物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

包含非中心电耦极矩的环状非谐振子势场赝自旋对称性的三对角化表示

高洁 张民仓

Tridiagonal representation with pseudospin symmetry for a noncentral electric dipole and a ring-shaped anharmonic oscillator potential

Gao Jie Zhang Min-Cang

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 020301 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.020301

在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.020301

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I2

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 65, No. 2 (2016) 020301

包含非中心电耦极矩的环状非谐振子势场赝自旋对称性的三对角化表示*

高洁　张民仓†

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 西安 710119)

(2015 年 7 月 31 日收到; 2015 年 9 月 28 日收到修改稿)

提出了一个包含非中心电耦极矩分量的环状非谐振子势模型, 在能够负载Dirac波动算子三对角化表示的完全平方可积 L^2 空间讨论了这一势场的赝自旋对称性. 利用三对角化矩阵方案, 使得求解Dirac方程转换为寻求波函数展开系数满足的三项递推关系式. 角向波函数和径向波函数分别以Jacobi多项式和Laguerre多项式表示. 由径向分量展开系数递推关系式的对角化条件得到束缚态的能量谱, 显示出这一势模型具有严格的赝自旋对称性

关键词: 非中心电耦极矩, 赝自旋对称性, Dirac方程, 三对角化表示

PACS: 03.65.Ge, 03.65.Pm, 03.65.Fd, 02.30.Gp　　**DOI:** 10.7498/aps.65.020301

1 引　言

在核物理学的研究中, 为了解释在球形核中观察到的单核子某些能级间的准简并现象, 人们提出了赝自旋对称性的概念 [1,2]. 具有非相对论量子数 $(n_r, \ell, j=\ell+1/2)$ 和 $(n_r-1, \ell+2, j=\ell+3/2)$ 的两个能级是准简并的, 其中 n_r, ℓ, j 分别表示单核子的径向、轨道及总角动量量子数. 当 n_r, ℓ 确定时, 这样的一对准简并态被称之为赝自旋伴态. 赝自旋伴态具有相同的赝轨道角动量量子数 $\tilde{\ell}$, 例如赝自旋伴态 $(n_r p_{3/2}; (n_r-1)f_{5/2})$, $\tilde{\ell}=2$; $(n_r d_{5/2}; (n_r-1)g_{7/2})$, $\tilde{\ell}=3$; $(n_r f_{7/2}; (n_r-1)h_{9/2})$, $\tilde{\ell}=4$, 等 [3]. 球形核中单核子能级的这种双重结构能够用赝轨道角动量 $\tilde{\ell}=\ell+1$ 与赝自旋角动量 $\tilde{s}=1/2$ 的耦合 $j=\tilde{\ell}\pm\tilde{s}$ 描述.

赝自旋对称性的提出已有将近半个世纪的历史. 然而在以后相当长的时间内, 人们始终无法清晰理解其产生的原因, 直到Ginocchio的工作揭示出赝轨道角动量 $\tilde{\ell}$ 恰好是Dirac旋量下分量的轨道角动量, 并且建立起赝自旋对称性与大小相等但符号相反的标量势 $S(r)$ 和矢量势 $V(r)$ 之间的联系 [4,5]. 孟杰及合作者依据相对论性的连续Hartree-Bogolyubov理论 [6], 证明了在 $\mathrm{d}[V(r)+S(r)]/\mathrm{d}r=0$ 的更普遍条件下, 赝自旋对称性存在 [7,8], 并且在 $\mathrm{d}[V(r)-S(r)]/\mathrm{d}r=0$ 的条件下, 自旋对称性也存在 [9]. 梁豪兆等结合超对称量子力学、摄动理论及相似重整化群的方法, 为定量地研究赝自旋对称性的起源及其破缺机理提供了另一有效途径 [10,11]. 赝自旋对称性概念能够解释核物理学中的许多现象 [12−14], 但赝自旋对称性的提出却不仅是对核物理学中一个理想模型的讨论, 而其本身也得到相关实验事实和实验结果的支持 [15,16]. 然而在这一领域, 还有许多问题有待于人们进行更深入的探索 [17].

谐振子模型是一个可精确求解的势函数, 在量子力学的建立和发展初期起到了重要的奠基作用, 并在许多领域有着广泛的应用 [18]. 例如, 球谐振子作为中心势模型, 很好地描述了核的单粒子运动及球形变和轴形变核的壳层结构 [19,20]. 近

* 国家自然科学基金 (批准号: 14101020155) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: GK201402012) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: mincangzhang@snnu.edu.cn

　http://wulixb.iphy.ac.cn

年来, 1/2自旋粒子在相对论性谐振子势场中的运动引起了人们的重视. 陈惕生等在Dirac哈密顿量中引入空间坐标平方函数的标量势$S(r)$和矢量势$V(r)$, 建立了一个类谐振子势的二阶微分方程, 在自旋对称性$\varDelta = V(\boldsymbol{r}) - S(\boldsymbol{r}) = 0$及赝自旋对称性$\varSigma = V(r) + S(r) = 0$的条件下解析地得到这一方程的束缚态解[21]. Ginocchio在$\varDelta = V(\boldsymbol{r}) - S(\boldsymbol{r}) = 0$的条件下求解了三轴对称、轴对称及球谐振子势的Dirac方程, 并由此讨论了嵌入在原子核中反核子的光谱结构[22]. 然而考虑到原子核实际上是偏离轴对称或球对称的谐振子模型, 人们提出了一类非谐振子模型, 它们是由在谐振子上附加其他形式的势函数构成[23−25]. 在非谐振子模型中, 一类有代表性的具有如下形式:

$$V_r(r) = Ar^2 + \frac{B}{r^2}. \tag{1}$$

Calogero较早地研究过具有(1)式这样的相互作用势的非相对论系统, 解析地得到了系统的本征值和本征函数[26]. 这一非谐振子模型也有许多实际的应用, 比如能够解释一维量子流体中的相干态[27], 也可用二维各向同性非谐振子模型说明量子点共振隧穿中的能带结构[28]等. 而且这一模型也具有严格的自旋对称性和赝自旋对称性[29]. 在球坐标系中, 非谐振子势(1)和其他形式的环状函数构成了环状非谐振子势.

Hautot研究带电粒子在形式如$V_r(r)+f(\theta)/r^2$的非中心势场中的运动问题时, 曾讨论过如下所示的环状势[30]:

$$f(\theta) = \frac{A + B\cos^2\theta + C\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}, \tag{2}$$

其中的$V_r(r)$分别为库仑势$-H/r$和谐振子势Kr^2. 而Berkdemir在研究同一问题时提出了另一类新的环状势[31]

$$f(\theta) = \frac{\eta + \tau\sin^2\theta + \sigma\sin^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}, \tag{3}$$

并利用Nikiforov-Uvarov (N-U)方法得到了其满足的Schrödinger方程的束缚态解. 然而与类似于$A/\sin^2\theta$, $\cos\theta/\sin^2\theta$, 或者$\cos^2\theta/\sin^2\theta$的单环状势相比较[23−25], (2)和(3)式所表示的$f(\theta)$属于比较复杂的双环状势, 因而近年来受到人们的广泛关注[32−34]. 为了在叙述上与我们以前的研究相一致, 本文中仍然称$f(\theta)$为环状势.

带电粒子与非中心电耦极矩势$V(r,\theta) = \xi\cos\theta/r^2$(球坐标系)间的相互作用是人们熟知的物理学基础问题, 在核物理学和分子物理学的发展初期就得到人们的重视[35,36]. 此后的理论研究和实验发现都证明当凝结分子的恒电耦极矩ξ超过某个最小的临界值后, 电子俘获就会出现[37,38]. 数值计算给出电耦极矩的最小临界值为$\xi = 0.6393$ a.u. (或者1.625 D, 1 D $= 10^{-18}$ esu·cm). 然而在Alhaidari利用三对角化矩阵方案得到非中心电耦极矩势的严格解析解之前[39−41], 人们一直认为这一势场并不属于已有的可精确求解函数的范畴. 因而, 除了Alhaidari的具有开拓性意义的贡献外, 上面提及的文献中并未包含非中心电耦极矩势. 一般地说, 包含非中心电耦极矩的环状非谐振子模型具有如下所示的形式:

$$V(\boldsymbol{r}) = V_r(r) + r^{-2}V_\theta(\theta), \tag{4}$$

其中, $V_r(r)$为(1)式表示的非谐振子分量, $V_\theta(\theta) = \xi\cos\theta + f(\theta)$, $f(\theta)$表示势场的环状分量. 本文提出如下所示的包含非中心电耦极矩的环状非谐振子势场

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 + \frac{q}{Mr^2} + \frac{1}{Mr^2}\bigg(\xi\cos\theta + \frac{\eta + \tau\sin^2\theta + \sigma\sin^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\bigg), \tag{5}$$

其中的M, ω分别为粒子的静质量和频率; ξ为电偶极矩; q表示势场的类偶极效应强度[25]; η, τ和σ是与势场环状分量性质相关的参数. 由于势场(5)中包含了非中心的电耦极矩分量, 因而不属于已有的可精确求解的函数范畴, 亦非一个能由传统方法(对角化方案)研究的问题. 以前我们虽在赝自旋对称性条件下, 求解过某些包含非中心电耦极矩的环状非谐振子势场满足的Dirac方程, 但是在其中或者$f(\theta)$为单环状分量[42], 或者$V_r(r)$为谐振子分量[43], 而本文讨论的则是一个包含非中心电耦极矩的双环状非谐振子势场. 本文简要介绍Alhaidari提出的三对角化矩阵方案及与之相联系的L^2空间. 在赝自旋对称性条件下把这一势场满足的Dirac方程分解为角向分量和径向分量, 利用三对角化矩阵方案分别获得角向波函数和径向波函数展开系数满足的三项递推关系, 并由径向波函数展开系数递推关系的对角化条件得到其束缚态的能谱结构, 显示出这一势模型具有严格的赝自旋对称性.

2 L^2空间及其基函数

最近, Alhaidari提出和建立了求解波动方程的三对角化矩阵方案, 其主要目的是为了寻求那些不能由传统方法(对角化方案)求解问题的波动方程解, 例如二维电四极矩势[44], 一维单波双曲函数势[45]等. 当然, 这一方案也必然能给出所研究问题的传统解[46]. 三对角化矩阵方案并不要求本征值波动算子有对角化表示, 只需波动算子的矩阵表示是三对角化的并具有对称性. 即是说, 波动算子作用于函数空间的基上具有普遍形式 $(H-E)\,|\phi_m\rangle \approx |\phi_m\rangle+|\phi_{m-1}\rangle+|\phi_{m+1}\rangle$, 并且满足

$$\begin{aligned}&\langle\phi_n\,|H-E|\,\phi_m\rangle\\&=(a_n-z)\delta_{n,m}+b_n\delta_{n,m-1}+b_{n-1}\delta_{n,m+1},\end{aligned}\tag{6}$$

其中的z和系数$\{a_n,b_n\}_{n=0}^{\infty}$是实数, 并且一般是能量, 角动量及势场参数的函数. 利用本征值方程$(H-E)\,|\psi\rangle=0$可以把波函数$|\psi\rangle$展开为$\sum_m f_m\,|\phi_m\rangle$, 并由基函数的左投影$\langle\phi_n|$得到波函数展开系数满足的三项递推关系

$$zf_n=a_nf_n+b_{n-1}f_{n-1}+b_nf_{n+1}.\tag{7}$$

于是, 求解波动方程便转化为寻求波函数ψ的展开系数满足的一个三项递推关系式. 在大多数情况下, 这一递推关系容易由我们熟知的正交多项式得到. 显然, 由方程(6)能够看出体系的分立谱容易由递推关系式的对角化条件得到. 这要求对于全部的指标数n, 有

$$b_n=0,\quad a_n-z=0.\tag{8}$$

在坐标为x的组态空间, 波函数$\psi_E(x)$可以展开为$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(E)\phi_n(x)$, 而与此相联系的$L^2$空间的基函数可以取为

$$\phi_n(x)=A_nw_n(x)P_n(x),\tag{9}$$

其中的A_n是归一化常数, $P_n(x)$是一个与坐标x相关的n阶多项式, $w_n(x)$为符合条件$w_n(x_\pm)=0$的权重函数. $x_-(x_+)$分别为组态空间的左、右边界. 在三对角化矩阵方案里, 两类组态空间是经常用到的. 一类空间的边界$x_\pm$是有限的, 并且有

$$\begin{aligned}&w_n(x)=(x-x_-)^{\alpha}(x-x_+)^{\beta},\\&P_n(x)={}_2F_1(-n,b,c;x).\end{aligned}\tag{10}$$

而另一类空间是半边有界的, 这里x_-有界, x_+无界并具有性质

$$\begin{aligned}&w_n(x)=(x-x_-)^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\beta(x-x_-)},\\&P_n(x)={}_1F_1(-n,c;x).\end{aligned}\tag{11}$$

其中的${}_2F_1(-n,b,c;x)$为超几何函数, 而${}_1F_1(-n,c;x)$为合流超几何函数. 对于束缚态, 参数α,β,b及c都是实的, α和β是正的. 它们通常都与相应问题的物理参数有关, 对于束缚态也与指标数n有关.

3 Dirac方程与赝自旋对称性

具有静质量M和总能量ε的自旋为1/2的粒子, 在引力标量势$S(\boldsymbol{r})$和斥力矢量势$V(\boldsymbol{r})$中运动时满足与时间无关的Dirac方程为($\hbar=c=\omega=1$)

$$H_{\mathrm{D}}\psi=\varepsilon\psi,\tag{12}$$

其中的Dirac哈密顿量为

$$H_{\mathrm{D}}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\beta}M+T,\tag{13}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}.\tag{14}$$

这里的$\boldsymbol{p}$为动量算子; $\boldsymbol{\sigma}$为三维矢量, 其分量是Pauli矩阵. 方程(13)中的矩阵势T一般可看作16个线性无关矩阵的线性组合, 这16个矩阵按其在Lorentz变换下的性质可以分为标量、赝标量、矢量、赝矢量和张量[47]. 在下面的研究中, 矩阵势T仅含有标量势和矢量势. 在Pauli-Dirac表象中, 使得

$$\boldsymbol{\psi}=\begin{pmatrix}\varphi\\\chi\end{pmatrix},\tag{15}$$

则由方程(12)可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi=[\varepsilon-M-\varSigma]\varphi,\\&\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\varphi=[\varepsilon+M-\varDelta]\chi.\end{aligned}\tag{16}$$

其中$\varSigma=V(\boldsymbol{r})+S(\boldsymbol{r})$, $\varDelta=V(\boldsymbol{r})-S(\boldsymbol{r})$. 在赝自旋对称性条件下($\varSigma=0$), 方程(16)变为

$$[\boldsymbol{p}^2-(\varepsilon^2-M^2)+\varDelta(\varepsilon-M)]\chi(\boldsymbol{r})=0.\tag{17}$$

若取$\varDelta$为(5)式所定义的包含非中心电耦极矩的环状非谐振子势场, 整理后可得Dirac旋量的下分量χ满足的方程为

$$\bigg\{\boldsymbol{p}^2-(\varepsilon^2-M^2)+(\varepsilon-M)\bigg[\frac{1}{2}Mr^2+\frac{q+\xi\cos\theta}{Mr^2}$$

$$+\frac{1}{Mr^2}\left(\frac{\eta+\tau\sin^2\theta+\sigma\sin^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)\Bigg]\Bigg\}\chi(\boldsymbol{r})=0. \tag{18}$$

在球坐标系下, Dirac 旋量的下分量 $\chi(\boldsymbol{r})$ 可以写为下面的形式

$$\chi(\boldsymbol{r})=\chi(r,\theta,\phi)=r^{-1}R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)\tilde{\chi}_s, \tag{19}$$

其中 $s=\pm1/2$, $\tilde{\chi}_s$ 表示自旋向上或自旋向下的旋量. 把方程 (19) 代入方程 (18) 并分离变量, 容易得到下面所给的一组二阶微分方程

$$\begin{aligned}&\Bigg[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{2}(\varepsilon-M)Mr^2\\&+\frac{q(\varepsilon-M)/M+2E_\theta}{r^2}\\&-(\varepsilon^2-M^2)\Bigg]R(r)=0,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\Bigg[-\frac{1}{2}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\varepsilon-M}{2M}\right)\\&\left(\xi x+\frac{\eta+\tau+\sigma}{x^2}+\frac{\eta}{1-x^2}-\sigma\right)\\&+\frac{E_\phi}{1-x^2}-E_\theta\Bigg]\Theta(x)=0,\end{aligned} \tag{21}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}+2E_\phi\right)\Phi(\phi)=0. \tag{22}$$

这里 $x=\cos\theta$, E_θ 和 E_ϕ 为无量纲的分离常数. Dirac 旋量的下分量波函数 χ 具有的平方可积性要求:

$$\begin{aligned}&\int|\chi|^2\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\\&=\int_0^\infty|R|^2\,\mathrm{d}r\int_{-1}^{1}|\Theta|^2\,\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}|\Phi|^2\,\mathrm{d}\phi.\end{aligned} \tag{23}$$

波函数 χ 的分量也要满足边界条件: $R(0)=R(\infty)=0$, $\Phi(\phi)=\Phi(\phi+2\pi)$, $\Theta(0)$ 与 $\Theta(\pi)$ 有限. 方程 (22) 满足边界条件的归一化解为

$$\Phi_\Lambda(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\pm\mathrm{i}\Lambda\phi),\quad \Lambda=0,1,2\cdots, \tag{24}$$

给出了 $E_\phi=\Lambda^2/2$, 量子数 Λ 是赝轨道角动量在对称轴上的投影 [48].

4 Dirac 方程的精确解

首先求解 $\chi(r,\theta,\phi)$ 的 θ 分量满足的方程 (21). 由三对角化矩阵方案, 我们可以在 L^2 空间的一个完全平方可积的函数基 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ 上, 把波函数的 θ 分量 $\Theta(\theta)$ 展开为 $\Theta(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^\Lambda(E_\theta)\varphi_n(x)$. 函数基 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ 必须满足组态空间坐标 $x\in[-1,+1]$ 的边界条件. 通常可取

$$\varphi_n(x)=A_n(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\mu,\nu)}(x). \tag{25}$$

$P_n^{(\mu,\nu)}(x)$ 是 n 阶 Jacobi 多项式, $n=0,1,2,\cdots$. 实的无量纲参数 $\alpha,\beta\geqslant0,\mu,\nu>-1$. 需要指出的是基函数 (25) 中的参数 β 与方程 (11) 中的 β 并不相同. A_n 是与 Jacobi 多项式 $P_n^{(\mu,\nu)}(x)$ 相关的归一化常数

$$\begin{aligned}&A_n=\\&\sqrt{\frac{(2n+\mu+\nu+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\mu+\nu+1)}{2^{\mu+\nu+1}\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(n+\nu+1)}}.\end{aligned} \tag{26}$$

定义 θ 分量方程 (21) 的哈密顿量为

$$\begin{aligned}H_\theta=&-\frac{1}{2}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\\&+\left(\frac{\varepsilon-M}{2M}\right)\left(\xi x+\frac{\eta+\tau+\sigma}{x^2}\right.\\&\left.+\frac{\eta}{1-x^2}-\sigma\right)+\frac{E_\phi}{1-x^2},\end{aligned} \tag{27}$$

利用 Jacobi 多项式满足的微分方程及微分公式 [39], 则把 θ 分量波动算子 $(H_\theta-E_\theta)$ 作用于基函数 (25) 可得

$$\begin{aligned}&(H_\theta-E_\theta)\,|\varphi_n\rangle\\&=\Bigg[\frac{n}{2}\left(x+\frac{\nu-\mu}{2n+\mu+\nu}\right)\left(\frac{\mu-2\alpha}{1-x}+\frac{2\beta-\nu}{1+x}\right)\\&-\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{\beta^2}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\\&+\left(\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{n}{2}(n+\mu+\nu+1)\\&+\left(\frac{\tilde{\xi}x}{2}+\frac{\tilde{\eta}+\tilde{\tau}+\tilde{\sigma}}{2x^2}+\frac{\tilde{\eta}+\Lambda^2}{2(1-x^2)}-\frac{\tilde{\sigma}}{2}\right)\\&-E_\theta\Bigg]|\varphi_n\rangle-\frac{(n+\mu)(n+\nu)}{2n+\mu+\nu}\\&\times\left(\frac{\mu-2\alpha}{1-x}+\frac{2\beta-\nu}{1+x}\right)\frac{A_n}{A_{n-1}}|\varphi_{n-1}\rangle,\end{aligned} \tag{28}$$

其中, $\tilde{\xi}=(\varepsilon-M)\xi/M$, $\tilde{\eta}=(\varepsilon-M)\eta/M$, $\tilde{\tau}=(\varepsilon-M)\tau/M$, $\tilde{\sigma}=(\varepsilon-M)\sigma/M$. 由 Jacobi 多项式满足的递推关系和正交性质可知 [39], 只需选取参数 $\alpha^2=\beta^2$, $\alpha=\mu/2$, $\beta=\nu/2$, $\tilde{\eta}+\tilde{\tau}+\tilde{\sigma}=0$, 便可以实现 θ 分量波动算子的三对角化矩阵表示 $\langle\chi_n|H_\theta-E_\theta|\chi_{n'}\rangle$. 由于 $\mu^2+\nu^2=2(\Lambda^2+\tilde{\eta})$, 因而 $\mu^2=\nu^2=(\Lambda^2+\tilde{\eta})>0$, 要求量子数 Λ 满足

$\Lambda^2 > -\tilde{\eta}$, 另外 $\tilde{\sigma}$ 不必取零值. 为此我们从左边投影基函数 $\langle\varphi_n|$ 于方程 (28), 可得

$$\begin{aligned}
&2\langle\varphi_n|H_\theta - E_\theta|\,\varphi_{n'}\rangle\\
&=\left[\left(n+\mu_\Lambda+\frac{1}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2\right]\delta_{n,n'}\\
&\quad+\frac{\tilde{\xi}}{2}\sqrt{\frac{n(n+2\mu_\Lambda)}{(n+\mu_\Lambda)^2-1/4}}\delta_{n,n'-1}\\
&\quad+\frac{\tilde{\xi}}{2}\sqrt{\frac{(n+1)(n+2\mu_\Lambda+1)}{(n+\mu_\Lambda+1)^2-1/4}}\delta_{n,n'+1}. \qquad (29)
\end{aligned}$$

其中的 $\mu_\Lambda=\sqrt{\Lambda^2+\tilde{\eta}}$, 并且以表示式 $2E_\theta=\ell(\ell+1)=(\ell+1/2)^2-1/4$ 引进了无量纲参数 ℓ. 由方程 (20) 可以看出, ℓ 担当了球对称问题中角动量量子数的角色, 但在此 ℓ 虽然与能量有关却并不要求必须是整数. 当 E_θ 取正值时, 无量纲参数 ℓ 必须满足条件 $\ell>0$ 或者 $\ell<-1$[40]. 角向波动算子的三对角化矩阵表示 (29) 使得 θ 角向方程 (21) 等同于下面所给的角向波函数展开系数满足的三项递推关系式

$$\begin{aligned}
&\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2 f_n^\Lambda\\
&=\left[\left(n+\mu_\Lambda+\frac{1}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}\right]f_n^\Lambda\\
&\quad+\frac{\tilde{\xi}}{2}\sqrt{\frac{n(n+2\mu_\Lambda)}{(n+\mu_\Lambda)^2-1/4}}f_{n-1}^\Lambda\\
&\quad+\frac{\tilde{\xi}}{2}\sqrt{\frac{(n+1)(n+2\mu_\Lambda+1)}{(n+\mu_\Lambda+1)^2-1/4}}f_{n+1}^\Lambda. \qquad (30)
\end{aligned}$$

重新定义一个新的多项式

$$\begin{aligned}
&f_n^\Lambda(E_\theta)\\
&=\sqrt{\frac{(n+\mu_\Lambda+1/2)\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\mu_\Lambda+1)}{2^{2\mu_\Lambda}\Gamma^2(n+\mu_\Lambda+1)}}\\
&\quad\times p_n^\Lambda(\ell,\tilde{\eta}), \qquad (31)
\end{aligned}$$

θ 角向波函数展开系数满足的递推关系式 (30) 可由此表示为

$$\begin{aligned}
&\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2 p_n^\Lambda\\
&=\left[\left(n+\mu_\Lambda+\frac{1}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}\right]p_n^\Lambda\\
&\quad+\frac{\tilde{\xi}}{2}\frac{(n+\mu_\Lambda)}{(n+\mu_\Lambda+1/2)}p_{n-1}^\Lambda\\
&\quad+\frac{\tilde{\xi}}{2}\frac{(n+1)(n+2\mu_\Lambda+1)}{(n+\mu_\Lambda+1)(n+\mu_\Lambda+1/2)}p_{n+1}^\Lambda. \qquad (32)
\end{aligned}$$

定义 $p_0^\Lambda(\ell,\tilde{\eta})=1$, 便能实现角向波函数的任意归一化[40]. 于是, θ 角向波函数 $\Theta(\theta)$ 在 L^2 空间可以表示为

$$\Theta(\theta)=\Sigma_n P_n^\Lambda(\ell,\tilde{\eta})\varphi_n(\theta). \qquad (33)$$

下面求解径向方程 (20). 我们引入 L^2 空间的另一个完全平方可积函数基 $\{\zeta_k(y)\}_{k=0}^\infty$, 并在其上把径向波函数 $R(r)$, 展开为 $R(r)=\sum_{k=0}^\infty g_k(E)\zeta_k(y)$. 基函数 $\zeta_k(y)$ 必须满足具有坐标 $y\in[0,\infty]$ 的组态空间的边界条件, 基函数可以选取为

$$\zeta_k(y)=B_k y^\upsilon\,\mathrm{e}^{-\rho y}L_k^\delta(y), \qquad (34)$$

其中 $y=(\lambda r)^2$ 称作谐振子基; $k=0,1,2,\cdots$; $L_k^\delta(y)$ 是 k 阶 Laguerre 多项式; υ, ρ 都是正的实参数; $\delta>-1$;

$$B_k=\sqrt{2|\lambda|\,\Gamma(k+1)/\Gamma(k+\delta+1)}$$

是与 Laguerre 多项式的正交归一性质相联系的归一化常数. 利用 Laguerre 多项式满足的微分方程和微分公式[39], 我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\zeta_k(y)\\
&=4\lambda^2 y\left[\frac{k}{y}\left(\frac{2\upsilon-\delta-1/2}{y}-2\rho\right)+\frac{\upsilon(\upsilon-1/2)}{y^2}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\rho(2\upsilon+1/2)}{y}+\rho^2\right]\zeta_k(y)-4\lambda^2(k+\delta)\\
&\quad\times\left(\frac{2\upsilon-\delta-1/2}{y}+1-2\rho\right)\frac{B_k}{B_{k-1}}\zeta_{k-1}, \qquad (35)
\end{aligned}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}=2|\lambda|\sqrt{y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}.$$

由于径向方程的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
H_r=&-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{(\varepsilon-M)Mr^2}{2}\\
&+\frac{q(\varepsilon-M)/M+2E_\theta}{r^2},
\end{aligned}$$

选取常数 $\rho=1/2$, 则径向波动算子 $[H_r-(\varepsilon^2-M^2)]$ 作用于 (34) 式所给出的基函数, 可得

$$\begin{aligned}
&[H_r-(\varepsilon^2-M^2)]\,|\zeta_k\rangle\\
&=4\lambda^2\left\{-\frac{1}{y}\left[k(2\upsilon-\delta-1/2)+(\upsilon-1/4)^2\right.\right.\\
&\quad\left.-(L+1/2)^2/4\right]+k+\upsilon+\frac{1}{4}\\
&\quad\left.-\frac{y}{4}+\frac{\Xi y}{4\lambda^4}-\frac{(\varepsilon^2-M^2)}{4\lambda^2}\right\}|\zeta_k\rangle\\
&\quad+4\lambda^2\frac{(k+\delta)(2\upsilon-\delta-1/2)}{y^2}\frac{B_k}{B_{k-1}}\,|\zeta_{k-1}\rangle, \qquad (36)
\end{aligned}$$

其中,

$$\Xi = (\varepsilon - M)M/2,$$

$$L(L+1) = q(\varepsilon - M)/M + \ell(\ell+1).$$

利用Laguerre多项式之间的递推关系式及正交归一性质[39], 可知只要参数之间的关系满足, $\delta = 2\upsilon - 1/2$, $(\upsilon - 1/4)^2 - (L+1/2)^2/4 = 0$, 即

$$2\upsilon = \begin{cases} L+1, & L>0 \\ -L, & L<0 \end{cases},$$

便能得到如下所示的径向波动算子三对角化表示 $\langle \zeta_k \left| H_r - (\varepsilon^2 - M^2) \right| \zeta_{k'} \rangle$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda^2} \langle \zeta_k \left| H_r - (\varepsilon^2 - M^2) \right| \zeta_{k'} \rangle \\ &= \left[(2k+\delta+1)\left(\frac{\Xi}{\lambda^4}+1\right) - \frac{(\varepsilon^2 - M^2)}{\lambda^2} \right] \delta_{k',k} \\ &\quad - \left(\frac{\Xi}{\lambda^4} - 1\right) [\sqrt{k(k+\delta)}\delta_{k',k+1} \\ &\quad + \sqrt{(k+1)(k+\delta+1)}\delta_{k',k-1}]. \end{aligned} \tag{37}$$

由此得到下面所给的径向波函数展开系数满足的三项递推关系式

$$\begin{aligned} &\left[(2k+\delta+1)\frac{\Omega_+}{\Omega_-} - \frac{(\varepsilon^2 - M^2)/\lambda^2}{\Omega_-} \right] g_k \\ &- \sqrt{k(k+\delta)} g_{k-1} \\ &- \sqrt{(k+1)(k+\delta+1)} g_{k+1} = 0, \end{aligned} \tag{38}$$

其中 $\Omega_\pm = \Xi/\lambda^4 \pm 1$. 递推关系(38)式能够以多项式

$$g_k(\varepsilon) = \sqrt{\Gamma(k+1)/\Gamma(k+\delta+1)} p_k(\varepsilon, L) \tag{39}$$

表示为我们更为熟悉的形式

$$\begin{aligned} &\left[(2k+\delta+1)\frac{\Omega_+}{\Omega_-} - \frac{(\varepsilon^2 - M^2)/\lambda^2}{\Omega_-} \right] p_k \\ &- (k+\delta)p_{k-1} - (k+1)p_{k+1} = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

为了得到束缚态的分立能谱, 对(37)式施于对角化条件. 由(8)式可以看出, $b_n = 0$ 要求 $\Xi = (\varepsilon - M)M/2 = \lambda^4$, 而 $a_n - z = 0$ 给出

$$(2k+\delta+1)\left(\frac{\Xi}{\lambda^4}+1\right) - \frac{(\varepsilon^2 - M^2)}{\lambda^2} = 0. \tag{41}$$

最后我们得到下面的分立能谱表示式

$$\begin{aligned} &(\varepsilon + M)\sqrt{\varepsilon - M} \\ &= \sqrt{2M}\left(2k + \frac{1}{2} + \begin{cases} L+1, & L>0 \\ -L, & L<0 \end{cases} \right). \end{aligned} \tag{42}$$

其中 k 为径向量子数, 并且

$$L = -1/2 + \sqrt{(\varepsilon - M)q/M + (\ell + 1/2)^2}. \tag{43}$$

由方程(30)可以看出, 参数 ℓ 显然与电偶极矩 ξ 和环状势的参数 σ 有关. 但由于 $\mu_\Lambda = \sqrt{\Lambda^2 + \tilde{\eta}}$, 环状势的参数间存在关系 $\tilde{\eta} + \tilde{\tau} + \tilde{\sigma} = 0$, 因而 ℓ 也与参数 η 及 τ 有关, 所以能量谱方程(42)是参数 ω, ξ, q, η, τ 和 σ 的隐含数(虽然我们已定义了 ω 为1). 相应地, 束缚态波函数的径向分量可以表示为

$$R(r) = \Sigma_k p_k(\varepsilon, L)\zeta_k(y). \tag{44}$$

最后, 我们得到以下式表示的旋量波函数

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{r}) &= \begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{r}) \\ \chi(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{\varepsilon - M} \tilde{\chi}_s \\ \tilde{\chi}_s \end{pmatrix} r^{-1} R_k(r) \Theta_n(\theta) \exp(\mathrm{i}\Lambda\phi). \end{aligned} \tag{45}$$

5 讨论与结论

本文提出的势模型(5)是由在非谐振子模型上附加非中心的电耦极矩和一项环状势构成. 由于非中心电耦极矩被认为是不属于已有的可严格求解函数的范畴, 因而我们利用Alhaidari提出的三对角化矩阵方案, 在赝自旋对称性条件下求解了其满足的Dirac方程. 显然, 三对角化矩阵方案通过把求解波动方程转换为寻求波函数展开系数满足的一个三项递推关系式, 从而得到波动方程的解析解. 角向波函数和径向波函数分别以Jacobi多项式和Laguerre多项式表示. 由径向波函数展开系数满足的递推关系式的对角化条件得到了束缚态的能量谱. 显示了这一势模型存在严格的赝自旋对称性.

能量谱方程(42)显示, 束缚态能量本征值 $\varepsilon = \varepsilon(k, L)$ 惟一地取决于量子数 k 和 L. 如果定义 $\tilde{L} = L + 1$ 为赝轨道角动量, 于是具有量子数 $(k, \tilde{L})$ 的能级和 $(k-1, \tilde{L}+2)$ 的能级之间的差别消失, 显示了能级 $(k, \tilde{L})$ 和 $(k-1, \tilde{L}+2)$ 完全简并. 由于能谱方程(42)的右方值总是正的, 因而必有 $\varepsilon - M > 0$. 否则, 能谱方程(42)的左边会有虚根, 而 $\varepsilon - M < 0$ 则是没有物理意义的[49]. 我们能够利用Descartes多项式的符号法则及与文献[49]中的相同方法证明能谱方程(42)存在惟一的

实数解, 并且本文讨论的势场中粒子惟一地具有 $E_b = \varepsilon - M > 0$ 的分立束缚态能量.

由 (4) 式可以看出, 当势模型 (5) 不存在 $V_\theta(\theta)$ 项时, 含有非中心电耦极矩分量的环状非谐振子势退化为非球谐振子势 (1). 在此情况下, (43) 式中的轨道角动量 L 仅与参数 q 和 ℓ 有关, 但能谱方程 (46) 的形式不变, 与文献 [22, 29] 所得到的结论相一致. 若 $V_\theta(\theta)$ 项不含有非中心电耦极矩分量, 并且使得环状势项 $f(\theta)$ 中的参数 η 和 τ 满足条件 $\eta+\tau = 0$, 并且取参数 $2q = A$, $2\tau = -B$, $\sigma = 0$, 则势模型 (5) 退化为文献 [50] 中已详细研究过的一类典型的环状非球谐振子势, 能谱方程 (46) 也与其所得结果相同. 另外我们指出, 这一势场也具有严格的自旋对称性. 在此条件下 $\Delta = V(\boldsymbol{r}) - S(\boldsymbol{r}) = 0$, 也能利用与以上相同的方法得到 Dirac 旋量的上分量, 其能谱方程为

$$(\varepsilon - M)\sqrt{\varepsilon + M} = \sqrt{2M}\left(2k + \frac{1}{2} + \begin{cases} L+1, & L > 0 \\ -L, & L < 0 \end{cases}\right). \tag{46}$$

参考文献

[1] Arima A, Harvey M, Shimizu K 1969 *Phys. Lett. B* **30** 517
[2] Hecht K T, Adler A 1969 *Nucl. Phys. A* **137** 129
[3] Ginocchio J N 1999 *Phys. Rep.* **315** 231
[4] Ginocchio J N 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 436
[5] Ginocchio J N, Leviatan A 1998 *Phys. Lett. B* **425** 1
[6] Meng J 1998 *Nucl.Phys. A* **635** 3
[7] Meng J, Sugawara-Tanabe K, Yamaji S, Ring P, Arima A 1998 *Phys. Rev. C* **58** R628
[8] Meng J, Sugawara-Tanabe K, Yamaji S, Arima A 1999 *Phys. Rev. C* **59** 154
[9] Zhou S G, Meng J, Ring P 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 262501
[10] Liang H Z, Shen S H, Zhao P W, Meng J 2013 *Phys. Rev. C* **87** 014334
[11] Shen S H, Liang H Z, Zhao P W, Zhang S Q, Meng J 2013 *Phys. Rev. C* **88** 024311
[12] Dudek J, Nazarewicz W, Szymanski Z, Leander G A 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 1405
[13] Nazarewicz W, Twin P J, Fallon P, Garrett J D 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1654
[14] Zeng J Y, Meng J, Wu C S, Zhao E G, Xing Z, Chen X Q 1991 *Phys. Rev. C* **44** R1745
[15] Xu Q, Zhu S J, Hamilton J H, Ramayya A V, Hwang J K, Qi B, Meng J, Peng J, Luo Y X, Rasmussen J O, Lee I Y, Liu S H, Li K, Wang J G, Jing H B, Gu L, Yeoh E Y, Ma W C 2008 *Phys. Rev. C* **78** 064301
[16] Hua W, Zhou X H, Zhang Y H, Zheng Y, Liu M L, Ma F, Guo S, Ma L, Wang S T, Zhang N T, Fang Y D, Lei X G, Guo Y X, Oshima M, Toh Y, Koizumi M, Hatsukawa Y, Qi B, Zhang S Q, Meng J, Sugawara M 2009 *Phys. Rev. C* **80** 034303
[17] Liang H Z, Zhou S G, Meng J 2015 *Phys. Rep.* **570** 1
[18] Schiff L I 1955 *Quantum Mechanics* (3rd Ed.) (New York: McGraw-Hill)
[19] Mayer M G 1950 *Phys. Rev.* **78** 16
[20] Nilsson S G 1955 *Dan. Mat. Fys. Medd.* **29** 16
[21] Chen T S, Lü H F, Meng J, Zhang S Q, Zhou S G 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 358
[22] Ginocchio J N 2004 *Phys. Rev. C* **69** 034318
[23] Quesne C 1988 *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** 3093
[24] Zhang M C 2009 *Int. J. Theor. Phys.* **48** 2625
[25] Dong S H, Sun G H, Lozada-Cassou M 2005 *Phys. Lett. A* **340** 94
[26] Calogero F 1969 *J. Math. Phys.* **10** 2191
[27] Luban M, Luscome J H, Reed M A, Pursey D L 1989 *Appl. Phys. Lett.* **54** 1997
[28] Sutherland B 2008 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3678
[29] Goudarzi H, Sohbati M, Zarrin S 2011 *J. Math. Phys.* **52** 013506
[30] Hautot A 1973 *J. Math. Phys.* **14** 1320
[31] Berkdemir C 2009 *J. Math. Chem.* **46** 139
[32] Zhang M C, Sun G H, Dong S H 2010 *Phys. Lett. A* **374** 704
[33] Eshghi M, Mehraban H, Arbabi M S 2014 *Phys. Scr.* **89** 095202
[34] Sun D S, You Y, Lu F L, Chen C Y, Dong S H 2014 *Phys. Scr.* **89** 045002
[35] Fermi E, Teller E 1947 *Phys. Rev.* **72** 399
[36] Wightman A S 1950 *Phys. Rev.* **77** 521
[37] Fox K, Turner J E 1966 *J. Chem. Phys.* **45** 1142
[38] Brown W B, Robers R E 1967 *J. Chem. Phys.* **46** 2006
[39] Alhaidari A D 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 3409
[40] Alhaidari A D 2008 *Ann. Phys.* **323** 1709
[41] Alhaidari A D, Bahlouli H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 110401
[42] Zhang M C, Huang-Fu G Q 2012 *Ann. Phys.* **327** 841
[43] Zhang M C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 240301 (in Chinese) [张民仓 2012 物理学报 **61** 240301]
[44] Alhaidari A D 2007 *J .Phys. A: Math. Theor.* **40** 14843
[45] Bahlouli H, Alhaidari A D 2010 *Phys. Scr.* **81** 025008
[46] Alhaidari A D 2005 *Ann. Phys.* **317** 152
[47] Zeng J Y 2000 *Quantum Mechanics* (Vol. 2) (Beijing: Science Press) (in Chinese) [曾谨言 2000 量子力学 (卷 II) (北京: 科学出版社)]
[48] Ginocchio J N, Leviatan A, Meng J, Zhou S G 2004 *Phys. Rev. C* **69** 034303
[49] Lisboa R, Malheiro M, de Castro A S, Alberto P, Fiolhais M 2004 *Phys. Rev. C* **69** 024319
[50] Guo J Y, Han J C, Wang R D 2006 *Phys. Lett. A* **353** 378

Tridiagonal representation with pseudospin symmetry for a noncentral electric dipole and a ring-shaped anharmonic oscillator potential*

Gao Jie Zhang Min-Cang†

(College of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

(Received 31 July 2015; revised manuscript received 28 September 2015)

Abstract

The concepts of pseudospin symmetry in atomic nuclei and spin symmetry in anti-nucleon are reviewed. The exploration for understanding the origin of pseudospin symmetry and its breaking mechanism, and the empirical data supporting the pseudospin symmetry are introduced. A noncentral anharmonic oscillatory potential model is proposed, in which a noncentral electric dipole and a double ring-shaped component are included. The pseudospin symmetry for this potential model is investigated by working on a complete square integrable basis that supports a tridiagonal matrix representation of the Dirac wave operator. Then, solving the Dirac equation is translated into finding solutions of the recursion relation for the expansion coefficients of the wavefunction. The angular/radial wavefunction is written in terms of the Jacobi/Laguerre polynomials. The discrete spectrum of the bound states is obtained by diagonalization of the radial recursion relation, and the property of energy equation is discussed for showing the exact pseudospin symmetry. Several particular cases obtained by setting the parameters of the potential model to appropriate values are analyzed, and the energy equations are reduced to that of the anharmonic oscillator and that of the ring-shaped non-spherical harmonic oscillator, respectively. Finally, it is pointed out that the exact spin symmetry exists also in this potential model.

Keywords: noncentral electric dipole, pseudospin symmetry, Dirac equation, tridiagonal representation

PACS: 03.65.Ge, 03.65.Pm, 03.65.Fd, 02.30.Gp **DOI:** 10.7498/aps.65.020301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 14101020155) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. GK201402012).

† Corresponding author. E-mail: mincangzhang@snnu.edu.cn