

超强磁场下电子朗道能级稳定性及对电子费米能的影响

宋冬灵 明亮 单昊 廖天河

Landau-level stability of electrons in superstrong magnetic fields and its influences on electron Fermi energy

Song Dong-Ling Ming Liang Shan Hao Liao Tian-He

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 65, 027102 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.027102

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.027102>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I2>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

考虑非牛顿引力下的快速转动混合星性质

[Properties of rapidly rotating hybrid stars with non-Newtonian gravity](#)

物理学报.2012, 61(20): 209701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.209701>

相对论简并电子气体的磁化

[Magnetization of degenerate and relativistic electron gas](#)

物理学报.2012, 61(17): 179701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.179701>

点缺陷扶手型石墨烯量子点的电子性质研究

[Electronic properties on the point vacancy of armchair edged graphene quantum dots](#)

物理学报.2012, 61(11): 117105 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.117105>

中子星中简并电子气体的临界磁化

[Critical magnetization of degenerate electronic system in neutron star](#)

物理学报.2011, 60(4): 049702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.049702>

# 超强磁场下电子朗道能级稳定性及 对电子费米能的影响\*

宋冬灵<sup>1)†</sup> 明亮<sup>2)</sup> 单昊<sup>2)</sup> 廖天河<sup>1)</sup>

1)(信息工程大学理学院, 郑州 450001)

2)(中国科学院新疆天文台, 乌鲁木齐 830011)

(2015年9月13日收到; 2015年10月30日收到修改稿)

磁星是一类由磁场供能、强磁化的中子星, 其内部磁场远高于电子的量子临界磁场. 本文通过引入电子朗道能级的稳定性系数  $g_n$ , 讨论了在磁星环境下电子的朗道能级的稳定性及其对电子费米能  $E_F(e)$  的影响; 研究发现, 磁场越强, 电子的朗道能级越不稳定, 最大的朗道能级级数  $n_{\max}$  越小; 朗道能级数  $n$  越大, 能级稳定性系数  $g_n$  越小. 根据朗道能级的稳定性系数  $g_n$  随磁场的增加而减小的要求, 电子费米能表达式的磁场指数  $\beta$  必须是正数. 通过引入 Dirac- $\delta$  函数, 推导出超强磁场下的简并的、相对论电子费米能的一般表达式, 修正了  $E_F(e)$  的特解. 新的特解给出磁场指数  $\beta = 1/6$ ; 特解的适用范围  $\rho \geq 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $B_{\text{cr}} \ll B \leq 10^{17} \text{ G}$ . 本文结果将有助于中子星内部弱相互作用过程 (包括修正的 URCA 反应和电子俘获) 和磁星磁热演化机理的研究.

**关键词:** 朗道能级, 超强磁场, 费米能, 中子星

**PACS:** 71.70.Di, 97.10.Ld, 71.18.+y, 97.60.Jd

**DOI:** 10.7498/aps.65.027102

## 1 引言

普通射电脉冲星通常被认为是高度磁化的中子星, 表面偶极磁场约为  $10^{10}$ — $10^{12} \text{ G}$ , 表面光子辐射主要来源于星体的旋转动能损失. 与普通射电脉冲星不同的是, 磁星是一类由磁场供能的脉冲星, 表面磁场通常高于普通射电脉冲星 2—3 个数量级. 在磁星内部可能存在更高的超强磁场 ( $B \gg B_{\text{cr}}$ ,  $B_{\text{cr}} = m_e^2 c^3 / e\hbar = 4.414 \times 10^{13} \text{ G}$  称为量子临界磁场)<sup>[1]</sup>, 最大磁场强度达到  $10^{16} \text{ G}$  以上. 磁星分为两类: 软  $\gamma$  射线重复暴 (SGR) 和反常 X 射线脉冲星 (AXP)<sup>[2]</sup>. SGR 所呈现的耀发 (flare) 现象归因于磁重联和外壳破裂, AXP 所具有的高值宁静状态下的软 X 射线光度 (高于旋转动能损率) 来源于内部超强磁场的衰变<sup>[3,4]</sup>.

近年来, 对磁星表面热光子和中微子辐射的研

究是脉冲星领域研究热点之一. 有研究者利用壳模型研究超强磁场对磁星外壳层中弱相互作用过程的影响<sup>[5]</sup>, 发现超强磁场极大地影响了磁星表面的热核反应率, 相对于弱磁场极限, 超强磁场使热核反应率增加达多个数量级, 从而加速了磁星的表面冷却. 有研究者对超强磁场下磁星表面的核子能量生成率进行了研究<sup>[6,7]</sup>, 发现超强磁场能够增强核子能量生成率许多数量级. 研究者通过引入朗道能级-超流影响因子研究磁星表面软 X 射线光度与磁场的演化关系<sup>[8]</sup>, 发现二者之间存在一定的正相关性, 提出了一种可能的磁星表面软 X 射线辐射机理.

在中子星中, 相对论电子的电子费米能是中子星物态方程中一个极其重要的、必不可少的物理参量, 它直接影响了包括 MURCA 过程、Beta 衰变、电子俘获、中微子和反中微子的吸收等在内的弱相

\* 国家自然科学基金面上项目 (批准号: 11173042)、新疆维吾尔自治区自然科学基金面上项目 (批准号: 2013211A053) 和河南省基础与前沿技术研究计划 (批准号: B20142475) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dongling120011@sina.com

相互作用过程<sup>[8-10]</sup>; 这种影响又会改变原有的物态方程, 直接影响到中子星的内部结构及其热演化, 甚至会影响到中子星的整体性质. 因此, 对中子星环境下电子费米能的研究具有重要意义.

在中子星内部, 由于电子费米能随着深度的增加而增大<sup>[11]</sup>, 因此有必要对中子星内部结构进行简单的回顾. 我们按中子星径向密度的变化, 将中子星分为大气层和四个内层, 分别为: 外壳层, 内壳层, 外核和内核<sup>[12,13]</sup>. 中子星的大气层是一层薄薄的等离子区, 中子星的电磁辐射就是在该层形成的.

中子星的外壳层由重离子 ( $A > 56$ ) 晶格和电子组成, 分布范围从星体表面到中子滴出密度  $\rho_d \approx 4 \times 10^{11} \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  处, 厚度大约为几百米<sup>[14]</sup>. 该层的表面数米之内是非简并的电子气体, 在该层的较深处, 随着密度的增加, 电子的费米能增大, 最终形成了高度简并的相对论电子气体. 越往该层深处, 随着电子被质子俘获, 裸原子核变得越来越丰中子, 到该层底部时, 也就是中子滴出密度处, 电子费米能  $E_F(e) \sim 25 \text{ MeV}$ , 中子开始从原子核中溢出形成自由中子气体. 近年来关于磁星(中子星)外壳层的研究较多. 有研究者通过对磁星外壳层核素的电子俘获的研究<sup>[15]</sup>, 发现超强磁场对铁族核素的电子俘获率影响较大, 相比弱磁场极限, 超强磁场使电子俘获率增加达到2—3个数量级, 超强磁场对电子屏蔽也影响极大, 可使电子屏蔽势增加约23.6%等.

内壳层主要由简并的、相对论电子和非相对论核子及过饱和中子组成, 分布范围从中子滴出密度到壳-核边界处 ( $\rho \sim 0.5\rho_0$ ,  $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14} \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  是饱和核密度), 在此密度处, 原子核完全消失, 电子费米能  $E_F(e) \sim 35 \text{ MeV}$ . 在该层中自由中子所占的比例随着密度的增加而增加, 核力使中子形成  ${}^2\text{P}_3$  Cooper 对, 从而在该层可能存在中子-超流 Cooper 对<sup>[16-18]</sup>.

外核层是由处于  $\beta$ -平衡中子、质子和电子组成的混合体, 厚度为数千米, 密度范围<sup>[13]</sup>:  $0.5\rho_0 < \rho < 2\rho_0$ , 电子费米能  $E_F(e) = 60(\rho/\rho_0)^{2/3} \text{ MeV}$ . 对于更高密度区, 电子费米能  $E_F(e) > m_\mu c^2 = 105.7 \text{ MeV}$ , 少量的  $\mu$  介子开始出现. 中子占了绝大部分, 各部分所占粒子数密度的比例可以由  $\beta$ -平衡条件得出. 原子核已经完全融合在一起发生相变成为核物质, 可能存在中子和质子的超流态<sup>[18]</sup>.

内核层的半径大约有几千米, 随着内核层密度进一步增加, 当  $\rho > \rho_{\text{tr}}$  时 ( $\rho_{\text{tr}}$  是出现奇异粒子的临界密度) 核子将转变成奇异粒子, 如重核子、 $\pi$  凝聚态、K 凝聚态和夸克等, 出现奇异粒子的临界密度目前还不清楚, 如文献<sup>[19]</sup>认为  $\rho_{\text{tr}} \sim 4\rho_0$ . 中子星的内部结构目前还没有定论, 虽然已经有很多模型. 传统的中子星模型中, 星体大部分由中子构成. 上一段描述的其实是所谓的混合星模型, 其中在中子星的核心区域可能会出现解禁的奇异物质相<sup>[20-22]</sup>. 还有一种看法是整个中子星实际上都是由奇异物质组成的, 即奇异星<sup>[23-27]</sup>. 这方面的综述可见文献<sup>[28]</sup>. 究竟哪一种看法是正确的, 还需要等待观测的检验. 不过, 无论对于哪一种模型, 其中的电子(对于中子星至少是内核区域的电子)都可看作是简并的、相对论的电子气体.

最近, 不少研究者<sup>[29-34]</sup>在相对论平均场(RMF)框架下研究了中子星的结构及高密度核子的物态方程. 如采用新的核子耦合常数研究重子八重态系统<sup>[29]</sup>, 与已往的模型相比, 新的核子耦合常数使得物态方程变软等. 尽管各物理模型存在一定的差异性(例如星核内是否存在超子等), 但这些作者普遍地认同: 与密度相关的对称能极大地影响中子星的物态方程(EOS), 尤其影响电子丰度和电子费米能的值, 因此在计算EOS时, 从不同参数组中选择和讨论合适的对称能尤为重要. 为了数值模拟中子星内部电子丰度和电子费米能与密度的关系, Li等<sup>[35]</sup>利用平均场 Lagrangian-密度 TMA 参数组<sup>[36]</sup>计算了中子星内部电子费米能最大值为367 MeV, 对应最大中子星质量  $m \sim 1.99M_\odot$  ( $M_\odot$  表示太阳质量), 这与观测的中子星质量<sup>[37]</sup>( $1.97M_\odot$ , PSR J1614-2230) 符合得很好.

在地球实验室的实验中, 已得知强磁场可以对电子自旋轨道产生劈裂, 导致朗道能级分离明显<sup>[38]</sup>, 然而对超强磁场如何影响电子朗道能级的研究涉及甚少. 现有的文献<sup>[39-43]</sup>大多数是对超强磁场如何影响中子星物质组分、物态方程及其他一些方面理论研究, 研究的结果人们无法用实验进行考究. 本文关注的是超强磁场对简并的、相对论电子费米能的影响. 对于一个完全简并的相对论电子气体, 费米能为:  $E_F^2(e) = p_F^2(e)c^2 + m_e^2c^4$ , 式中  $p_F(e)$  为电子的费米动量. 最近, Gao等<sup>[44-46]</sup>根据朗道能级量子化, 并

且引入 Dirac- $\delta$  函数:  $\delta\left[\frac{p_{\perp}}{m_e c} - (2n + 1 + \sigma)B^*\right]^{1/2}$  ( $p_{\perp}$  是垂直于磁场方向上的电子动量, 简称: 垂直动量), 对超强磁场下的简并的、相对论电子费米能进行了初步的研究, 并得到了  $E_F(e)$  的一个特解<sup>[44-46]</sup>:

$$E_F(e) = 43.44 \times \left[\frac{Y_e}{0.0535} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{B}{B_{cr}}\right]^{1/4} \text{ MeV}, \quad (1)$$

$(B^* \gg 1),$

式中  $Y_e$  是电子丰度 ( $Y_e = n_e/n_B$ ,  $n_e$  是电子数密度,  $n_B$  是重子数密度). 在此工作基础上, 推导出超强磁场下的简并的、相对论的电子压强的普遍表达式; 讨论了电子的朗道能级化; 探索了量子电动力学效应对物态方程的影响. 主要结论包括: 磁场越强, 电子压强越大; 高值压强由高值的电子费米能引起的; 在超强磁场下, 磁星内部总压强是各向异性的; 与一个普通射电脉冲星相比, 如果考虑到各向异性的总压强, 磁星可能是一种更致密的中子星; 如果考虑到磁场能对物态方程的正能量贡献, 磁星的质量可能更大一些<sup>[46]</sup>. 超强磁场不仅可能存在于中子星中, 也可能存在于白矮星中. 最近, 有研究者发现<sup>[42]</sup>, 随着磁场的增加, 白矮星的物态方程变硬, 星体最大质量也增加, 但同时, 广义相对论效应愈加显著, 然而该研究没有分析强磁场对电子的朗道能级及电子费米能的影响.

Gao 等的研究结果挑战了流行的观点<sup>[47,48]</sup>: 在超强磁场下, 磁场强度  $B$  越强, 电子费米能及电子压强越低. 由于引入一个人为的错误的假设, 然后运用了非相对论电子回旋运动方程的解, 该流行观点实质上违背了朗道能级量子化的真正要求(具体内容参考文献<sup>[45]</sup>).

最近, 我们通过认真的研究, 发现 Gao 等的理论模型还存在一些不足之处, 主要有以下几个方面: 1) 没有考虑超强磁场下电子朗道能级的稳定性. 由于这个问题太过复杂, 迄今为止, 物理学界仍然没有出现与此相关的论著及明确的解析表达式; 2) 没有明确地给出相对论电子的费米能  $E_F(e)$  与电子数密度  $n_e$  (单位体积内的电子数) 的解析表达式, 并在此基础上比较在超强磁场和弱磁场极限两种情况下  $E_F(e)$  与  $n_e$  的关系, 从而界定出  $E_F(e)$  表达式的磁场指数  $\beta$  的变化范围; 3) 没有明确地给出  $E_F(e)$  的磁场强度  $B$  的适用范围, 因为在一个非相对论的弱磁场中, 电子的费米面 (在动量空间) 基本上是对称的, 而在相对论的强磁场中, 费米球变

成朗道柱面. 随着磁场强度的增强, 朗道柱面愈加变长、变窄, 当超强磁场范围过高时, 电子的朗道柱面就会简化为一维线性链, Gao 等的模型将不再适用. 简单地说, 在我们以往推导电子费米能和电子压强的过程中, 有很多细节未曾考虑 (特别是忽略了不同朗道能级之间的差异性), 因此, 有必要对超强磁场下的  $E_F(e)$  表达式进行修正.

## 2 弱磁场极限下的电子费米能

本部分主要参考文献<sup>[35]</sup>. 根据当前比较公认和可靠的状态方程, 在相对论的电子密度区域, 通过数值模拟, 我们得到一些关于物质密度  $\rho$  和电子丰度  $Y_e$  的解析表达式. 结合这些解析表达式和边界条件, 我们可以估算在任意密度下的  $E_F(e)$ , 并且给出相对论电子费米能之特解<sup>[31]</sup>:

$$E_F(e) \approx 60 \times \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/3} \times \left(\frac{Y_e}{0.005647}\right)^{1/3} \text{ MeV}, \quad (2)$$

该式适用于弱磁场极限下的相对论电子物质区域<sup>[31]</sup>. 方程 (2) 还表明: 在弱磁场极限下,  $E_F(e)$  随  $Y_e$  和  $\rho$  的增加而增大.

尽管  $E_F(e)$  可以表示为  $Y_e$  和  $\rho$  的函数, 但电子费米能惟一决定于电子数密度  $n_e$ . 由于电子是极端相对论的, 定义无量纲动量  $\chi_e = p_F(e)/m_e c \gg 1$ , 于是得到在弱磁场极限下  $E_F(e)$  和  $n_e$  的关系:

$$\begin{aligned} E_F(e) &= m_e c^2 (1 + \chi_e^2)^{1/2} \simeq m_e c^2 \chi_e \\ &= m_e c^2 (3\pi^2 \lambda_e^3 n_e)^{1/3} \\ &\simeq 6.11 \times 10^{-11} n_e^{1/3} \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $\lambda_e = \hbar/(m_e c) = 3.86 \times 10^{-11} \text{ cm}$  是电子康普顿波长. 根据 (3) 式, 我们给出了整个中子星内部弱磁场极限下相对论电子费米能和电子数密度的关系图像, 如图 1 所示.

从图 1 中可以看出, 电子数密度  $n_e$  的值越高, 电子费米能  $E_F(e)$  越大. 图 1 中点-划线表示星体的质量随着密度的增加而增大,  $dM/d\rho > 0$  即具有这样质量的中子星是稳定的; 实线表示星体的质量随密度的增加而减少,  $dM/d\rho < 0$  即具有这样质量的中子星是不稳定的, 最大的星体质量的条件是,  $dM/d\rho = 0$ , 而拐点发生区域随内核物质模型的不同而变化, 例如, 在张量相互作用模型, 由于  $\pi$  介子交换张量, 核子相互吸引, 星体中心密度



$10^{14}—10^{15} \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ , 星体总质量较小, 在三核子相互作用模型, 星体中心密度  $10^{15}—10^{16} \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ , 星体总质量较大. 电子的其他费米参量都惟一地由自由电子气的数密度  $n_e$  决定,  $n_e$  越大, 各参量值也越大, 例如, 费米动量  $p_F(e) = \hbar k_F = \hbar c(3\pi^2 n_e)^{1/3}$ , 其中  $k_F = c(3\pi^2 n_e)^{1/3}$  为电子的费米波矢. 相对论电子费米动能  $E_K^F \approx cp_F(e) = c^2(3\pi^2 n_e)^{1/3}$ , 由于  $E_K^F \gg m_e c^2$ , 然而, 在中子星内部不同物质区域,  $n_e$  与物质密度的关系很难确定, 这种不确定关系一方面依赖于不同的物质模型, 另一方面依赖于在一定的物质模型下物态方程 (EOS) 所得到的电子丰度与物质密度的对应关系解析表达式.

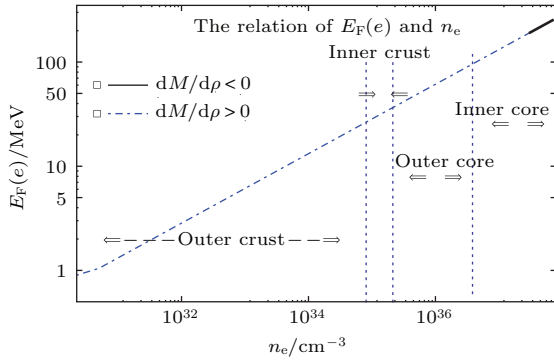


图1 中子星内部弱磁场极限下相对论电子的  $E_F(e)$  和  $n_e$  的变化关系

Fig. 1. The relation of  $E_F(e)$  and  $n_e$  for relativistic electrons in the weak-magnetic field limit inside a neutron star.

### 3 超强磁场下的电子费米能

#### 3.1 电子朗道能级稳定性

将电子磁矩假定在一个沿着  $z$  轴方向的匀强磁场  $B$  上. 磁场矢势  $\mathbf{A}$  采取朗道规范<sup>[49]</sup>:  $\mathbf{A} = (B_y, 0, 0)$ . 对于一个超强磁场 (即超相对论的磁场), 通过解相对论狄拉克方程<sup>[50]</sup> 可以获得电子在超强磁场中的能级,

$$E_e^2 = m_e^2 c^4 \left( 1 + v \frac{2B}{B_{cr}} \right) + p_z^2 c^2, \quad (4)$$

式中量子数  $v = n + 1/2 + \sigma'$ , 其中朗道能级数  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 自旋  $\sigma' = \pm 1/2$ ,  $p_z$  是电子动量在  $z$  轴上的分量, 视为连续变量. 在超强磁场中, 最大的电子朗道能级数  $n_{\max}$  为<sup>[47]</sup>

$$n_{\max}(\sigma = -1) = \text{Int} \left[ \frac{1}{2B^*} \left[ \left( \frac{E_F(e)}{m_e c^2} \right)^2 - 1 - \left( \frac{p_z}{m_e c} \right)^2 \right] \right], \quad (5)$$

$$n_{\max}(\sigma = 1) = \text{Int} \left[ \frac{1}{2B^*} \left[ \left( \frac{E_F(e)}{m_e c^2} \right)^2 - 1 - \left( \frac{p_z}{m_e c} \right)^2 \right] - 1 \right], \quad (6)$$

式中  $\text{Int}[x]$  表示取整数. 从 (5), (6) 两式明显地看出: 磁场越强, 最大的朗道能级数  $n_{\max}$  越小, 这是因为磁场越强, 电子的朗道能级越不稳定, 而且朗道能级数  $n$  越大, 能级稳定性越低. 我们引入在超强磁场下电子的朗道能级稳定性系数  $g_n$ . 在以往的工作中, 我们没有考虑超强磁场下电子的朗道能级数的稳定性, 这也使得我们的模型过于简单并存在一定的缺陷; 然而, 强磁场下带电粒子的朗道能级数的稳定性问题本身过于复杂, 迄今为止, 物理学界仍然没有出现与此相关的论著及明确的解析表达式. 考虑到微观状态的不确定性, 我们假定电子的朗道能级稳定性系数  $g_n$  具有幂率指数形式:

$$g_n = g_0 n^\alpha \quad (n \geq 1), \quad (7)$$

式中  $g_0$  和  $\alpha$  分别表示电子的基态能级稳定性系数和朗道能级稳定性指数. 很显然,  $g_n$  是  $n$  和  $\alpha$  的函数. 当  $n = 1$  时,  $g_1 = g_0$ , 即基态和第一激发态能级具有相同的稳定性. 由量子力学可知, 由于占据能级数  $n$  较大的电子具有较高的能量, 电子易发生激发跃迁, 从而占据  $n$  较小的能级, 并且  $n$  越大, 电子在该能态占据的时间越短, 朗道能级稳定性越低, 激发跃迁概率越大. 由于基态能级稳定性最高, 并且  $g_n$  随  $n$  的增加而减小, 即:  $g_n < g_{n-1} < g_{n-2}$ , 所以稳定性指数  $\alpha$  应该为负数. 这是因为: 如果  $\alpha = 0$ , 则有  $g_n = g_{n-1} = \dots = g_0$ , 则所有朗道能级具有相同的稳定性, 最大的电子朗道能级数可以取任意高的值, 这种情况实质上对应于弱磁场极限, 与本文的主题相悖. 如果  $\alpha > 0$ , 则有  $g_n > g_{n-1} > \dots > g_1 = g_0$ , 在这种情况下朗道能级数越高, 能级越稳定, 最大的电子朗道能级数也可以取任意高的值, 这显然违背量子力学原理. 综上所述, 在超强磁场下电子的朗道稳定性指数  $\alpha < 0$ . 根据方程 (7), 我们给出  $g_n$  随  $\alpha$  的变化关系图像. 由图 2 可知, 对于  $n \geq 1$  的朗道能级,  $g_n$  随  $\alpha$  增加而缓慢地增加, 并且朗道能级数  $n$  越大,  $g_n$  随  $\alpha$  的变化越快. 正如前面所假设的, 朗道能级数  $n$  越大, 稳定指数  $\alpha$  对  $g_n$  的影响就越大, 占据高能级的电子越容易发生激发跃迁.

需要说明的是: 在原子物理学中, 能级数越高, 能级的统计权重越大, 但是统计权重反映的能态密

度的高低, 即统计权重系数越大, (带电粒子的) 能态密度越高, 这与本文讨论能级稳定性系数是两个完全不同的概念.

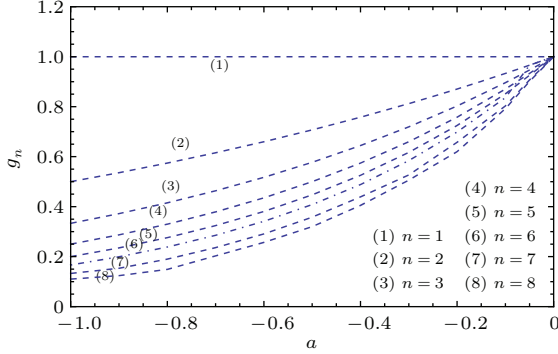


图2  $g_n$  与  $\alpha$  的变化关系

Fig. 2. The relation of  $g_n$  and  $\alpha$ .

### 3.2 超强磁场下电子相空间的能态密度

在超强磁场下, 电子的费米面(动量空间)变成了狭长的朗道柱面. 根据  $B_{cr} = m_e^2 c^3 / e\hbar$  和  $\mu_e = e\hbar / 2m_e c$ , 方程(4)改写为

$$E_e^2 = m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2 + (2n + 1 + \sigma)m_e c^2 \mu_e B, \quad (8)$$

式中  $\sigma = 2\sigma' = \pm 1$  是自旋投影值,  $\mu_e \sim 0.927 \times 10^{-20} \text{ erg}\cdot\text{G}^{-1}$  是电子磁矩. 由于在超强磁场下, 非相对论磁场下所引入的连续的物理变量  $p_x$  和  $p_y$  [25] 不再适用, 它们必须用一个量子化的(分立的)相对论变量来代替, 即垂直于磁场方向的电子动量  $p_{\perp} = m_e c \sqrt{(2n + 1 + \sigma)B^*}$ . 利用关系式  $2\mu_e B_{cr} / m_e c^2 = 1$  及对六维电子相空间进行求和, 可得到  $N_{\text{pha}}$  的表达式如下:

$$N_{\text{pha}} = \frac{2\pi}{h^3} \int dp_z \sum_{n=0}^{n_{\max}(p_z, \sigma, B^*)} g_n \times \int \delta\left(\frac{p_{\perp}}{m_e c} - [(2n + 1 + \sigma)B^*]^{1/2}\right) \times p_{\perp} dp_{\perp}, \quad (9)$$

式中  $\delta\left(\frac{p_{\perp}}{m_e c} - [(2n + 1 + \sigma)B^*]^{1/2}\right)$  是超强磁场下 Dirac- $\delta$  函数 [44,45]. Dirac-函数的物理意义: 由于朗道能级强量子化, 在第  $n$  个和第  $n+1$  个朗道环面之间是不存在任何微观量子态的. 对于基态能级, 电子的自旋与  $B$  反向,  $\sigma = -1$ ; 对于较高能级  $n \geq 1, \sigma = \pm 1$ , 因此方程(9)可以写为

$$N_{\text{pha}}$$

$$= \frac{2\pi}{h^3} \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 \int_0^{\frac{p_F}{m_e c}} d\left(\frac{p_z}{m_e c}\right) \left[ \sum_{n=0}^{n_m(p_z, B^*, \sigma=-1)} g_n \times \int \delta\left(\frac{p_{\perp}}{m_e c} - (2nB^*)^{1/2}\right) d\left(\frac{p_{\perp}}{m_e c}\right) + \sum_{n=1}^{n_m(p_z, B^*, \sigma=1)} g_n \int \delta\left(\frac{p_{\perp}}{m_e c} - (2(n+1)B^*)^{1/2}\right) \times d\left(\frac{p_{\perp}}{m_e c}\right) \right], \quad (10)$$

$p_F(z)$  是  $z$  轴方向最大动量, 满足  $(p_F(z)c)^2 + m_e^2 c^4 + (2n + 1 + \sigma)m_e^2 c^4 B^* \equiv E_F^2(e)$ . 方程(10)中的求和上限是  $n_{\max}$ , 由文献 [21] 得

$$n_{\max}(\sigma = 1) \simeq n_{\max}(\sigma = -1) = n_{\max}(p_z, B^*) = \text{Int} \left[ \frac{1}{2B^*} \left[ \left(\frac{E_F(e)}{m_e c^2}\right)^2 - 1 - \left(\frac{p_z}{m_e c}\right)^2 \right] \right]. \quad (11)$$

于是, 方程(10)可以写为

$$N_{\text{pha}} = 2\pi \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 \int_0^{\frac{p_F}{m_e c}} \sqrt{2B^*} \left[ \sum_{n=0}^{n_m(p_z, B^*, \sigma=-1)} g_n \sqrt{n} + \sum_{n=1}^{n_m(p_z, B^*, \sigma=1)} g_n \sqrt{n+1} \right] d\left(\frac{p_z}{m_e c}\right). \quad (12)$$

将方程(11)代入方程(12)得

$$N_{\text{pha}} \simeq 2\pi \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 g_0 \int_0^{\frac{p_F}{m_e c}} \sqrt{2B^*} \times \left[ \sum_{n=0}^{n_m(p_z, B^*)} n^{\alpha} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) \right] \times d\left(\frac{p_z}{m_e c}\right). \quad (13)$$

方程(13)又可以化简为

$$N_{\text{pha}} \simeq 2^{5/2} \pi \sqrt{B^*} \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 g_0 \times \int_0^{\frac{p_F}{m_e c}} \sum_{n=0}^{n_m} n^{\alpha+1/2} d\left(\frac{p_z}{m_e c}\right). \quad (14)$$

引入比率  $q, q = I_1 / I_2$ , 其中  $I_1 = \int_0^{n_m} n^{\alpha+1/2} dn$  及  $I_2 = \sum_{n=0}^{n_m} n^{\alpha+1/2}$ , 则在给定  $\alpha$ , 并且  $n_{\max} \geq 6$  情况的下, 比率  $q \simeq 1$ , (14) 式中的求和可近似地用积分代替,

$$\sum_{n=0}^{n_m} n^{\alpha+1/2} \simeq \int_0^{n_m} n^{\alpha+1/2} dn = \frac{2}{2\alpha+3} n_m^{\alpha+3/2}. \quad (15)$$

再将方程(15)代入方程(14)中得

$$N_{\text{pha}} \simeq \frac{2^{7/2}}{2\alpha+3} \pi \sqrt{B^*} \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 g_0 \int_0^{\frac{p_F}{m_e c}} \left(\frac{1}{2B^*}\right)^{\alpha+3/2} \times \left[ \left(\frac{E_F(e)}{m_e c^2}\right)^2 - 1 - \left(\frac{p_z}{m_e c}\right)^2 \right]^{\alpha+7/2} \times d\left(\frac{p_z}{m_e c}\right). \quad (16)$$

### 3.3 超强磁场下的电子费米能

为了推导出超强磁场下的电子费米能  $E_F(e)$  的表达式, 将无量纲的电子费米动量(参见3.1节)代入方程(16), 得到

$$N_{\text{pha}} \simeq \frac{2^{(2-\alpha)}}{2\alpha+3} \pi (B^*)^{-1-\alpha} \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 \times g_0 \int_0^{\frac{p_F}{m_e c}} \left[ \left(\frac{E_F(e)}{m_e c^2}\right)^2 - 1 - \left(\frac{p_z}{m_e c}\right)^2 \right]^{\alpha+3/2} d\chi \simeq \frac{2^{(2-\alpha)}}{2\alpha+3} \pi (B^*)^{-1-\alpha} \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 \times g_0 \int_0^{\frac{p_F}{m_e c}} \left[ \left(\frac{E_F(e)}{m_e c^2}\right)^2 - \left(\frac{p_z}{m_e c}\right)^2 \right]^{\alpha+3/2} d\chi. \quad (17)$$

令  $t = \frac{p_z}{m_e c} / \frac{E_F(e)}{m_e c^2} = p_z c / E_F(e)$ , 则  $d\chi = \frac{E_F(e)}{m_e c^2} dt$ , 方程(17)可表示为

$$N_{\text{pha}} = \frac{2^{(2-\alpha)}}{2\alpha+3} \frac{\pi}{(B^*)^{1+\alpha}} g_0 \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 \times \left(\frac{E_F(e)}{m_e c^2}\right)^{(2\alpha+4)} \times \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+3/2} dt. \quad (18)$$

为方便起见, 令  $I(\alpha) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+3/2} dt$ . 电子数密度  $n_e$  由下式决定:

$$n_e = N_A \rho Y_e, \quad (19)$$

式中  $N_A = 6.02 \times 10^{23}$  是阿伏伽德罗常数<sup>[17]</sup>. 根据泡利不相容原理, 单位体积内的电子能态数  $N_{\text{pha}}$  等于单位体积内的电子数  $n_e$ ,

$$N_{\text{pha}} = \frac{2^{(2-\alpha)}}{2\alpha+3} \frac{\pi}{(B^*)^{1+\alpha}} g_0 \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3$$

$$\times \left(\frac{E_F(e)}{m_e c^2}\right)^{(2\alpha+4)} I(\alpha) = N_A \rho Y_e = n_e. \quad (20)$$

求解方程(20)可给出

$$E_F(e) = \left(\frac{2\alpha+3}{2^{(2-\alpha)} \pi g_0 I(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2(\alpha+2)}} \left(\frac{h}{m_e c}\right)^{\frac{3}{2(\alpha+2)}} \times m_e c^2 (B^*)^{\frac{1+\alpha}{2(\alpha+2)}} n_e^{\frac{1}{2(\alpha+2)}}, \quad (21)$$

方程(21)是超强磁场下电子费米能普遍表达式, 其中  $\frac{1+\alpha}{2(\alpha+2)}$  是  $E_F(e)$  表达式的磁场指数, 用  $\beta$  表示, 即  $\beta = \frac{1+\alpha}{2(\alpha+2)}$ . 为了讨论  $\alpha$  的合理取值范围, 我们给出了  $\beta$  与  $\alpha$  的变化关系图. 图3中点-冲线表示奇点  $\alpha = -2$ ; 冲撞线表示  $\beta = 0$ , 对应于  $\alpha = -1$ ,  $\alpha$  在该点取值的物理意义是:  $E_F(e)$  不随  $B$  的变化而变化, 即电子气体处在弱磁场极限的环境之中, 因此  $\alpha$  的合理的取值范围:  $\alpha < 0$ , 并且  $\alpha \neq -1$ ,  $\alpha \neq -2$ . 从图3也可以简单地判断  $E_F(e)$  随  $B$  的变化关系: 当  $\alpha < -2$  或者  $-1 < \alpha < 0$  时, 磁场指数  $\beta > 0$ ,  $E_F(e)$  随  $B$  增强而增大; 当  $-2 < \alpha < -1$  时, 磁场指数  $\beta < 0$ ,  $E_F(e)$  随  $B$  增强而减小. 磁场指数  $\beta$  究竟是正数还是负数由  $\alpha$  的实际取值所决定.

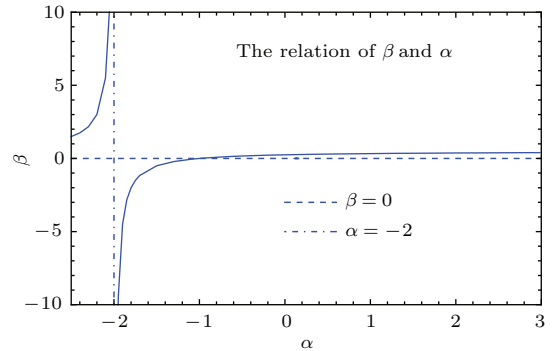


图3  $\beta$  与  $\alpha$  的变化关系

Fig. 3. The relation of  $\beta$  and  $\alpha$ .

由弱磁场极限下  $E_F(e)$  和  $n_e$  的关系可知:  $E_F(e)$  仅与  $n_e$  有关, 并且  $E_F(e) \propto n_e^{1/3}$ , (参考本文第2节方程(3)), 而由超强磁场下的电子费米能表达式方程(21)可知:  $E_F(e) \propto (B^*)^{\frac{\alpha+1}{2(\alpha+2)}} n_e^{\frac{1}{2(\alpha+2)}}$ , 即在超强磁场下  $E_F(e)$  不仅与  $n_e$  有关, 还与无量纲磁场  $B^*$  有关, 后者通过修正电子的相空间, 极大地影响着前者的大小. 但同时值得注意的是: 无论是在弱磁场极限, 还是在超强磁场下,  $E_F(e)$  的量纲不会改变, 即  $E_F(e)$  正比于  $n_e^{1/3}$ , 因此, 我们得到

$$\frac{1}{2(\alpha+2)} = \frac{1}{3}. \quad (22)$$

解方程 (22) 可得  $\alpha = -0.5$ . 将  $\alpha = -0.5$  代入磁场指数  $\beta$  的表达式中, 得到  $\beta = 1/6$ . 对比方程 (1), 本文得到的磁场指数  $\beta$  减小了  $1/12$ . 尽管两者之间差别极小, 但修正后的磁场指数明显地优于修正前 [43–45] 的磁场指数, 因为在以往电子费米能表达式中, 磁场指数  $\beta = 1/4$  对应于  $\alpha = 0$ , 这等同于不同的朗道能级具有相同的稳定性, 忽略了朗道能级之间的差异性.

为了得到超强磁场下电子费米能的普遍表达式和特解, 同时也为了计算方便, 假定朗道能级稳定性系数的最大值为 1, 即  $g_0 = 1$  (基态能级稳定性最高). 由方程 (7) 可知, 电子的朗道能级稳定性系数可以表示为  $g_n = 1$  ( $n = 0, 1$ ),  $g_n = n^{-1/2}$  ( $n \geq 2$ ). 将  $\alpha = -0.5$  代入  $I(\alpha)$  得:  $I(\alpha) = I(-0.5) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{3}$ , 则方程 (21) 改写为

$$\begin{aligned} E_F(e) &= 6.86 \times 10^{-11} n_e'^{1/3} \\ &= 6.86 \times 10^{-11} (B^*)^{1/6} n_e'^{1/3} \\ &= 6.86 \times 10^{-11} \left(\frac{B}{B_{cr}}\right)^{1/6} n_e'^{1/3} \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中  $n_e' = n_e(B^*)^{1+\alpha} = n_e(B^*)^{1/2}$  是受到超强磁场影响后的电子数密度. 方程 (23) 就是所求的超强磁场下  $E_F(e)$  的一般表达式, 很显然  $E_F(e)$  随  $B$  的增加而增大, 并且与  $B^{1/6}$  成正比. 当磁场强度过大 (如  $B > 10^{17}$  G) 时, 最大的朗道能级数为  $n_{max} = 1$  或者为 2, 朗道柱面沿着磁场方向不断伸长, 变成狭长的电子链, 在这样的情形下, 本文理论推导的前题条件将不再成立, 方程 (23) 式的适用条件是:  $\rho \geq 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  及  $B_{cr} \ll B \leq 10^{17}$  G.

在中子星内部, 电子可以看成是零温近似下的理想气体, 其化学势一般由物质密度  $\rho$ 、电子丰度  $Y_e$  以及磁场强度  $B$  决定. 将  $n_e = N_A \rho Y_e$  代入到方程 (23), 得到超强磁场下  $E_F(e)$  的特解:

$$\begin{aligned} E_F(e) &= 67.6 \times \left(\frac{Y_e}{0.005647}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/3} \\ &\quad \times (B^*)^{1/6} \text{ MeV} \\ &= 67.6 \times \left(\frac{Y_e}{0.005647}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/3} \\ &\quad \times \left(\frac{B}{B_{cr}}\right)^{1/6} \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (24)$$

这里我们运用了关系式  $Y_e = Y_p \simeq \frac{n_e}{n_p} = 0.005647 \times \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$  (文献 [35] 中的方程 (12)). 方程 (24) 与方程 (23) 具有相同适用条件:  $\rho \geq 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  及  $B_{cr} \ll B \leq 10^{17}$  G. 值得强调的是, 方程 (24) 是极其简化、粗糙模型下得到的近似表达式, 在推导过程中, 我们忽略了一些潜在的、不确定的影响因素, 如温度、电子的朗道顺磁等, 如果考虑这些影响因素, 所得到的超强磁场下  $E_F(e)$  的表达式及特解与本文所得大相径庭, 进一步对方程 (24) 的修正是我们未来的研究方向之一. 在图 4 给出了不同磁场下电子费米能  $E_F(e)$  随物质密度  $\rho$  的变化关系曲线. 图中密度取值范围为:  $(1.4 \times 10^{14} - 5.6 \times 10^{14}) \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ , 实线表示不同的强磁场, 点-冲线表示弱磁场极限  $B^* \ll 1$ ; 拟合曲线 (1–3) 均由方程 (24) 式得到, 当磁场强度分别为  $B^* = 100$ ,  $B^* = 50$ , 及  $B^* = 10$ , 对应电子费米能分别为:  $E_F(e) \sim (115.59 - 183.50) \text{ MeV}$ ,  $(102.98 - 163.48) \text{ MeV}$  及  $(78.75 - 125.0) \text{ MeV}$ , 拟合曲线 (4) 由方程 (1) 得到, 对应  $E_F(e) \sim (47.62 - 75.60) \text{ MeV}$ . 从图 4 中可以看出, 在中子星内部, 当磁场强度  $B$  一定时, 电子费米能  $E_F(e)$  随着物质密度  $\rho$  的增加而增大; 而当  $\rho$  一定时,  $E_F(e)$  随着  $B$  的增加而增大.

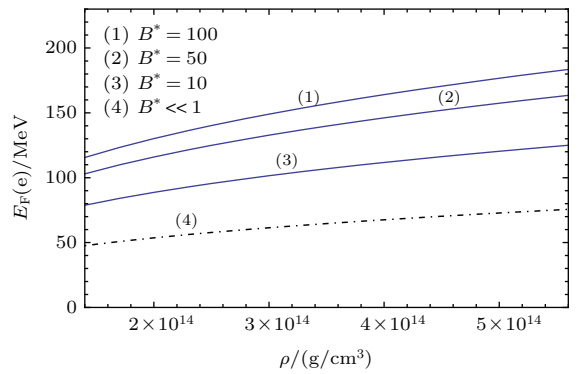


图 4 不同强磁场下  $E_F(e)$  与  $\rho$  的变化关系  
Fig. 4. The relation of  $E_F(e)$  and  $\rho$  in different strong magnetic fields.

为了与以往电子费米能特解进行比较, 在图 5 中, 我们给出了在一定的物质密度下电子费米能  $E_F(e)$  随磁场强度  $B$  的变化曲线. 为方便计算, 我们任取密度  $\rho = \rho_0$ . 图中实线由方程 (24) 得到: 当  $B \sim (1.0 \times 10^{14} - 3.0 \times 10^{15})$  G 时, 电子费米能  $E_F(e) \sim (69.02 - 136.56) \text{ MeV}$ ; 图中点-冲线由方程 (1) 式得到, 当  $B \sim (1.0 \times 10^{14} - 3.0 \times 10^{15})$  G 时,  $E_F(e) \sim (46.12 - 128.36) \text{ MeV}$ . 从图 5 中明显地



看出, 在相同的磁场强度下, 方程 (24) 求得的  $E_F(e)$  的数值要比方程 (1) 所求得的数值稍高. 其主要原因在于: 在方程 (24) 式中, 费米能系数 (66.7 MeV) 及密度指数 (1/3) 都高于方程 (1) 中相应的量, 尽管方程 (24) 中的磁场指数要低于方程 (1) 中的磁场指数.

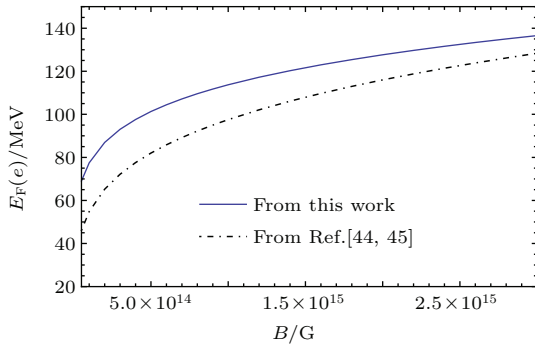


图5  $E_F(e)$  与  $B$  的变化关系

Fig. 5. The diagram of  $E_F(e)$  and  $B$ .

#### 4 讨论与结论

本文通过引入了电子朗道能级的稳定性系数  $g_n$ , 重新推导出了超强磁场下的电子费米能的一般表达式、得到了一个新的电子费米能特解. 新的特解给出磁场指数:  $\beta = 1/6$ , 特解表达式的适用范围:  $\rho \geq 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  及  $B_{\text{cr}} \ll B \leq 10^{17} \text{ G}$ . 由于不同的电子朗道能级, 其稳定性存在一定差异性, 朗道能级数越高, 能级稳定性越小, 因此, 我们有理由相信, 新的电子费米能特解会优于以往电子费米能特解 [43,44].

本文给出超强磁场下电子费米能  $E_F(e)$  与电子数密度  $n_e$  的表达式. 和弱磁场极限情形一样, 电子费米能  $E_F(e)$  的值最终是由电子数密度唯一地决定, 超强磁场修正了电子的相空间, 增加了电子的数密度, 可能的原因有: 1) 在中子星内部, 按照电中性要求, 简单的中子衰变和连续的电子俘获同时发生, 然而, 超强磁场会使前者的速率大于后者 [49], 由于更多的中子转化为质子, 质子的丰度增加, 根据电中性要求, 电子丰度相应地增加, 因此  $n_e$  也增加; 2) 由核物理知识可知, 质子的丰度  $Y_p$  反映了核物质的非对称性, 质子丰度的值与核物质的对称能、对称能坡度、不可压缩系数、体积束缚能等参量密切相关 [50,51]; 而核物质的结构、特性及物态方程会受到磁场的强烈的影响, 超强磁场可能会增加核物质的非对称性, 提高质子的丰度, 因此, 核物

质的平均电子的数密度也相应地增加. 尽管在物理学界相关的、详细的研究结果仍然没有出现, 但对于超强磁场如何影响核物质的非对称性(特别是对  $Y_p$  的影响)将成为我们未来研究的方向之一.

由于电子费米能是中子星物态方程的一个重要参数, 超强磁场对电子费米能的影响, 必然会必然影响中子星内部的物态方程; 另外, 本文所得的新的电子费米能特解必然会对磁星内部中子衰变率、电子俘获率、软 X 射线光度的计算结果产生一定的影响 [4,8-10].

正如大家所熟知的, 在中子星热演化过程的初始阶段, 中微子冷却占主导 ( $t \leq 10^5 - 10^6 \text{ yrs}$ ) 地位; 当热光子光度高于中微子光度时, 光子冷却占主导地位. 中子星冷却方式又可分为: 直接的 URCA 和修正的 URCA 反应两种 [12]. 理论研究表明, 除非在超大质量中子星内部, 直接的 URCA 反应由于对质子丰度要求较高而被抑制 [32,33]. 修正的 URCA 反应常被称为标准冷却过程, 所产生的中微子带走的能量损失对中子星热演化起着重要作用. 中子-超流 [50-54] 对星体内部的动力学行为(如周期跃变、转动演化)产生一定的影响, 特别是对磁星的磁场产生和演化产生重大影响 [17]. 观测发现: 绝大多数高磁场脉冲星的表面热温度高于特征年龄相同的普通射电脉冲星的表面热温度 [55]. 同时还发现: 磁星在宁静状态下的表面热温度也明显地高于特征年龄相同的普通射电脉冲星的表面热温度. 这些观测上的发现不仅给中子星标准冷却理论带来了挑战, 而且还强烈地预示着磁星的磁场演化和热演化是密切联系的, 磁星的表面热温度与磁场之间可能存在着正相关的联系. 本文研究结果有助于磁星的磁、热演化的理论研究.

期望在不久的将来, 本文的研究结果有助于改进中子星标准的冷却模型, 并将改进后的冷却模型与磁星的能谱观测进行对比, 从而进一步检验及发展本文的研究结果.

感谢中国科学院新疆天文台高志福副研究员和新疆大学物理与科学技术学院来小禹教授提供参考资料及在写作过程中给予无私的帮助.

#### 参考文献

[1] Thompson C, Duncan R C 1996 *Astrophys. J.* **473** 322

- [2] Colpi M, Geppert U, Page D 2000 *Astrophys. J. Lett.* **529** 29
- [3] Lewin W H G, Klis M V D 2006 *Compact Stellar X-ray Source* (New York: Cambridge University) p547
- [4] Gao Z F, Peng Q H, Wang N 2013 *Proceedings of the International Astronomical Union* Beijing, August 22–30, **2012** 386
- [5] Liu H L, Luo Z Q, Lai X J, Liu J J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2317
- [6] Luo Z Q, Liu H L, Liu J J, Lai X J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0377
- [7] Luo X, Du J, Li P P 2013 *Chin. Phys. B* **22** 012970
- [8] Gao Z F, Peng Q H, Wang N, Chou C K 2012 *Chin. Phys. B* **21** 057109
- [9] Zhang J, Liu M Q, Wei B T, Luo Z Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5448 (in Chinese) [张洁, 刘门全, 魏丙涛, 罗志全 2008 物理学报 **57** 5448]
- [10] Zhang J, Wang S F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1404 (in Chinese) [张洁, 王少峰 2010 物理学报 **59** 1404]
- [11] Prakash M, Bombaci I, Ellis P J, Lattimer J M, Knorren R 1997 *Phys. Rep.* **280** 1
- [12] Yakovlev D G, Levenfish K P, Shibyanov, Yu A 1999 *Phys. Usp.* **42** 737
- [13] Shapiro S L, Teukolsky S A 1983 *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* (New York: Wiley-Interscience) p121
- [14] Bombaci I 2001 *EOS for Dense Isospin Asymmetric Nuclear Matter For Astrophysical Applications* in the book *Isospin Physics in Heavy-Ion Collisions at Intermediate Energies* (New York: Schröder, Nova Science Publishers, Inc) p10
- [15] Liu J J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 099601
- [16] Baym G, Pethick C, Sutherland P 1971 *Astrophys. J.* **170** 299
- [17] Peng Q H, Tong H 2007 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **378** 159
- [18] Yakovlev D G, Kaminker A D, Gnedin O Y, Haensel P 2001 *Phys. Rep.* **354** 1
- [19] Tsuruta S, Sadino J, Kobelski A, Teter M A, Liebmann A C, Takatsuka T, Nomoto K, Umeda H 2009 *Astrophys. J.* **691** 621
- [20] Yu J W, Xu R X 2011 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **414** 489
- [21] Sedrakian D M, Hayrapetyan M V, Baghdasaryan D S 2015 *Astrophysics* **58** 216
- [22] Cao L G, Lombardo U, Shen C W, Giai N V 2006 *Phys. Rev. C* **73** 014313
- [23] Chen H, Wei J B, Baldo M, Burgio G F, Schulze H J 2015 *Phys. Rev. D* **91** 105002
- [24] Zacchi A, Stiele R, Schaffner-Bielich J 2015 *Phys. Rev. D* **92** 045022
- [25] Wang Y N, Shen H 2010 *Phys. Rev. C* **81** 025801
- [26] Xu R L, Wu C, Ren Z Z 2014 *Int. J. Mod. Phys. D* **23** 1450078
- [27] Wang H Y, Liu G Z, Wu Y R, Xu Y 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 061201
- [28] Lattimer J M, Prakash M 2007 *Phys. Rep.* **442** 109
- [29] Yang F, Shen H 2008 *Phys. Rev. C* **77** 025801
- [30] Zhao X F, Jia H Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 089701
- [31] Aguirre R, Bauer E, Vidana I 2014 *Phys. Rev. C* **89** 035809
- [32] Rabhi A, Pérez-García M A, Providência C, Vidana I 2014 *Phys. Rev. C* **89** 035809
- [33] Chatterjee D, Elghozi T, Novak J, Oertel M 2015 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **447** 3785
- [34] Isayev A A 2015 *Phys. Rev. C* **91** 015208
- [35] Li X H, Gao Z F, Li X D, Xu Y, Wang P, Wang N, Peng Q H 2016 *Int. J. Mod. Phys. D* **25** 1650002
- [36] Geng L, Toki H, Meng J 2005 *Prog. Theor. Phys.* **113** 785
- [37] Demorest P B, Pennucci T, Ransom S M, Roberts, Hessels J W 2010 *Nature* **467** 1081
- [38] Wu X G, Pang M D, Saxena G 2015 *Chin. Phys. B* **24** 097301
- [39] Wang Z J, Lü G L, Zhu C H, Huo W S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 1790701 (in Chinese) [王兆军, 吕国梁, 朱春花, 霍文生 2012 物理学报 **61** 1790701]
- [40] Gao Z F, Wang N, Xu Y, Shan H, Li X D 2015 *Astron. Nachr.* **336** 866
- [41] Gao Z F, Li X D, Wang N, Yuan J P, Wang P, Peng Q H, Du Y J 2016 *MNRAS* **456** 55
- [42] Wen D H, Liu H L, Zhang X D 2014 *Chin. Phys. B* **23** 089501
- [43] Franzon B, Dexheimer V, Schramm S 2015 arXiv:1508.04431
- [44] Gao Z F, Wang N, Song D L, Yuan J P, Chou C K 2011 *Astrophys. Space Sci.* **334** 281
- [45] Gao Z F, Peng Q H, Wang N, Yuan J P 2012 *Astrophys. Space Sci.* **342** 55
- [46] Gao Z F, Wang N, Peng Q H, Li X D, Du Y J 2013 *Mod. Phys. Lett. A* **28** 1350138
- [47] Lai D, Shapiro S L 1991 *Astrophys. J. Lett.* **383** 745
- [48] Harding A K, Lai D 2006 *Rep. Prog. Phys.* 692631
- [49] Chakrabarty S, Bandyopadhyay D, Pal S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2898
- [50] Chung K C, Wang C S, Wang A J, Santiago, Zhang J W 2001 *Eur. Phys. J. A* **12** 161
- [51] Ding Y, Cao L G, Wang A J, Ma Z Y 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 716
- [52] Takahashi K 2008 *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **35** 035002
- [53] Henley E M, Johnson M B, Kisslinger L S 2007 *Phys. Rev. D* **76** 125007
- [54] Elgarøy Ø, Engvik L, Hjorth Jensen M, Osnes E 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1428
- [55] Zhu W W, Kaspi V M, McLaughlin 2011 *Astrophys. J.* **734** 44

# Landau-level stability of electrons in superstrong magnetic fields and its influences on electron Fermi energy\*

Song Dong-Ling<sup>1)†</sup> Ming Liang<sup>2)</sup> Shan Hao<sup>2)</sup> Liao Tian-He<sup>1)</sup>

1) (Institute of Science, University of Information Engineering, Zhengzhou 450001, China)

2) (Xinjiang Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Urumqi 830011, China)

( Received 13 September 2015; revised manuscript received 30 October 2015 )

## Abstract

Magnetars are highly-magnetized neutron stars powered by magnetic field energy. Their internal magnetic fields are far higher than the quantum critical magnetic field of electrons. The issue concerning the Landau-level stability of charged particles in a high magnetic field is indeed too complicated, and there has been not any relevant works or explicit analytical expression in the physics community. In this work, we introduce a new quantity,  $g_n$ , the Landau-level stability coefficient of electrons in a superstrong magnetic field for illustration of our idea. Considering the uncertainty of the microscopic states of electrons in a superstrong magnetic field, we assume that  $g_n$  takes the form of power exponent,  $g_n = g_0 n^\alpha$ , ( $n \geq 1$ ) where  $n$ ,  $g_0$  and  $\alpha$  are the Landau level number, the ground-state level stability coefficient, and the stability index of Landau levels of electrons, respectively. It is obvious that  $g_n$  is the function of  $n$  and  $\alpha$ . When  $n = 1$ ,  $g_1 = g_0$  i.e., the ground state level has the same stability as that of the first excited level. According to quantum mechanics, the electrons at a higher energy level are prone to have excited transitions towards a lower energy level. The bigger the Landau level number, the shorter the level-occupying time for electrons, and the lower the Landau-level stability, the higher the probability of the excited transition. Since the ground state level has the highest stability and  $g_n$  decreases with the increase in  $n$ , the stability index  $\alpha$  should be negative. The main reasons are as follows: if  $\alpha = 0$ , then  $g_n = g_{n-1} = \dots = g_0$ , i.e., all the Landau levels have the same stability, and the maximum of the Landau level number  $n_{\max}$  can take any high value, this scenario is essentially corresponding to a weak magnetic field approximation, which goes against the topic of this paper; if  $\alpha > 0$ , then a higher Landau-level number possesses a higher stability, and  $n_{\max}$  can also take any high value, which is clearly contrary to the principle of quantum mechanics. Based on the analysis above, we conclude that for degenerate and relativistic electrons in a superstrong magnetic field, the Landau-level stability index  $\alpha < 0$ , and the level stability coefficient  $g_n$  increases with the increase in  $\alpha$  for a given Landau level with  $n \geq 1$ . The bigger the Landau level number  $n$ , the faster the change of  $g_n$  with the variation of  $\alpha$ , and the greater the influence of the stability index  $\alpha$  on  $g_n$ , and the larger the probability of a particle's transition (this transition is referred to as the transition from the higher energy level into lower energy level) becomes. By introducing the Dirac- $\delta$  function, we deduce a general formula for Fermi energy of degenerate and relativistic electrons, modify a special solution to  $E_F(e)$ , which is suitable for superstrong magnetic fields, and obtain the magnetic field index  $\beta = 1/6$  in the expression of the special solution to  $E_F(e)$ . The applicable conditions for the special solution to  $E_F(e)$ , as well as its general expression, are constrained as  $\rho \geq 10^7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  and  $B_{\text{cr}} \ll B \leq 10^{17} \text{ G}$ . Since there exists the discrepancy of stability in different Landau levels we have every reason to believe that this newly modified particular solution to  $E_F(e)$  will be superior to the previous one. The electron Fermi energy is one of the most important parameters of the equation of state (EoS), a superstrong magnetic field will inevitably has an influence on the EoS of a NS, as well as on the electron Fermi energy. Meanwhile, the particular solution to the electron Fermi energy obtained in this paper will surely exert certain influence on the calculations of the weak-interaction process (including the modified URCA reaction and electron capture) and the magnetothermal evolution mechanism for magnetars.

**Keywords:** Landau-levels, superstrong magnetic fields, Fermi energy, neutron stars

**PACS:** 71.70.Di, 97.10.Ld, 71.18.+y, 97.60.Jd

**DOI:** 10.7498/aps.65.027102

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11173042), the Xinjiang Natural Science Foundation, China (Grant No. 2013211A053), and the Foundation and Cutting-edge Technology Research Program of Henan Province, China (Grant No. B20142475).

† Corresponding author. E-mail: [dongling120011@sina.com](mailto:dongling120011@sina.com)