物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

混沌背景下非平稳谐波信号的自适应同步挤压小波变换提取

汪祥莉　王斌　王文波　喻敏

Extractraction of non-stationary harmonic from chaotic background based on synchrosqueezed wavelet transform

Wang Xiang-Li　Wang Bin　Wang Wen-Bo　Yu Min

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 200202 (2016)　DOI: 10.7498/aps.65.200202
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.200202
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I20

混沌背景下非平稳谐波信号的自适应同步挤压小波变换提取*

汪祥莉[1)†] 王斌[2)] 王文波[3)] 喻敏[3)]

1) (武汉理工大学, 交通物联网技术湖北省重点实验室, 武汉 430063)

2) (武汉科技大学信息科学与工程学院, 武汉 430081)

3) (武汉科技大学理学院, 武汉 430065)

(2016 年 5 月 26 日收到; 2016 年 6 月 25 日收到修改稿)

针对同步挤压小波变换 (SST) 在提取混沌背景下非平稳谐波信号时的不足, 提出一种改进的自适应最优累加频率范围的 SST 非平稳谐波信号提取方法. 首先根据非平稳谐波信号小波系数与小波基支撑区间的关系, 推导非平稳谐波 SST 提取时自适应累加频率范围的计算公式; 然后, 利用最小能量误差准则确定自适应累加频率范围公式中参数的最优值, 从而实现非平稳谐波信号的 SST 自适应提取. 分别在 Lorenz 混沌背景和 Duffing 混沌背景下对不同类型的非平稳谐波信号进行了实验分析, 实验结果表明, 该方法能有效地从含噪混沌背景中提取非平稳谐波信号, 与经典的单一累加频率范围的 SST 方法相比, 提取结果在均方误差和相关系数两方面都有较好的提高.

关键词: 同步挤压小波变换, 非平稳谐波, 谐波提取, 混沌

PACS: 02.30.Nw, 31.70.Hq **DOI:** 10.7498/aps.65.200202

1 引 言

混沌背景中的信号检测近十几年来已逐渐成为研究热点之一, 受到众多学者的关注 [1,2]. 已有的研究表明, 在很多工程问题中待检测信号往往不可避免地被湮没在混沌噪声中, 如海杂波中的雷达信号检测 [3,4]、混沌保密通信中源信号的提取 [5], 心电/脑电信号中异常信号的检测等 [6]. 因此, 混沌背景中信号检测问题的研究具有很强的理论和实际意义.

目前针对混沌背景中目标信号的检测问题主要有两类处理方法: 一类是利用混沌相空间的几何结构与目标信号不同的特点进行检测; 另一类将混沌信号视为噪声信号, 利用时频分析方法从混沌信号中提取目标信号. 对于第一类方法, Leung 和 Huang [7] 利用混沌的有限纬特性, 通过最小相空间体积法实现了混沌背景下正弦信号的频率估计; He 和 Luo [8] 通过分析混沌背景与目标信号功率谱随机共振理论的不同, 实现目标信号的检测; Guan 等 [9] 以及 Li 和 Zhang [10] 利用神经网络对混沌背景进行预测, 从预测误差中分析检测目标信号; 行鸿彦等 [4] 利用改进的支持向量基实现海杂波中微弱信号的检测. Xu 等 [11] 通过改变混沌系统参数, 使系统进入不同的状态进而对所含谐波信号进行检测. 第一类方法虽然可较好地检测目标信号, 但往往需要预知混沌系统特性并进行相空间重构, 在实际应用中存在一定的难度, 且计算量较大. 对于第二类方法, Huang 和 Xu [12] 以及王国光和王树勋 [13] 利用混沌的窄带特性, 采用小波变换对混沌背景中的目标信号进行了分离; 王尔馥等 [5]

* 国家自然科学基金 (批准号: 61473213)、湖北省自然科学基金 (批准号: 2015CFB424, 2015CFB602) 和武汉理工大学交通物联网技术湖北省重点实验室开放基金 (批准号: 2015III015-B02) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wwb0178@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

将小波变换与EMD 相结合, 利用时-频联合两步化方法实现了混沌背景下谐波信号的检测; 汪祥莉等[14] 从混沌、噪声与谐波信号的时频特性出发, 利用同步挤压小波变换(synchrosqueezed wavelet transform, SST)从混沌背景中抽取谐波信号. 基于时频分析的方法不需要重构混沌相空间, 可以简单有效地提取混沌背景中的目标信号. 但小波变换缺乏自适应性, 如何选择最优小波基和分解层数是个难题, 且存在模态混叠现象[15]; EMD 同样存在模态混叠现象, 而且对噪声比较敏感, 当混沌背景中含有较强的随机噪声时, EMD 分解结果会受到严重影响[16]; SST[17−19] 通过对连续小波系数在频率方向的挤压, 较好地改善了模态混叠现象, 且对噪声具有较好的鲁棒性, 因此在混沌背景下谐波信号的提取中获得了较好的效果[14].

但文献[14]是在小波脊线检测的基础上, 采用单一频率范围SST方法(single accumulate frequency rang SST, SAFR-SST)抽取混沌背景中的目标信号. 如果目标信号是频率不随时间变化的平稳谐波信号, 可以获得较高的检测精度; 但如果目标信号是频率随时间变化的非平稳谐波信号, 则单一频率范围的检测方法存在一定的不足, 难以获得高精度的抽取结果. 针对该问题, 本文提出了一种混沌背景下非平稳信号的自适应频率范围SST抽取方法(adaptive accumulate frequency rang SST, AAFR-SST). 在该方法中, 首先根据混合信号小波系数与瞬时频率的关系, 推导了抽取各分量信号时自适应频率范围的计算公式; 然后, 采用最小能量误差的方法确定频率范围计算公式中参数的最优值. 实验结果表明了所提方法的有效性.

本文余下内容的安排如下: 第2节介绍SST基本理论; 第3.1节针对混沌背景下的非平稳目标信号, 推导目标信号提取时自适应频率范围的计算公式, 第3.2节根据最小能量误差确定频率范围计算公式中参数的最优值; 第4节通过不同的仿真数据对所提方法进行实验分析, 并与经典的SST方法进行对比, 最后是总结.

2 同步挤压小波变换

假设多分量信号 $f(t)$ 为

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} f_k(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k(t)\cos[2\pi\phi_k(t)],$$

其中 $A_k(t) > 0$, $\phi_k'(t) > 0$. SST可以精确地分析 $f(t)$ 中各谐波分量的频率, 并成功抽取谐波分量 $f_k(t)$. SST的基本理论如下[16]:

定义1 (内蕴模态类函数, intrinsic mode type function, IMT) 如果谐波函数 $f(t) = A(t)\cos(2\pi\phi(t))$ 满足以下条件:

$$\begin{aligned}
&A(t) \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad \phi \in C^2(\mathbb{R}),\\
&\inf_{t\in\mathbb{R}} \phi'(t) > 0, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \phi'(t) < \infty,\\
&\sup_{t\in\mathbb{R}} \phi''(t) < \infty, \quad |A'(t)|, \quad |\phi''(t)| \leqslant \gamma|\phi'(t)|,
\end{aligned}$$

则称函数 $f(t)$ 为具有精度 γ 的内蕴模态类函数(γ-IMT).

定义2 (具有良好分离度的内蕴模态函数类) 如果多分量谐波函数 $f(t)$ 可以被表示为[16]

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} f_k(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k(t)\cos(2\pi\phi_k(t)), \quad (1)$$

其中 $f_k(t)$ 是具有精度 γ 的内蕴模态类函数(N 为常数), 且满足

$$\begin{aligned}
&\phi_k'(t) > \phi_{k-1}'(t),\\
&|\phi_k'(t) - \phi_{k-1}'(t)| \geqslant d(\phi_{k-1}'(t) + \phi_k'(t)), \quad (2)
\end{aligned}$$

则称 $f(t)$ 为具有分离度 d 的 γ-IMT 函数类的叠加, 其中 d 被称为分离条件. 具有分离度 d 的 γ-IMT 的集合被记为 $A_{\gamma,d}$. 在SST中, $f(t)$ 的连续小波变换定义为

$$W_f(a,b) = \int f(t) a^{-1/2} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} \mathrm{d}t,$$

信号的瞬时频率定义为

$$\omega(a,b) = \frac{\partial_t W_f(a,b)}{2\mathrm{i}\pi W_f(a,b)}.$$

基于连续小波变换, 可得到SST的主要结论.

结论1[16] 设函数 $f(t) \in A_{\gamma,d}$, 选择函数 $h \in C_0^\infty$ 且 $\int h(t)\mathrm{d}t = 1$, 选择一个小波函数 ψ, 设其Fourier变换 $\hat{\psi}$ 的支撑区间为 $[\xi_\Psi - \Delta, \xi_\Psi + \Delta]$ 且 $\Delta < \mathrm{d}\xi_\Psi/(1+d)$. 函数 $f(t)$ 经连续小波变换后, 对小波系数 $W_f(a,b)$ 进行阈值为 γ, 精度为 δ 的同步挤压的结果为

$$\begin{aligned}
S_{f,\gamma}^{\delta}(b,\omega) = &\int_{A_{\gamma,f}(b)} W_f(a,b)\\
&\times \frac{1}{\delta} h\left(\frac{\omega - \omega_f(a,b)}{\delta}\right) a^{-3/2}\mathrm{d}a, \quad (3)
\end{aligned}$$

式中 $A_{\gamma,f}(b) = \{a \in \mathbb{R}^+; |W_f(a,b)| > \gamma\}$.

结论 2[16] 当 ε 充分小时, 可实现分量 $f_k(t)$ 的完全重构, 即对 $k \in \{1, \cdots, N\}$, 令

$$\tilde{f}_k(b) = \lim_{\delta\to 0}\left(R_\psi^{-1}\int_{|\omega(a,b)-\phi_k'(b)|<\varepsilon} S_{f,\gamma}^{\delta}(b,\omega)\,\mathrm{d}\omega\right), \tag{4}$$

则存在着一个常数 C, 使得对于 $\forall b \in \mathbb{R}$, 都有

$$|\tilde{f}_k(b) - A_k(b)\cos[2\pi\phi_k(b)]| \leqslant C\varepsilon.$$

对于含噪多分量信号

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^{N} f_k(t) + n(t) \\ &= \sum_{k=1}^{N} A_k(t)\cos[2\pi\phi_k(t)] + n(t), \end{aligned}$$

($n(t)$ 表示噪声), 由文献 [17] 可知, (4) 式仍然成立. 因此, 对于混沌背景下的多分量信号进行检测时, 如果将混沌干扰看作噪声, 则目标信号的分量 $f_k(t)$ 可由下式抽取[16]:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k(t) &= \lim_{\delta\to 0}\left(R_\psi^{-1}\int_{|\omega(a,t)-\phi_k'(t)|<\varepsilon} S_{f,\gamma}^{\delta}(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega\right) \\ &= R_\psi^{-1}\int_{\substack{|W_f(a,t)|>\gamma,\\ |\omega(a,t)-\phi_k'(t)|<\varepsilon}} a^{-\frac{3}{2}} W_f(a,t)\,\mathrm{d}a. \end{aligned} \tag{5}$$

3 基于自适应累加频率范围SST的非平稳谐波提取

3.1 自适应累加频率范围的计算公式

利用SST从含混沌噪声的多分量信号

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^{N} f_k(t) + n(t) \\ &= \sum_{k=1}^{N} A_k(t)\cos[2\pi\phi_k(t)] + n(t) \end{aligned}$$

中提取分量信号 $\{f_k(t), k = 1, \cdots, N\}$ 时, 基本步骤如下: 1) 对信号 $f(t)$ 进行连续小波变换; 2) 设置小波系数阈值 γ, 利用能量最大或脊提取的方法确定各分量信号的频率中心曲线 $\phi_k'(t)$; 3) 设置累加频率范围参数 ε, 以分量信号频率中心曲线 $\phi_k'(t)$ 为基础, 按照 (5) 式提取分量信号 $f_k(t)$.

分量信号 $\{f_k(t)\}$ 的提取质量与小波阈值参数 γ 及累加频率范围参数 ε 密切相关, 小波阈值参数通常按文献 [17] 中的方法进行取值, $\gamma = 1.4826\sqrt{2\log N}\cdot\mathrm{MAD}(|W_f|_{n_v})$ (N 表示信号长度, $\mathrm{MAD}(|W_f|_{n_v})$ 表示最小尺度层小波系数的中值), 可以取得较好的效果. 但累加频率范围参数 ε 如何取值尚没有合适的方法, 现有文献中通常根据经验按单一频率范围的方法设置 ε, 即对每一个分量 $f_k(t)$ 提取时 ε 都取相同值.

单一频率范围的方法在提取混沌背景中的平稳谐波时, 可以取得较好的效果, 但在提取混沌背景中的非平稳谐波信号时, 往往存在较大的误差. 因为非平稳谐波信号的瞬时频率随时间变化, 分量信号间的频率间隔及分量信号本身的频带宽度并不固定, 利用SST提取分量信号时, 如果频率范围参数 ε 取值过小, 则不能完整覆盖分量信号的小波系数带 (如图 1 (b) 所示), 导致提取信号不完整; 如果频率范围参数 ε 取值过大, 则会引入过多的噪声系数, 甚至导致分量信号的提取范围相互重叠 (如图 1 (c) 所示), 同样影响分量信号的提取精度. 因此, 本文希望通过分量信号的小波变换及其频率中心曲线 $\phi_k'(t)$ 自适应确定累加频率范围 $\varepsilon_k(t)$, 使得 $\varepsilon_k(t)$ 能比较好地符合 $f_k(t)$ 的小波系数带 (如图 1 (d) 所示), 提高非平稳谐波分量的提取精度.

假设SST变换中使用的小波函数为 $\psi(x)$, 其傅里叶变换为 $\hat{\Psi}(\xi)$ 且 $\hat{\Psi}(\xi)$ 仅有一个峰值 ξ_Ψ, 即 $\xi_\Psi = \arg\max_{\xi}\left|\hat{\Psi}(\xi)\right|$, 设 $\hat{\Psi}(\xi)$ 的支撑区间为 $[\xi_\Psi - \varDelta, \xi_\Psi + \varDelta]$, $\varDelta > 0$. 对于信号 $s(t) = A\cos(2\pi\phi t)$, 其连续小波变换为

$$W_s(a,t) = \int s(x) a^{-1/2}\overline{\psi\left(\frac{x-t}{a}\right)}\,\mathrm{d}x.$$

根据Plancherel定理, 可知

$$\begin{aligned} W_s(a,t) &= \frac{1}{2\pi}\int \hat{s}(\xi) a^{1/2}\overline{\hat{\psi}(a\xi)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{A}{2}a^{1/2}\int[\delta(\xi+2\pi\phi)+\delta(\xi-2\pi\phi)] \\ &\quad\times\overline{\hat{\psi}(a\xi)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{A}{2}a^{1/2}\overline{\hat{\psi}(a2\pi\phi)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\phi t} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2}A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\phi t}\overline{\hat{\Psi}(a\phi)}. \end{aligned} \tag{6}$$

对于混沌背景下的多分量时变谐波信号

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^{N} f_k(t) + n(t) \\ &= \sum_{k=1}^{N} A_k(t)\cos[2\pi\phi_k(t)] + n(t), \end{aligned}$$

根据 (6) 式, 可知其连续小波变换可写为

$$W_f(a,t)=\sum_{k=1}^{K}W_{f_k}(a,t)+W_n(a,t)$$

$$\approx\sum_{k=1}^{K}\frac{\sqrt{a}}{2}A_k(t)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\phi_k(t)}\overline{\Psi(a\phi_k'(t))}+W_n(a,t),$$

考虑到 $\hat{\Psi}(\xi)$ 非零部分的区间为 $[\xi_\Psi-\varDelta,\xi_\Psi+\varDelta]$, 且

$$W_{f_k}(a,t)\approx\frac{\sqrt{a}}{2}A_k(t)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\phi_k(t)}\overline{\Psi(a\phi_k'(t))},$$

因此, 分量信号 $f_k(t)$ 的小波系数 $W_{f_k}(a,t)\neq 0$ 时, 小波变换的尺度 a 应满足

$$\xi_\Psi-\varDelta\leqslant a\phi_k'(t)\leqslant\xi_\Psi+\varDelta,$$

即

$$a\in\left[\frac{\xi_\Psi-\varDelta}{\phi_k'(t)},\frac{\xi_\Psi+\varDelta}{\phi_k'(t)}\right].\qquad(7)$$

在连续小波变换中, 信号的瞬时频率与尺度具有以下对应关系:

$$\omega(a,t)=\frac{\xi_\Psi}{Ts}\cdot\frac{1}{a(t)},$$

Ts 表示采样周期, 因此寻找合适的频率区间 $\{\omega:|\omega(a,t)-\phi_k'(t)|\leqslant\varepsilon_k(t)\}$, 以恰好覆盖 f_k 的整个小波带, 等价于寻找合适的尺度区间 $\{a: a_{\min}\leqslant a\leqslant a_{\max}\}$. 由 (6) 式和 (7) 式可知, 如果选择尺度范围为 $a\in\left[\frac{\xi_\Psi-\varDelta}{\phi_k'(t)},\frac{\xi_\Psi+\varDelta}{\phi_k'(t)}\right]$, 恰好可以覆盖 f_k 的小波系数带. 将 (7) 式代入 (5) 式中, 可得到混沌背景下自适应频率范围的时变谐波提取公式为

$$\tilde{f}_k(t)=R_\psi^{-1}\int_{\substack{\{a:|W_f(a,t)|>\gamma,\\(\xi_\Psi-\varDelta)/\phi_k'(t)\leqslant a\leqslant(\xi_\Psi+\varDelta)/\phi_k'(t)\}}}a^{-3/2}\times W_f(a,t)\,\mathrm{d}a.\qquad(8)$$

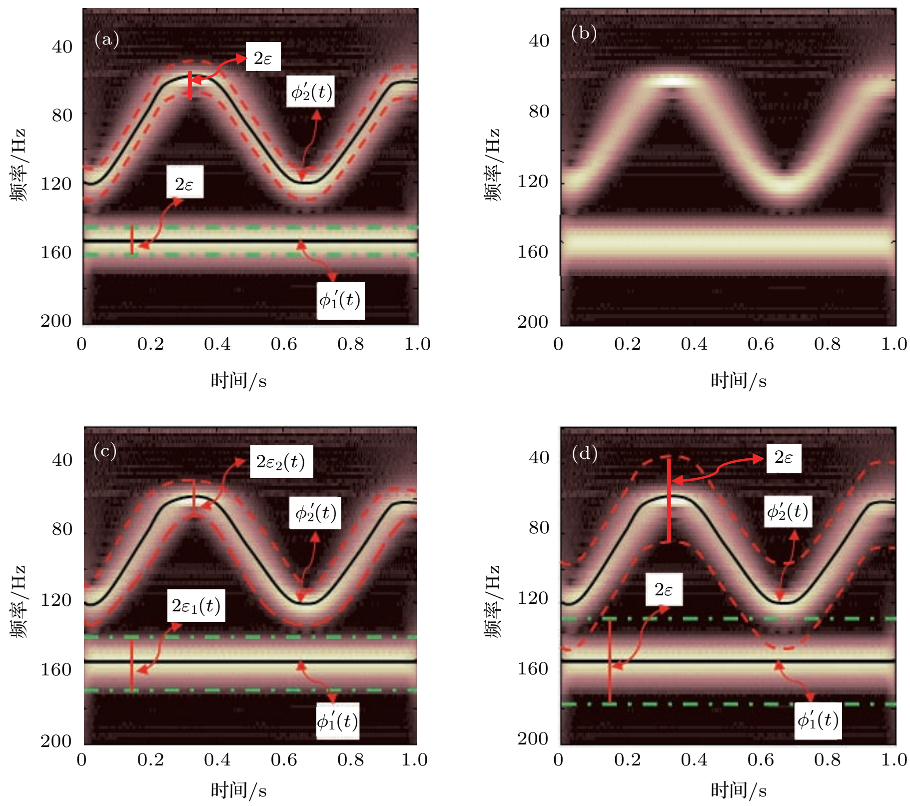

图 1 (网刊彩色) SST 累加频率范围示意图, $f(t)=f_1(t)+f_2(t)+v(t)$, $v(t)$ 表示 Duffing 混沌信号, $f_1(t)=\cos(2\pi\times150t)$, $f_2(t)=\cos[2\pi\times90t+21\cos(3\pi\times t)]$ (a) $f(t)$ 连续小波变换时频图; (b) ε 较小时, 单一累加频率范围图; (c) ε 较大时, 单一累加频率范围图; (d) 自适应累加频率范围图, 其中 $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ 分别表示 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的累加频率范围, $\phi'_1(t)$, $\phi'_2(t)$ 分别表示 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的中心频率

Fig. 1. (color online) Cumulative frequency range of SST in extracting component, $f(t)=f_1(t)+f_2(t)+v(t)$, $v(t)$ denotes chaotic signal and $f_1(t)=\cos(2\pi\times150t)$, $f_2(t)=\cos[2\pi\times90t+21\cos(3\pi\times t)]$: (a) Continuous wavelet transform time frequency diagram of $f(t)$; (b) single cumulative frequency range when ε is smaller; (c) single cumulative frequency range when ε is bigger; (d) adaptive cumulative frequency range, where $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ respectively denotes the cumulative frequency range of $f_1(t)$, $f_2(t)$, and $\phi'_1(t)$, $\phi'_2(t)$ respectively denotes the center frequency of $f_1(t)$, $f_2(t)$.

3.2 基于误差能量的母小波频率域支撑区间的优化选择

由(8)式可知, 在自适应频率区间的SST分量重构算法中, 分量$f_k(t)$被重构时尺度a的选择范围为:

$$\left\{a:\frac{\xi_\Psi-\varDelta}{\phi_k'(t)}\leqslant a\leqslant\frac{\xi_\Psi+\varDelta}{\phi_k'(t)}\right\},$$

对于同一类别的母小波函数$\psi(t)$, 其频率域峰值ξ_Ψ是一定值; 当信号$f(t)$给定时, 分量信号$f_k(t)$的瞬时频率$\phi_k'(t)$也是确定的值. 因此尺度a的选择范围仅受小波频率域支撑区间宽度$\varDelta$的影响, $\varDelta$取值的不同将会严重影响分量$f_k(t)$的重构质量[16,18]. 本文通过重构信号的误差能量讨论母小波频率域支撑区间宽度$\varDelta$的最优选择.

假设混沌背景下多分量信号

$$f(t)=\sum_{k=1}^{K}f_k(t)+v(t)$$

中, 分量$f_k(t)$均值为0且相互独立, $v(t)$为均值为0的混沌干扰信号, 则信号$\boldsymbol{f}=[f(t),t=t_0,t_1,\cdots,t_{N-1}]$的能量均值

$$\begin{aligned}E[\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}]=E[&(\boldsymbol{f}_1+\cdots+\boldsymbol{f}_K+\boldsymbol{v})\\&\cdot(\boldsymbol{f}_1+\cdots+\boldsymbol{f}_K+\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}],\end{aligned}$$

由于$\boldsymbol{f}_k=[f_k(t),t=t_0,t_1,\cdots,t_{N-1}]_{k=1,2,\cdots,K}$相互独立, 且各分量与混沌干扰信号$\boldsymbol{v}$也相互独立, 因此$E[\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{f}_j^{\mathrm{T}}]\approx0$, $i\neq j$; $E[\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}]\approx0$, $i=1,\cdots,K$, 所以信号$\boldsymbol{f}$的总能量均值为$E[\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}]=E[(\boldsymbol{f}_1+\cdots+\boldsymbol{f}_K+\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{f}_1+\cdots+\boldsymbol{f}_K+\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}]=E[\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{T}}]+\cdots+E[\boldsymbol{f}_K\cdot\boldsymbol{f}_K^{\mathrm{T}}]+E[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}]$. 在利用SST对信号$\boldsymbol{f}$进行分量抽取时, 如果抽取的分量$\tilde{\boldsymbol{f}}_1,\tilde{\boldsymbol{f}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{f}}_K$恰好是$\boldsymbol{f}$中的正交分量$\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_K$, 那么剩余信号仅为混沌干扰信号, 剩余信号的能量均值为

$$E[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}]=E[(\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}})\cdot(\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}})^{\mathrm{T}}]=\sigma_{\boldsymbol{v}}^2.$$

如果所抽取的信号$\{\tilde{\boldsymbol{f}}_k\}$与$\boldsymbol{f}$中的正交分量$\{\boldsymbol{f}_k\}$不完全相同, 存在一定的偏差, 则当$\{\tilde{\boldsymbol{f}}_k,k=1,2,\cdots,K\}$被抽取后, 剩余信号的能量均值为

$$\begin{aligned}E_R&=E\left[\left(\boldsymbol{f}-\sum_{k=1}^{K}\tilde{\boldsymbol{f}}_k\right)\cdot\left(\boldsymbol{f}-\sum_{k=1}^{K}\tilde{\boldsymbol{f}}_k\right)^{\mathrm{T}}\right]\\&=E\left\{\left[\sum_{k=1}^{K}(\boldsymbol{f}_k-\tilde{\boldsymbol{f}}_k)+\boldsymbol{v}\right]\right.\\&\qquad\left.\times\left[\sum_{k=1}^{K}(\boldsymbol{f}_k-\tilde{\boldsymbol{f}}_k)+\boldsymbol{v}\right]^{\mathrm{T}}\right\}\\&=E\left\{\left[\sum_{k=1}^{K}(\boldsymbol{f}_k-\tilde{\boldsymbol{f}}_k)\right]\right.\\&\qquad\left.\times\left[\sum_{k=1}^{K}(\boldsymbol{f}_k-\tilde{\boldsymbol{f}}_k)\right]^{\mathrm{T}}\right\}+E(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}).\end{aligned}\tag{9}$$

在SST分量重构中, 当$\varDelta$较小时, 重构尺度$a\in\left[\frac{\xi_\psi-\varDelta}{\phi_k'(t)},\frac{\xi_\psi+\varDelta}{\phi_k'(t)}\right]$在分量$f_k(t)$的中心尺度$\xi_\Psi/\phi_k'(t)$附近波动, 此时抽取出的分量$x_k(t)$与$f_k(t)$的瞬时频率基本一致, 但振幅偏小. 因此, 如果在选择$\varDelta$的最优取值过程中, 让$\varDelta$从较小值开始逐步增大, 则在迭代过程中, 不妨假设抽取分量$\tilde{\boldsymbol{f}}_k=[\tilde{f}_k(t),t=t_0,t_1,\cdots,t_{N-1}]$满足

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_k=A_k\boldsymbol{f}_k+\boldsymbol{e}_k,$$

其中A_k表示一个常数, $\boldsymbol{e}_k=[e_k(t),t=t_0,t_1,\cdots,t_{N-1}]$为$\boldsymbol{x}_k$中与$\{\boldsymbol{f}_k,k=1,2,\cdots,K\}$完全正交的误差成分, $\{\boldsymbol{e}_k,k=1,2,\cdots,K\}$相互独立.

$$\begin{aligned}&E\left\{\left[\sum_{k=1}^{K}(\boldsymbol{f}_k-\tilde{\boldsymbol{f}}_k)\right]\cdot\left[\sum_{k=1}^{K}(\boldsymbol{f}_k-\tilde{\boldsymbol{f}}_k)\right]^{\mathrm{T}}\right\}\\&=E\left\{\sum_{k=1}^{K}[(1-A_k)\boldsymbol{f}_k-\boldsymbol{e}_k]\right.\\&\qquad\left.\times\sum_{k=1}^{K}[(1-A_k)\boldsymbol{f}_k-\boldsymbol{e}_k]^{\mathrm{T}}\right\}\\&=E\left\{\left[\sum_{k=1}^{K}(1-A_k)\boldsymbol{f}_k\right]\right.\\&\qquad\left.\times\left[\sum_{k=1}^{K}(1-A_k)\boldsymbol{f}_k^{\mathrm{T}}\right]\right\}+\sum_{k=1}^{K}E(\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}})\\&=\sum_{k=1}^{K}(1-A_k)^2E(\boldsymbol{f}_k\cdot\boldsymbol{f}_k^{\mathrm{T}})+\sum_{k=1}^{K}E(\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}),\end{aligned}\tag{10}$$

显然, 误差成分$\boldsymbol{e}_k$与A_k密切相关, 当$A_k=1$时, $\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{0}$. 将(10)式代入(9)式可知

$$\begin{aligned}E_R=&\sum_{k=1}^{K}(1-A_k)^2E(\boldsymbol{f}_k\cdot\boldsymbol{f}_k^{\mathrm{T}})\\&+\sum_{k=1}^{K}E(\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}})+E(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}).\end{aligned}\tag{11}$$

由(11)式可以看出, 对混沌背景下时变谐波信号$\boldsymbol{f}$进行SST分量提取时, 当被提取出的分量$\tilde{\boldsymbol{f}}_k$

恰好是原分量信号 $\boldsymbol{f}_k$ 时, E_R 等于混沌信号方差 $E(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})$; 当被抽取出的分量 $\tilde{\boldsymbol{f}}_k$ 与原分量信号 $\boldsymbol{f}_k$ 不完全相等时, E_R 总是大于 $E(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})$. 当 E_R 越小时, A_k 越接近1, 抽取出的信号 $\tilde{\boldsymbol{f}}_k$ 越接近信号中的原分量信号 $\boldsymbol{f}_k$. 因此, 在对母小波频率域支撑区间 $\varDelta$ 进行最优选择时, 可以对剩余信号能量均值 E_R 进行跟踪, 当 E_R 达到某一个最小值时, $\varDelta$ 的筛选结束, 此时所取的值即为SST 分量抽取中母小波频率域支撑区间 $\varDelta$ 的最优值.

4 仿真实验与分析

在实验中, 假设混合信号 $f(t)$ 由混沌干扰信号 $v(t)$、非平稳谐波信号 $\{f_k(t), 1\leqslant k\leqslant N\}$ 及高斯白噪声 $n(t)$ 组成, 即

$$f(t)=\sum_{k=1}^{N} f_k(t)+v(t)+n(t).$$

为了考察白噪声对提取效果的影响,定义噪声水平为 $\mathrm{NL}=\dfrac{\sigma_n}{\sigma v}\times 100\%$, 其中 σ_n, σ_v 分别表示高斯白噪声和混沌干扰信号的标准差. 利用单一累加频率范围SST方法(SAFR-SST)和本文提出的自适应累加频率范围SST方法(AAFR-SST), 分别在Lorenz混沌背景和Duffing混沌背景下对非平稳谐波信号进行提取. 在SST变换过程中, 选用bump小波基函数, 并通过文献[17]中方法设置小波系数阈值 γ.

4.1 Lorenz混沌背景下非平稳谐波信号的提取

首先采用Lorenz混沌系统对所提方法进行仿真实验. Lorenz 系统方程为:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\sigma(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}),\\ \dot{\boldsymbol{y}}=r\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{z},\\ \dot{\boldsymbol{z}}=-b\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y},\end{cases}$$

式中, 取 $\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$. 采用四阶Runge-Kutta方法对Lorenz系统方程进行数值求解, 步长取为0.01, 初始值取为 $x(0)=y(0)=z(0)=1$, 取 x 分量作为混沌实验信号. 实验中首先通过迭代产生24000个混沌点, 使用最后的2048个点作为混沌干扰数据. 非平稳谐波信号取为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2} f_k(t)=\ &\sin[2\pi\times(138t+63\sin(3\pi t))]\\ &+\sin[2\pi\times(231t+90\sin(3\pi t))].\end{aligned}$$

分别设置噪声水平NL = 40%, 60%, 80%, 100%, 120%, 通过SAFR-SST[18]方法和AAFR-SST方法从Lorenz混沌背景中提取谐波信号. 图2是NL = 60%时两种方法所提取的非平稳谐波; 表1是不同噪声水平时, 两种方法所提取谐波的均方误差及相关系数.

谐波分量 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 的瞬时频率周期波动且变化较快, 通过图2(a)和图2(c)可以看出, 当 $\omega_1(t)$ 和 $\omega_2(t)$ 比较接近时, 在单一累加频率的SAFR-SST方法中由于提取频率范围固定, 造成提取频率范围重叠, 因此存在不同程度的模态混叠(见 $t=0$—0.1和0.65—0.75段), 此时SAFR-SST所提取的谐波分量在频率和幅度上都与原谐波存在较大差距; 当 $\omega_1(t)$ 和 $\omega_2(t)$ 之间的距离较大时, SAFR-SST方法所设置的频率范围没有相互重叠, 避免了模态混叠现象, 此时所提取谐波的频率与原谐波的频率基本符合, 但由于单一频率范围不能保证完整覆盖分量谐波的小波系数带, 导致提取谐波的幅值与原谐波之间存在一定的差距(见 $t=0.3$—0.4和0.5— 0.6段). 从图3(b)和图3(d)可以看出, 在基于最优自适应频率范围的AAFR-SST法中, 由于提取频率范围可以较好地符合谐波分量的小波带, 有效减小了提取结果的模态混叠现象, 提取谐

表1 Lorenz背景下非平稳谐波提取比较

Table 1. Extraction of non-stationary harmonic in Lorenz chaotic background.

噪声强度/NL	SAFR-SST 提取 Corr		AAFR-SST 提取 Corr		SAFR-SST 提取 MSE		AAFR-SST 提取 MSE	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
40%	0.9147	0.9265	0.9891	0.9927	0.3203	0.2295	0.1190	0.0913
60%	0.9105	0.9202	0.9889	0.9922	0.3811	0.2302	0.1184	0.0945
80%	0.9087	0.9156	0.9873	0.9907	0.4103	0.2486	0.1233	0.1088
100%	0.9024	0.9104	0.9869	0.9896	0.4430	0.2601	0.1276	0.1091
120%	0.8922	0.9036	0.9651	0.9788	0.4766	0.2852	0.1483	0.1285

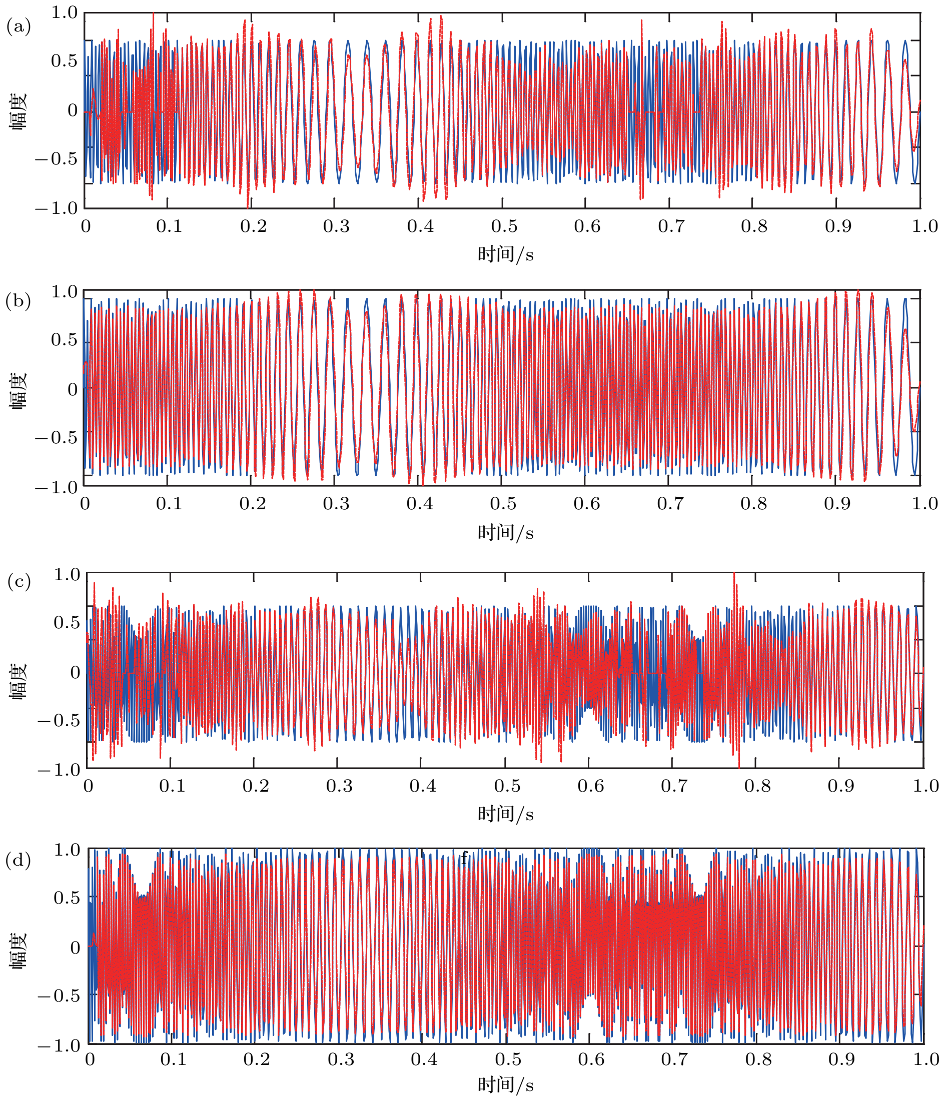

图2 (网刊彩色) NL = 60% 时 Lorenz 混沌背景下非平稳谐波分量的提取 (a) $\sin[2\pi\times(138t+63\sin(3\pi\times t))]$ 的 SAFR-SST 提取; (b) $\sin[2\pi\times(138t+63\sin(3\pi\times t))]$ 的 AAFR-SST 提取; (c) $\sin[2\pi\times(231t+90\sin(3\pi\times t))]$ 的 SAFR-SST 提取; (d) $\sin[2\pi\times(231t+90\sin(3\pi\times t))]$ 的 AAFR-SST 提取

Fig. 2. (color online) when NL = 60%, non-statinoary harmonic extraction in Lorenz chaotic background: (a) Extraction of $\sin[2\pi\times(138t+63\sin(3\pi\times t))]$ by SAFR-SST; (b) extraction of $\sin[2\pi\times(138t+63\sin(3\pi\times t))]$ by AAFR-SST; (c) extraction of $\sin[2\pi\times(231t+90\sin(3\pi\times t))]$ by SAFR-SST; (d) extraction of $\sin[2\pi\times(231t+90\sin(3\pi\times t))]$ by AAFR-SST.

波 $\{\tilde{\boldsymbol{f}}_k, k=1,2\}$ 与原谐波 $\{\boldsymbol{f}_k, k=1,2\}$ 的频率以及幅值都基本符合. 由于混沌干扰信号和白噪声的影响, AAFR-SST 所提取谐波的幅值也比原谐波分量的幅值小, 但与SAFR-SST相比, 幅值误差显著减小.

从表1可以看出, 随着噪声强度的增加, 两种方法提取结果的精度都有所下降, 但下降的幅度并不大, 表明SAFR-SST和AAFR-SST对噪声都具有较好的鲁棒性. 但对于不同强度的噪声, AAFR-SST的谐波提取精度始终高于SAFR-SST: 均方误差MSE平均减小了约0.0757, 相关系数Corr平均提高了约0.2116.

4.2 Duffing混沌背景下非平稳谐波信号的提取

采用Duffing混沌系统对所提方法进行仿真实验分析, Duffing系统方程为

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + c\dot{\boldsymbol{x}} - \omega_0^2\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}^3 = P\cos(\omega t),$$

其中 f_0 为系统固有圆频率, c 为系统阻尼, d 为非线性参数, P 和 ω 分别为外激励幅值和外激励频率, Duffing系统参数取为 $c = 0.05$, $\omega_0^2 = 0.2$,

$d = 1$, $P = 27.5$, 系统初始值 $x(0) = 1$. 采用四阶Runge-Kutta方法求Duffing系统方程数值解, 采样间隔 $\Delta t = \pi/400$, 获取24000个混沌点, 保留后2048个点作为实验数据. 非平稳谐波信号取为 $\sum_{k=1}^{2} f_k(t) = [1 + 0.5\cos(t)]\cos(4\pi t) + [1 + 0.5\cos(2.5t)]\cos[2\pi(5t+2t^{1.3})]$, 分别设置噪声水平NL = 40%, 60%, 80%, 100%, 120%, 通过SAFR-SST和AAFR-SST从Duffing混沌背景中提取谐波信号. 图3是NL = 60%时两种方法所提取的非平稳谐波信号; 表2是不同噪声水平时, 两种方法所提取谐波的均方误差和相关系数.

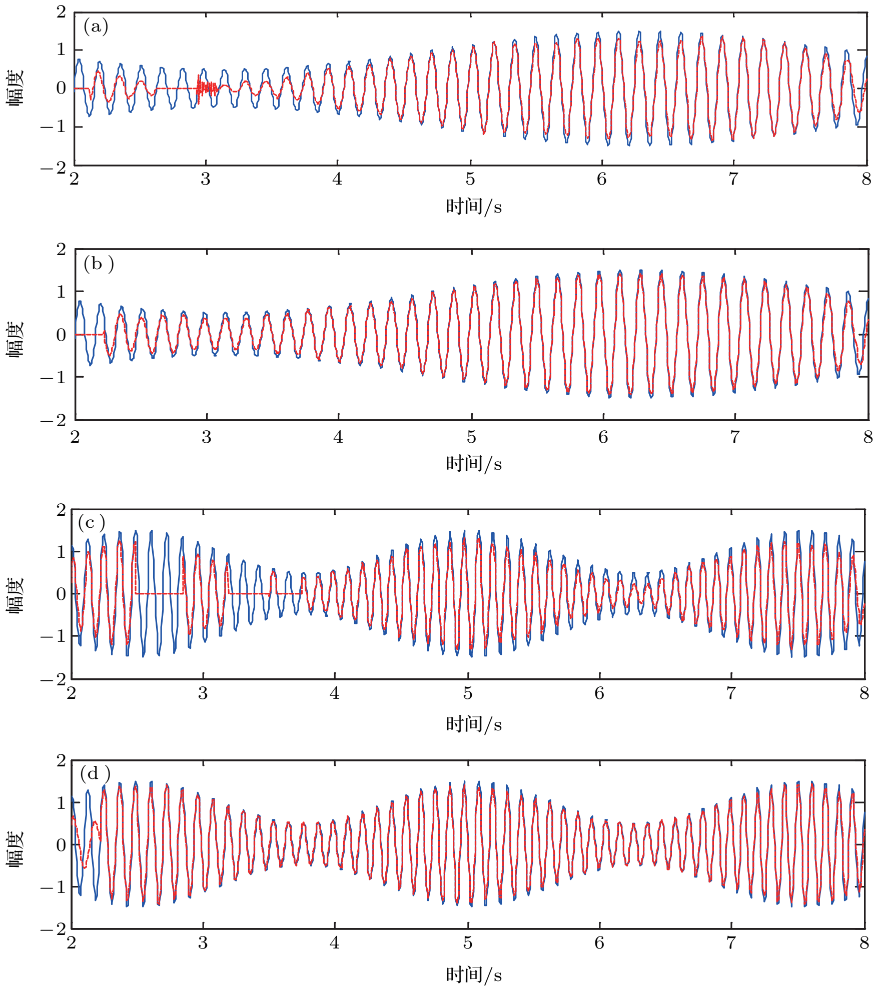

图3 (网刊彩色) NL = 60%时Duffing混沌背景下非平稳谐波分量的提取 (a) $(1+0.5\cos(t))\cos(4\pi\times t)$ 的SAFR-SST提取; (b) $(1+0.5\cos(t))\cos(4\pi\times t)$ 的AAFR-SST提取; (c) $[1+0.5\cos(2.5t)]\cos(2\pi\times(5t+2t^{1.3}))$ 的SAFR-SST提取; (d) $[1+0.5\cos(2.5t)]\cos(2\pi\times(5t+2t^{1.3}))$ 的AAFR-SST提取

Fig. 3. (color online) when NL = 60%, non-statinoary harmonic extraction in Duffing chaotic background: (a) Extraction of $(1+0.5\cos(t))\cos(4\pi t)$ by SAFR-SST; (b) extraction of $(1+0.5\cos(t))\cos(4\pi t)$ by AAFR-SST; (c) extraction of $(1+0.5\cos(t))\cos(4\pi t)$ by SAFR-SST; (d) extraction of $(1+0.5\cos(t))\cos(4\pi t)$ by AAFR-SST.

表2 Duffing背景下非平稳谐波提取比较

Table 2. Extraction of non-stationary harmonic inDuffing chaotic background.

噪声强度 (NL)	SAFR-SST 提取 Corr		AAFR-SST 提取 Corr		SAFR-SST 提取 MSE		AAFR-SST 提取 MSE	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
40%	0.9180	0.9101	0.9928	0.9784	0.2141	0.2621	0.0849	0.1265
60%	0.9113	0.9094	0.9844	0.9642	0.2389	0.2884	0.1262	0.1301
80%	0.9092	0.9015	0.9812	0.9669	0.2679	0.3083	0.1368	0.1479
100%	0.9031	0.8997	0.9798	0.9618	0.2895	0.3378	0.1416	0.1569
120%	0.8925	0.8974	0.9713	0.9602	0.3302	0.3774	0.1702	0.1618

从图3可以看出, Duffing背景下的时变谐波提取结果与Lorenz背景下的类似. 当t较小时, 谐波分量f_1和f_2的频率比较接近, 因此SAFR-SST方法中所设定的固定频率范围存在一定的重叠, 导致提取的谐波存在模态混叠现象, 频率和幅值的误差都较大(见$t = 2$—3.8段). 随着时间t的增大, f_1和f_2瞬时频率之间的距离也逐渐增大, SAFR-SST方法中的模态混叠现象逐步减小, 此时所提取谐波的频率与原谐波基本一致, 但由于固定的频率范围往往不能完整覆盖谐波分量的小波系数带, 因此提取谐波的幅值比原谐波的幅值小(见$t = 5.5$—7段). 从图3(b)和图3(d)可以看出, 由于AAFR-SST中采用自适应的方法确定最优频率范围, 因此提取频率范围可以较好地符合谐波分量的小波带, 有效减小了提取结果的模态混叠现象, 除了起点和终点外, 在其余部分提取谐波$\{\tilde{f}_k, k = 1, 2\}$与原谐波$\{f_k, k = 1, 2\}$之间的频率基本符合. 由于混叠干扰及白噪声的影响, AAFR-SST提取谐波的幅值与原谐波的幅值之间也存在一定的差距, 但总体误差较小. 从表2可以看出, 在不同的噪声水平下, AAFR-SST的谐波提取精度都要优于SAFR-SST, 均方误差MSE平均减小了约0.1532, 相关系数Corr平均提高了约0.0689.

5 结 论

本文基于同步压缩小波变换理论, 对混沌背景下非平稳谐波信号的提取进行了研究, 提出了一种自适应最优频率范围的非平稳谐波信号SST提取方法. 首先, 从小波基函数的支撑区间出发, 推导利用SST提取时变谐波分量自适应频率范围的计算公式; 然后, 基于均方误差最小原则, 确定频率范围计算公式中小波基支撑区间宽度的最优值. 在仿真实验中, 利用所提方法分别对Lorenz混沌背景和Duffing混沌背景下的非平稳谐波信号进行了抽取, 并与经典的单一累加频率范围的SST方法进行了对比. 实验结果表明, 本文方法提取的时变谐波分量具有更高的精度, 而且当混沌背景中含有不同程度的白噪声时, 本文方法也可以较好地将非平稳谐波分量提取出来, 具有一定的实用价值.

参考文献

[1] Aghababa M P 2012 *Chin. Phys. B* **21** 100505

[2] Hu J F, Zhang Y X, Li H Y, Yang M, Xia W, Li J 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 220504 (in Chinese) [胡进峰, 张亚璇, 李会勇, 杨淼, 夏威, 李军 2015 物理学报 **64** 220504]

[3] Arunprakash J, Reddy G R, Prasad N S S R K 2016 *Procedia Technology* **24** 988

[4] Xing H Y, Zhang Q, Xu W 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 040506 (in Chinese) [行鸿彦, 张强, 徐伟 2015 物理学报 **64** 040506]

[5] Wang E F, Wang D Q, Ding Q 2011 *J. Commun.* **32** 60 (in Chinese) [王尔馥, 王冬青, 丁群 2011 通信学报 **32** 60]

[6] Li H T, Zhu S L, Qi C H, Gao M X, Wang G Z 2013 *Adv. Mater. Res.* *73* **4** 3145

[7] Leung H, Huang X P 1996 *IEEE Trans. Signal Process.* **44** 2456

[8] He G T, Luo M K 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 060204

[9] Guan J, Liu N B, Huang Y, He Y 2012 *IET Radar Sonar Nav.* **6** 293

[10] Li H C, Zhang J S 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2776

[11] Xu Y C, Qu X D, Li Z X 2015 *Chin. Phys. B* **24** 034301

[12] Huang X G, Xu J X 2001 *Int. J. Bifurcation Chaos* **11** 561

[13] Wang G G, Wang S X 2006 *J. Jilin Univ. (Sci. Ed.)* **44** 439 (in Chinese) [王国光, 王树勋 2006 吉林大学学报(理学版) **44** 439]

[14] Wang X L, Wang B, Wang W B, Y M, Wang Z, Chang Y C 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 100201 (in Chinese) [汪祥莉, 王斌, 王文波, 喻敏, 王震, 常毓禅 2015 物理学报 **64** 100201]

[15] Huang N E, Shen Z, Long S R 1998 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **454** 903

[16] Daubechies I, Lu J F, Wu H T 2011 *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **2** 243

[17] Gaurav T, Eugene B, Neven S F, Wu H T 2012 *Sign. Process.* **93** 1079

[18] Sylvain M, Thomas O, Stephen M 2012 *IEEE Trans. Signal. Process.* **60** 5787

[19] Wang Z C, Ren W X, Liu J L 2013 *J. Sound Vib.* **332** 6016

Extractraction of non-stationary harmonic from chaotic background based on synchrosqueezed wavelet transform*

Wang Xiang-Li[1)†] Wang Bin[2)] Wang Wen-Bo[3)] Yu Min[3)]

1) (*Hubei Key Laboratory of Transportation Internet of Things, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China*)

2) (*School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China*)

3) (*College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China*)

(Received 26 May 2016; revised manuscript received 25 June 2016)

Abstract

The signal detection in chaotic background has gradually become one of the research focuses in recent years. Previous research showed that the measured signals were often unavoidable to be contaminated by the chaotic noise, such as the radar signal detection from sea clutter wave, signal source extraction from chaotic secure communication and ECG/EEG abnormal signal detection, etc. At present, there are two methods to detect the target signal from the chaotic background. One is to detect the target signals by using the difference in geometric structure between the chaotic signal and the target signal, and the other is to regard the chaotic signal as the noise, and the target signal is extracted from the chaotic background by the time frequency analysis method, such as wavelet transform and empirical mode decomposition. The first kind of method can detect the target signal well, but it needs to characterize the chaotic system and reconstruct the phase space, which is difficult in the practical applications. The second kind of method does not need to reconstruct the chaotic phase space and can effectively extract the target signal from the chaotic background. However, the wavelet transform lacks adaption and how to select the optimal wavelet basis and decomposition layers is a difficult problem. In the empirical mode decomposition there exists the mode mixing that is very sensitive to the noise. The synchrosqueezed wavelet transform (SST) effectively improves the mixing of mode by compressing the continuous wavelet coefficients in the frequency direction, but also it has good robustness to noise. Therefore, the SST can extract the harmonic signal well from the chaotic background. In the present algorithm of abstracting harmonic signal from chaotic background by SST, the harmonic signals are extracted by using single accumulation frequency range SST (SAFR-SST) based on wavelet ridge detection. If the target signal is stable harmonic signal, whose frequency does not change with time, the SAFR-SST method can have a high abstraction precision. But if the target signal is the non-stable harmonic signal whose frequency changes with time, the SAFR-SST method is not enough nor can obtain high abstraction precision. In order to overcome the shortcomings of the SST in extracting the non-stationary harmonic signal from the chaotic background, an improved SST extracting method is proposed which is based on the adaptive optimal cumulative frequency range. Firstly, the formulas of calculating the adaptive cumulative frequency range in SST extraction are deduced according to the relationship between the wavelet coefficient of non-stationary harmonic and the interval of supporting wavelet bases. Then, the optimal values of the parameters in the adaptive cumulative frequency range formula are calculated by the minimum energy error criterion according to the integrity and orthogonality of the intrinsic mode types function.

* Project supported by the National Natural Science Fund of China (Grant No. 61473213), the Natural Science Foundation of Hubei Province, China (Grant Nos. 2015CFB424, 2015CFB602), and the Hubei Key Laboratory of Transportation Internet of Things Foundation, China (Grant No. 2015III015-B02).

† Corresponding author. E-mail: wwb0178@163.com

Finally, the SST adaptive extraction of the non-stationary harmonic signal is realized according to the SST inverse transform. In experiment, the different types of non-stationary harmonics are extracted from the Lorenz and Duffing chaotic background. The experimental results show that the proposed method can effectively extract the non-stationary harmonic from the noisy chaotic background. Compared with the classical SST method with single cumulative frequency range, the proposed method has good performance in both mean square error and correlation coefficient. And when the chaotic background contains different-intenity Gauss white noises, the proposed method can also effectively abstract the non-stationary harmonic from the chaos and noise interference. So, the proposed method has a good practice value.

Keywords: synchrosqueezed wavelet transform, non-stationary harmonic, extraction of harmonic, chaos

PACS: 02.30.Nw, 31.70.Hq **DOI:** 10.7498/aps.65.200202