到最小估计方差  $Var_{\text{min}}(\hat{\theta}) = 1/(\sinh^2 r + |\alpha|^2 e^{2r})$ , 则最小估计误差  $\delta_{\text{min}}(\hat{\theta}) = 1/\sqrt{\sinh^2 r + |\alpha|^2 e^{2r}}$ . 文献<sup>[7]</sup>利用量子平衡零拍探测技术, 通过进一步合理地选取本振光和输入光的相位, 同时采用相位偏置得到的估计误差为  $\delta\theta = \sqrt{1 + e^{2r} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}/|\alpha|e^r$ . 尽管采取了一些辅助技术, 但估计性能仍随着输出相位  $\theta$  的变化而变化, 且在压缩光输入的情况下, 估计误差  $\delta\theta$  始终大于  $\delta_{\text{min}}(\hat{\theta})$ . 为达到量子 Cramer-Rao 下界, 且误差不受相位  $\theta$  的影响, 我们需要寻求最优测量基 (即最优测量算子).

### 3.2 最优测量基

QFI是在不同的所有可能的测量算子中的最大的Fisher信息,对应的参数估计有最小方差,此时的测量算子是最优的(然而并不是惟一的).为精确地估计出相位 $\theta$ ,我们需要寻找最优的测量算子.若测量算子满足条件<sup>[15,16]</sup>

$$\begin{aligned} \text{Im}(\text{Tr}[\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_\theta\hat{E}(\varepsilon)]) &= 0, \quad \forall \varepsilon, \\ \hat{\rho}(\theta)(1 - K_{\text{const}}\hat{L}_\theta)\hat{E}(\varepsilon) &= 0, \quad \forall \varepsilon, \end{aligned} \quad (15)$$

即是最优的,能确切得到QFI,其中 $K_{\text{const}}$ 是某一常数.要得到如(15)式的条件的充要条件是困难的,但我们可以得到一个充分条件,即存在一类测量算子肯定是满足上述条件:测量算子是SLD本征空间的投影, $\hat{L}_\theta|\varphi_l\rangle = \lambda_l|\varphi_l\rangle$ ,测量算子 $\{\hat{E}_l\} = \{|\varphi_l\rangle\langle\varphi_l|\}$ ,常数 $K_{\text{const}} = 1/\lambda_l$ .我们构造一个 $|\varphi_l\rangle$ ,使其满足上述要求.令 $|\varphi_1\rangle = (1 - |\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)|)\hat{J}_y|\psi(\theta)\rangle$ ,则构造 $|\varphi_l\rangle = |\varphi_1\rangle + i\sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}|\psi(\theta)\rangle$ ,联立(12)式有

$$\begin{aligned} \hat{L}_\theta|\varphi_l\rangle &= 2i|\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)|\hat{J}_y|\varphi_1\rangle \\ &\quad - 2\sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}|\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)|\hat{J}_y|\psi(\theta)\rangle \\ &\quad + 2\sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}\hat{J}_y|\psi(\theta)\rangle \\ &= 2i|\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)|\hat{J}_y(1 - |\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)|) \\ &\quad \times \hat{J}_y|\psi(\theta)\rangle + 2\sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}|\varphi_1\rangle \\ &= 2i|\psi(\theta)\rangle(\langle\psi(\theta)|\hat{J}_y^2|\psi(\theta)\rangle \\ &\quad - \langle\psi(\theta)|\hat{J}_y|\psi(\theta)\rangle^2) + 2\sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}|\varphi_1\rangle \\ &= 2i\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle|\psi(\theta)\rangle + 2\sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}|\varphi_1\rangle \\ &= 2\sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}|\varphi_l\rangle, \end{aligned} \quad (16)$$

则 $|\varphi_l\rangle$ 是 $\hat{L}_\theta$ 的特征向量,特征值 $\lambda_l = 2\sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}$ ,同时需注意到 $4\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = QFI[\rho(\theta)]$ .容易发现存在另一个测量算子的态矢量 $|\varphi_l^-\rangle = |\varphi_1\rangle - i\sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}|\psi(\theta)\rangle$ 也是 $\hat{L}_\theta$ 的特征向量,特征值 $\lambda_l = -2\sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}$ .则得到一组最优测量算子 $\hat{E}_l^\pm = \frac{1}{2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}|\varphi_l^\pm\rangle\langle\varphi_l^\pm|$ 以及 $\hat{E}_0 = 1 - \hat{E}_l^+ - \hat{E}_l^-$ .由 $\{\hat{E}_0, \hat{E}_l^+, \hat{E}_l^-\}$ 构成一个完备的POVM.若准确已知相位 $\theta$ ,则通过上述测量能得到 $\theta$ 的无偏估计,估计方差能达到QFI下界.然而,这里存在一个致命的矛盾,即上述POVM需要准确已知的相位 $\theta$ 正是我们所需要估计的.不能准确已知相位 $\theta$ ,就不能设计出最优的测量方案.为此,我们引

入Nagaoka提出的量子态自适应估计方法(adaptive quantum state estimate, AQSE)<sup>[19]</sup>,该方法在2012年被实验所验证<sup>[20]</sup>.

### 4 量子参数自适应估计

Nagaoka假设测量算子 $E(\theta_i)$ 是相位为 $\theta_i$ 的系统的最优测量算子.首先,第一步,任意选取一个初始相位 $\theta_0$ ,将测量算子 $E(\theta_0)$ 作用于系统输出,得到观测值 $x_0$ 的概率函数 $L_1(\theta) = f(x_0; \theta, E(\theta_0))$ ,利用最大似然估计算法得到一个相位估计值 $\hat{\theta}_1$ ;在第 $i$ 步,利用上一个相位估计值 $\hat{\theta}_{i-1}$ 得到测量算子 $E(\theta_{i-1})$ ,作用于系统输出更新观测值的似然函数 $L_i(\theta) = \prod_{k=1}^i f(x_k; \theta, E(\theta_{k-1}))$ ,进而用最大似然估计器估计出相位 $\hat{\theta}_i$ ,如此循环迭代.

结合Nagaoka的思想,本文的具体实现方式简述如下.

首先,假设初始相位为 $\theta_0$ ,则Sagnac系统输出态可写为

$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= \rho(\theta_0) + \frac{1}{2}(L_{\theta_0}\rho(\theta_0) + \rho(\theta_0)L_{\theta_0})(\theta - \theta_0) \\ &\quad + O(\delta\theta^2). \end{aligned} \quad (17)$$

则得到观测输出 $x_0 = \pm$ 的概率为

$$\begin{aligned} p(\pm|\theta) &= \text{Tr}[\rho(\theta)\hat{E}_\pm(\theta_0)] \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}(\theta - \theta_0) + O(\delta\theta^2), \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $|\varphi_1\rangle = (1 - |\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)|)\hat{J}_y|\psi(\theta)\rangle$ .经过 $\bar{N}$ 次测量,分别记得到 $\pm$ 的次数为 $N_\pm$ ,则可得到输出的似然函数

$$\begin{aligned} L_1(\theta) &= f(x_0; \theta, E(\theta_0)) \\ &= \binom{\bar{N}}{N_+} p(+|\theta)^{N_+} p(-|\theta)^{N_-}. \end{aligned} \quad (19)$$

由于对数函数不改变原函数的单调性,故对上式两边求对数,再做最大似然估计

$$\left. \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} \right|_\theta = 0. \quad (20)$$

联立(18)和(19)式可求得

$$\hat{\theta}_1 = \theta_0 + \frac{N_+ - N_-}{2\bar{N}\sqrt{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}}. \quad (21)$$

其次,如(17)式将系统输出态在(21)式的估计结果处展开,并计算相应的观测输出概率,随后计算似然函数 $L_2(\theta) = L_1(\theta)f(x_1; \theta, E(\hat{\theta}_1))$ ,并做最

大似然估计求得一个估计值, 不断循环迭代, 直到几个连续估计的相位值几乎保持不变, 说明此时已得到最佳输出结果, 停止计算.

该自适应方法能有效克服最优测量算子需要已知待估参数的不足, 但该方法能否收敛到真实参数值, 其估计性能如何? 文献 [21, 22] 对 Nagaoka 方法的性能进行了严格的理论证明. 为方便阅读, 这里我们引入其部分思想证明本文方法将会以概率 1 收敛到真值.

记  $R(\theta^t, \theta^v, E) \equiv \ln \frac{f(x; \theta^v, E)}{f(x; \theta^t, E)}$ , 其中  $\theta^t$  是相位的真实值,  $\theta^v$  是函数的自变量,  $E$  是测量算子. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 记  $R^\varepsilon(\theta^t, \theta^v, E) \equiv \sup_{\theta' \in N_\varepsilon(\theta^v)} R^\varepsilon(\theta^t, \theta', E)$ , 其中  $N_\varepsilon(\theta^v)$  是  $\theta^v$  在值域  $\Theta$  中的邻域,  $\theta'$  是邻域  $N_\varepsilon(\theta^v)$  中的任一参量.

先证对任意  $\theta^v \neq \theta^t$ , 有

$$\sup_{E \in \Gamma} E_{\theta^t} [e^{R(\theta^t, \theta^v, E)/2}] < 1. \quad (22)$$

**证明** 由于  $g(E) \equiv E_{\theta^t} [e^{R(\theta^t, \theta^v, E)/2}] = \sum_{x \in X} \sqrt{f(x; \theta^v, E)} \sqrt{f(x; \theta^t, E)}$  在紧集  $\Gamma$  上连续 ( $X$  是测量数据  $x$  的集合), 则  $\exists E_0 \in \Gamma$ , 使对任意  $E \in \Gamma$  有  $g(E) \leq g(E_0)$ .  $\exists \gamma > 0$ , 有  $x$  的集合  $A_\gamma \equiv \{x; |\sqrt{f(x; \theta^v, E_0)} - \sqrt{f(x; \theta^t, E_0)}| > \gamma\}$ . 对于该集合  $A_\gamma$  中的任一  $x$  有  $\sqrt{f(x; \theta^v, E_0)} \sqrt{f(x; \theta^t, E_0)} < \frac{1}{2} [f(x; \theta^v, E_0) + f(x; \theta^t, E_0)] - \frac{\gamma^2}{2}$ , 则

$$\begin{aligned} g(E_0) &\equiv \left( \sum_{x \in A_\gamma} + \sum_{x \in A_\gamma^c} \right) \sqrt{f(x; \theta^v, E)} \\ &\quad \times \sqrt{f(x; \theta^t, E)} \\ &< \sum_{x \in A_\gamma} \left\{ \frac{1}{2} [f(x; \theta^v, E_0) + f(x; \theta^t, E_0)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma^2}{2} \right\} \\ &\quad + \sum_{x \in A_\gamma^c} \frac{1}{2} [f(x; \theta^v, E_0) + f(x; \theta^t, E_0)] \\ &= 1 - \sum_{x \in A_\gamma} \frac{\gamma^2}{2} < 1. \end{aligned} \quad (23)$$

再证对任意  $\theta^v \neq \theta^t$ , 有

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{E \in \Gamma} E_{\theta^t} [e^{R^\varepsilon(\theta^t, \theta^v, E)/2}] < 1. \quad (24)$$

**证明** 由于  $g^\varepsilon(E) \equiv E_{\theta^t} [e^{R^\varepsilon(\theta^t, \theta^v, E)/2}] = \sum_{x \in X} \sup_{\theta' \in N_\varepsilon(\theta^v)} \sqrt{f(x; \theta', E)} \sqrt{f(x; \theta^t, E)}$ , 随着  $\varepsilon \rightarrow$

$0$ ,  $g^\varepsilon(E) \rightarrow g(E)$ , 且对于  $\varepsilon > 0$ ,  $g^\varepsilon(E)$  在  $\Gamma$  上是连续的. 对任意  $\delta > 0$ ,  $\exists \varepsilon_0 \in (0, \varepsilon) > 0$  使  $g(E) \leq g^\varepsilon(E) < g(E) + \delta$ , 则  $\sup_{E \in \Gamma} g(E) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{E \in \Gamma} g^\varepsilon(E) \leq \sup_{E \in \Gamma} g(E) + \delta$ , 故  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{E \in \Gamma} g^\varepsilon(E) = \sup_{E \in \Gamma} g(E)$ . 由 (22) 式知, (24) 式成立.

对任意  $\theta^v \neq \theta^t$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  和  $b > 0$ , 对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 有

$$P_{\theta^t} \left[ \sum_{i=1}^n R^\varepsilon(\theta^t, \theta^v, E) > 0 \right] \leq e^{-bn}. \quad (25)$$

**证明** 由 (24) 式可知,  $\exists \varepsilon > 0$  和  $b > 0$ , 使  $\sup_{E \in \Gamma} E_{\theta^t} [e^{R^\varepsilon(\theta^t, \theta^v, E)/2}] = e^{-b}$ . 定义

$$M_n \equiv \prod_{i=1}^n e^{R^\varepsilon(\theta^t, \theta^v, E_i)/2},$$

则

$$\begin{aligned} E_{\theta^t} [M_n] &= E_{\theta^t} [M_{n-1} e^{R^\varepsilon(\theta^t, \theta^v, E_n)/2}] \\ &= M_{n-1} E_{\theta^t} [e^{R^\varepsilon(\theta^t, \theta^v, E_n)/2}] \\ &\leq e^{-b} M_{n-1}, \end{aligned}$$

进一步可得到  $E_{\theta^t} [M_n] \leq e^{-nb}$ . 于是有

$$\begin{aligned} P_{\theta^t} \left[ \sum_{i=1}^n R^\varepsilon(\theta^t, \theta^v, E) > 0 \right] \\ = P_{\theta^t} [M_n > 1] \leq E_{\theta^t} [M_n] \leq e^{-nb}. \end{aligned}$$

对于任意固定常数  $a > 0$ , 由于  $N_a(\theta^t)^c$  是  $\Theta$  的一个紧子集, 对一个有限的子集  $\{\theta_1, \dots, \theta_r\} \subset N_a(\theta^t)^c$ , 我们有  $N_a(\theta^t)^c \subset \bigcup_{\lambda=1}^r N_{\varepsilon_\lambda}(\theta_\lambda)$ , 其中选取  $\varepsilon_\lambda$  保证 (25) 式在  $\theta^v = \theta_\lambda$  和  $b = b_\lambda$ ,  $\lambda = 1, \dots, r$  成立, 则

$$\begin{aligned} P_{\theta^t} [|\hat{\theta}_n - \theta^t| \geq a] \\ = P_{\theta^t} \left[ \max_{\theta \in N_a(\theta^t)^c} \sum_{i=1}^n R(\theta^t, \theta^v, E_i) > 0 \right] \\ \leq P_{\theta^t} \left[ \max_{1 \leq \lambda \leq r} \sup_{\theta \in N_a(\theta^t)^c} \sum_{i=1}^n R(\theta^t, \theta^v, E_i) > 0 \right] \\ \leq P_{\theta^t} \left[ \max_{1 \leq \lambda \leq r} \sum_{i=1}^n R^{\varepsilon_\lambda}(\theta^t, \theta_\lambda, E_i) > 0 \right] \\ \leq \sum_{\lambda=1}^r P_{\theta^t} \left[ \sum_{i=1}^n R^{\varepsilon_\lambda}(\theta^t, \theta_\lambda, E_i) > 0 \right] \\ \leq \sum_{\lambda=1}^r e^{-b_\lambda n} \\ \leq r e^{-b_0 n}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中  $b_0 \equiv \min_{1 \leq \lambda \leq r} b_\lambda$  是一个大于0的常数. 则由 Borel-Cantelli 引理有  $P_{\theta^t} [|\hat{\theta}_n - \theta^t| \geq a, i.o.] = 0$ . 由于  $a$  是任意常数, 估计值  $\hat{\theta}_n$  将会以概率1收敛到真值  $\theta^t$ .

由以上证明可以发现, 由于  $\hat{\theta}_n$  将会一致收敛于真值  $\theta^t$ , 则第  $n - 1$  次迭代的测量基  $E(\theta_{n-1})$  是最优测量基, 它将满足条件 (15). 根据文章第三节的分析, 随着  $n$  次迭代, 当  $\hat{\theta}_n$  一致收敛于真值  $\theta^t$  时, 其估计方差将会达到 Cramer-Rao 下界.

## 5 结 论

由于相干态和压缩真空态的混合态是纯态的一个性质, 即  $\rho(\theta) = \rho(\theta)^2$ , 故采用纯态的方法求得了相干态和压缩真空态的 QFI,  $\sinh^2 r + |\alpha|^2 e^{2r}$ , 与文献 [23] 的结果一致, 然而却极大简化了推导过程. 通过设计最优测量算子, 理论表明能确切达到量子 Cramer-Rao 下界. 但最优测量算子需要精确已知所要估计的相位参数, 为解决该矛盾, 引入了一种自适应方法, 通过不断更新测量算子和概率密度函数, 利用最大似然估计能不断逼近真值. 理论证明该方法能一致收敛于真值, 且达到量子 Cramer-Rao 下界. 然而本文设计的 POVM 自适应估计方法是一种理论方法, 如何在实验上巧妙的实现, 特别是实现该测量算子的构造, 是一项新颖且具挑战性的工作.

## 参考文献

[1] Bouyer P 2014 *Gyroscopy and Navigation* **5** 20

[2] Shao L Y, Luo Y, Zhang Z Y, Zou X H, Luo B, Pan W, Yan L S 2015 *Opt. Commun.* **336** 73

[3] Joseph S 2014 *Gen. Relativ. Gravit.* **46** 1710

[4] Trevor L C, Samuel D P, Robert J H, Byungmoon C, David M J 2014 *Opt. Lett.* **39** 513

[5] Kiarash Z A, Michel J F D 2015 *J. Opt. Soc. Am. B* **32** 339

[6] John R E T, Christopher P 2014 *Appl. Phys. B* **114** 333

[7] Chen K, Chen S X, Wu D W, Yang C Y, Wu H 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 054203 (in Chinese) [陈坤, 陈树新, 吴德伟, 杨春燕, 吴昊 2016 物理学报 **65** 054203]

[8] Kuznetsov A G, Molchanov A V, Chirkin M V, Izmailov E A 2015 *Quantum Electron.* **45** 78

[9] Bertocchi G, Alibart O, Ostrowsky D B 2006 *J. Phys. B* **39** 1011

[10] Kolkiran, Agarwal G S 2007 *Opt. Express* **15** 6798

[11] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press) pp101-106

[12] Li X, Voss P L, Sharping J E, Kumar P 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 053601

[13] Yurke B, McCall S L, Klauder J R 1986 *Phys. Rev. A* **33** 4033

[14] Alex M 2006 *Phys. Rev. A* **73** 033821

[15] Luca P, Augusto S 2014 *arXiv* 1411.5164v1

[16] Takanori S 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042126

[17] Barndor-Nielsen O E, Gill R D 2000 *J. Phys. A: General Phys.* **33** 4481

[18] Helstrom C W 1976 *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press) pp266-276

[19] Nagaoka H 2005 *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference* (Singapore: World Scientific Press) pp125-132

[20] Okamoto R, Minako I, Satoshi O, Koichi Y, Hiroshi I, Fujiwara A, Shigeki T 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 130404

[21] Fujiwara A 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 12489

[22] Fujiwara A 2011 *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** 079501

[23] Pezze L, Smerzi A 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 073601

# Adaptive optimal measurement for the squeezed vacuum and coherent state\*

Chen Kun   Chen Shu-Xin<sup>†</sup>   Wu De-Wei   Yang Chun-Yan   Wang Xi   Li Xiang  
Wu Hao   Liu Zhuo-Wei

(Information and Navigation College, Airforce Engineering University, Xi'an 710077, China)

( Received 30 March 2016; revised manuscript received 7 July 2016 )

## Abstract

The output phase of the Sagnac interferometer has been measured with quantum balanced homodyne technique when coherent light and squeezed vacuum light are fed into the Sagnac interferometer simultaneously [Chen Kun *et al.*, *Acta Phys. Sin.* **65** 054203(2016)]. Nevertheless, there exist two deficiencies: 1) the phase sensitivity is related to the phase itself; 2) there are strict requirements for the phases of local oscillator light, coherent light and squeezed vacuum light.

For overcoming these deficiencies, an adaptive optimal measurement scheme is suggested for the phase estimation. Firstly, we calculate that the quantum Fisher information (QFI) of the squeezed vacuum and coherent state is  $\sinh^2 r + |\alpha|^2 e^{2r}$  by treating them as a quantum pure state, for they satisfy a condition of the quantum pure state, namely  $\rho(\theta) = \rho(\theta)^2$ . The QFI is related to quantum Cramer-Rao lower bound which can be used to evaluate the performance of the estimator. Secondly, we make an analysis of positive operator-valued measure (POVM) and design a set of the optimal measurement operators for reaching the quantum Cramer-Rao lower bound, whereas the optimal measurement operators depend on the true value of the phase which is what we want to estimate. In order to solve the problem and estimate the parameter effectively, an adaptive method is suggested. We set an initial value of the phase parameter to obtain a set of measurement operators which are not optimal at the first step. And then the initial measurement operators are used for POVM and to obtain a conditional probability function, from which we can obtain a new value of the phase with maximum likelihood estimator. Therefore, the measurement operators and conditional probability function will be updated with the new value. As the measurement operators and conditional probability function are updated step by step, we can estimate the value adaptively. In fact, the results of the maximum likelihood estimator will converge at the true value of the phase parameter gradually, which is then proved with the theoretical analysis. All in all, an adaptive measurement method of estimating the phase parameter of the squeezed vacuum and coherent state in Sagnac interferometer is suggested, and is proved theoretically to be that the scheme will converge at the true value of the phase with a probability of 1 and can reach the quantum Cramer-Rao lower bound.

**Keywords:** quantum balanced homodyne technique, positive operator-valued measure, quantum Cramer-Rao lower bound, maximum likelihood estimator

**PACS:** 42.50.-p, 06.20.-f, 06.30.Gv

**DOI:** 10.7498/aps.65.194203

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61573372).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [chenshuxin68@163.com](mailto:chenshuxin68@163.com)