各向异性海森伯自旋链中的高阶孤子

谢元栋

Higher-order solitons in an anisotropic Heisenberg spin chain

Xie Yuan-Dong

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 207501 (2016)   DOI: 10.7498/aps.65.207501
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.207501
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I20

各向异性海森伯自旋链中的高阶孤子*

谢元栋[1)2)†]

1) (华南师范大学物理与电信工程学院, 广州 510006)

2) (华南师范大学物理与电信工程学院, 广东省量子工程与量子材料重点实验室, 广州 510006)

(2016 年 5 月 22 日收到; 2016 年 7 月 5 日收到修改稿)

在 Holstain-Primakoff 表象中研究了各向异性海森伯自旋链模型. 在半经典近似条件下, 应用相干态求出了明孤子和暗孤子的精确解析解. 结果表明: 这些解可以用第一类和第三类椭圆积分来表示. 内容丰富的暗孤子解是本论文的创新之处.

关键词: 各向异性铁磁自旋链, 明孤子, 暗孤子

PACS: 75.10.Hk, 75.10.Jm, 05.45.Yv **DOI:** 10.7498/aps.65.207501

1 引 言

用孤波或孤子理论来研究有相互作用的各类海森伯自旋链模型已经有很长一段时间了. 各向异性海森伯自旋铁磁链模型的低阶孤子在各类文献中研究得很透彻[1−10]. 这些工作都基于经典或半经典近似理论. 人们发现, 自旋为1/2的低阶一维带交换相互作用的自旋铁磁链中存在明孤子解, 这些解可以用解析式来表示. 但在自旋大于1/2的系统中, 求精确解析解却很困难. 尽管如此, 人们还是可以在 Holstein-Primakoff (H-P) 表象中, 应用半经典近似, 得到孤子演化的动力学方程. 这些方程一般是非线性薛定谔方程的各种改进形式, 在一定的参数范围内有精确解析解, 且其解是孤子或者是在微扰作用下而振荡的孤子. 一般文献中较少在展开式中考虑高阶项 (六阶以上) 的孤子解. 在考虑高阶非线性情况下, 动力学方程变得复杂. 所幸的是, 在一定的参数区间仍然可以有精确解析解, 但这些解只能用椭圆积分来表示.

本文在 H-P 表象中研究各向异性海森伯自旋链模型. 即在考虑各向异性情况下, 应用半经典近似和相干态理论, 求出了明孤子和暗孤子的精确解析解. 这些解可以用第一类和第三类椭圆积分来表示.

2 模型和运动方程

考虑各向异性海森伯自旋链模型的哈密顿量取下列形式[11]:

$$H = -J\sum_l (S_l^+S_{l+1}^- + S_l^-S_{l+1}^+) - J\tau\sum_l S_l^zS_{l+1}^z - \mu h\sum_l S_l^z, \tag{1}$$

其中 S_l^z 表示第 l 个离子的自旋, J 是交换相互作用, τ 是很小的正的各向异性参数, μ 是偶极矩大小, h 是外磁场的磁感强度. $S_l^\pm = S_l^x \pm \mathrm{i}S_l^y$, $\boldsymbol{S}_l = \boldsymbol{S}_l/\hbar$ 和 $\boldsymbol{S}_l = (S_l^x, S_l^y, S_l^z)$, 这里 $\hbar$ 是普朗克常数. $S_l^\pm$ 和 S_l^z 满足下列对易关系:

$$[S_l^\pm, S_l'^\pm] = 2S_l^z\delta_{ll'},$$
$$[S_l^\pm, S_l'^z] = \pm S_l^\pm\delta_{ll'}. \tag{2}$$

由 H-P 变换[12] 取到 a_l 和 a_l^+ 的第四阶, 有

$$S_l^+ = (\sqrt{2S - a_l^+a_l})a_l \approx \sqrt{2S}(1 - a_l^+a_l/4S)a_l, \tag{3a}$$

---

* 国家自然科学基金 (批准号: 11274124) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xieyd@scnu.edu.cn

$$
\begin{aligned}
S_l^- &= a_l^+\left(\sqrt{2S - a_l^+ a_l}\right) \\
&\approx \sqrt{2S} a_l^+ (1 - a_l^+ a_l/4S),
\end{aligned}
\tag{3b}
$$

$$
S_l^z = S - a_l^+ a_l, \tag{3c}
$$

这里 S 是自旋角动量的大小, 是无量纲的纯数. 这样, 体系哈密顿量变成

$$
\begin{aligned}
H = &- (\mu h S + J\tau S^2) N + (\mu h + J\tau S) \sum_l a_l^+ a_l \\
&+ (J\tau S) \sum_l a_{l+1}^+ a_{l+1} \\
&- (2JS) \sum_l (a_l a_{l+1}^+ + a_l^+ a_{l+1}) \\
&+ \frac{J}{2} \sum_l (a_l^+ a_l a_l a_{l+1}^+ + a_l^+ a_l^+ a_l a_{l+1} \\
&+ a_l a_{l+1}^+ a_{l+1}^+ a_{l+1} + a_l^+ a_{l+1}^+ a_{l+1} a_{l+1}) \\
&- J\tau \sum_l a_l^+ a_l a_{l+1}^+ a_{l+1} \\
&- \frac{J}{8S} \sum_l (a_l^+ a_l a_l a_{l+1}^+ a_{l+1}^+ a_{l+1} \\
&+ a_l^+ a_l^+ a_l a_{l+1}^+ a_{l+1} a_{l+1}),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中 N 是总的离子数. 玻色算符 a_l 和 a_l^+ 满足对易关系

$$
[a_l, a_{l'}^{\prime +}] = \delta_{ll'}, \quad [a_l, a_l'] = [a_l^+, a_l'^+] = 0. \tag{5}
$$

在 H-P 表象中, 运动方程为 $\mathrm{i}\hbar \dfrac{\partial a_l}{\partial t} = [a_l, H]$, 由 (4) 式得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\hbar \frac{\partial a_l}{\partial t} \\
&= (\mu h + J\tau S) a_l - (2JS)(a_{l+1} + a_{l-1}) \\
&\quad + \frac{J}{2}[a_l a_l (a_{l+1}^+ + a_{l-1}^+) + 2a_l^+ a_l (a_{l+1} + a_{l-1}) \\
&\quad + (a_{l+1}^+ a_{l+1} a_{l+1} + a_{l-1}^+ a_{l-1} a_{l-1})] \\
&\quad - J\tau [a_l (a_{l+1}^+ a_{l+1} + a_{l-1}^+ a_{l-1})] \\
&\quad - \frac{J}{8S}[a_l a_l (a_{l+1}^+ a_{l+1}^+ a_{l+1} + a_{l-1}^+ a_{l-1}^+ a_{l-1}) \\
&\quad + 2a_l^+ a_l (a_{l+1}^+ a_{l+1} a_{l+1} + a_{l-1}^+ a_{l-1} a_{l-1})].
\end{aligned}
\tag{6}
$$

应用相干态 $|u\rangle = \prod_l |u_l\rangle$ [13], 满足关系式 $a_l |u_l\rangle = u_l |u_l\rangle$, 其中 u_l 是铁磁链中第 l 个格点玻色子的概率幅. 这样, 得到有关 $|u_l\rangle$ 的方程:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\hbar \frac{\partial u_l}{\partial t} \\
&= (\mu h + J\tau S) u_l - (2JS)(u_{l+1} + u_{l-1}) \\
&\quad + \frac{J}{2}[u_l u_l (u_{l+1}^+ + u_{l-1}^+) + 2u_l^+ u_l (u_{l+1} + u_{l-1}) \\
&\quad + (u_{l+1}^+ u_{l+1} u_{l+1} + u_{l-1}^+ u_{l-1} u_{l-1})] \\
&\quad - J\tau [u_l (u_{l+1}^+ u_{l+1} + u_{l-1}^+ u_{l-1})] \\
&\quad - \frac{J}{8S}[u_l u_l (u_{l+1}^+ u_{l+1}^+ u_{l+1} + u_{l-1}^+ u_{l-1}^+ u_{l-1}) \\
&\quad + 2u_l^+ u_l (u_{l+1}^+ u_{l+1} u_{l+1} + u_{l-1}^+ u_{l-1} u_{l-1})],
\end{aligned}
\tag{7}
$$

应用连续极限

$$
\begin{aligned}
&u_l = u(x, t), \\
&u_{l\pm 1} = u(x, t) \pm b \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots, \\
&|u_{l\pm 1}|^2 = |u(x, t)|^2 \pm b \frac{\partial |u|^2}{\partial x} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 |u|^2}{\partial x^2} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中 b 是格点常数. 方程 (7) 可以写成

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\hbar \frac{\partial u}{\partial t} \\
&= (\mu h + 2J\tau S) u - 2J\tau |u|^2 u - (JSb^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
&\quad - \left(J + 2J\tau + \frac{J}{8S}\right) b^2 \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 u \\
&\quad - \left(\frac{J + J\tau}{2} + \frac{J}{16S}\right) b^2 \left[u^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}\right) - u^* \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] \\
&\quad - J\tau b^2 \left[|u|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^* \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] \\
&\quad - \frac{J}{16S} b^2 \left[2|u|^4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2|u|^2 u^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + u^3 \left(\frac{\partial u^*}{\partial z}\right)^2 + 6|u|^2 u \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 + |u|^2 u^* \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

通过变换 $t \to \dfrac{JS}{\hbar} t$ 和 $z \to \dfrac{z}{b}$ 引进无量纲时间和坐标, 再通过变换 $u \to u \exp\left(-\mathrm{i}\dfrac{\mu h + 2J\tau S}{JS} t\right)$ 消去 $\dfrac{\mu h + 2J\tau S}{JS} u$ 这一项. 方程 (9) 可写成

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} = &- \frac{2\tau}{S} u |u|^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
&- \left(\frac{1 + 2\tau}{S} + \frac{1}{8S^2}\right) u \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 \\
&- \left(\frac{1 + \tau}{2S} + \frac{1}{16S^2}\right) \\
&\times \left[u^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}\right) - u^* \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] \\
&- \frac{\tau}{S}\left[|u|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^* \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] \\
&- \frac{1}{16S^2}\left[2|u|^4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2|u|^2 u^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}\right) \right. \\
&+ u^3 \left(\frac{\partial u^*}{\partial z}\right)^2 + 6|u|^2 u \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2
\end{aligned}
$$

$$+|u|^2 u^*\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\Bigg], \tag{10}$$

这就是有关概率幅的动力学方程.

3 明孤子解和暗孤子解

寻找方程(10)下列形式的解[11]:

$$u(x,t)=\varphi(\eta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\phi(\eta)+\omega t]}, \tag{11}$$

这里ϕ是$\eta=z-vt$的实函数. 把(11)式代入(10)式, 在各向异性系数很小的情况下, 即$\tau\ll 1$时, 可以得到下列两个方程:

$$\begin{aligned}-v\varphi' ={}& -(2\varphi'\phi'+\varphi\phi'')+\left(\frac{1-\tau}{2S}+\frac{1}{16S^2}\right)\\&\times(4\varphi^2\varphi'\phi'+\varphi^3\phi''),\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\left[1+\left(\frac{1+3\tau}{2S}+\frac{1}{16S^2}\right)\varphi^2-\frac{1}{4S^2}\varphi^4\right]\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\eta^2}\\&+\left[\left(\frac{1+5\tau}{2S}+\frac{1}{16S^2}\right)\varphi-\frac{1}{2S^2}\varphi^3\right]\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}\right)^2\\&-\left[\varphi-\left(\frac{1}{S}+\frac{1}{8S^2}\right)\varphi^3\right]\phi'^2+\frac{2\tau}{S}\varphi^3\\&+v\varphi\phi'-\omega\varphi=0.\end{aligned} \tag{13}$$

方程(12)可积, 其解为

$$\phi'=\frac{v}{2}\Big(\frac{1}{1-\varepsilon\varphi^2}\Big), \tag{14}$$

其中$\varepsilon=\dfrac{1-\tau}{2S}+\dfrac{1}{16S^2}$, 且$|\varepsilon|<1$, 是个正的小量. 故可以简化为

$$\phi'\approx\frac{v}{2}(1+\varepsilon\varphi^2). \tag{15}$$

把(15)式代入(13)式, 忽略φ^6以上的小量, 而且$\varphi^4\ll\varphi^2$, 故在φ''和φ'^2的系数中忽略φ^4以上的项. 整理得

$$\begin{aligned}&(1+\gamma\varphi^2)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\eta^2}+\gamma\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}\right)^2\\&-3\mu\varphi^5+2\nu\varphi^3+\delta\varphi=0,\end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma&=\lim_{\tau\to0}\left(\frac{1+3\tau}{2S}+\frac{1}{16S^2}\right)\\&=\lim_{\tau\to0}\left(\frac{1+5\tau}{2S}+\frac{1}{16S^2}\right)\\&=\frac{1+8S}{16S^2}>0,\end{aligned} \tag{17a}$$

$$\mu=\frac{v^2\varepsilon^2}{12}>0,\quad \nu=\frac{\tau}{S}>0,$$

$$\delta=\frac{v^2}{4}-\omega. \tag{17b}$$

可见, 精确解析解是各向异性参数趋于零时的极限, 由于γ很小, 对以下的解影响甚微. 各向异性参数τ对ν有影响, 从而对方程(16)的解产生影响. 对方程(16)两边积分一次, 得[14–18]

$$(1+\gamma\varphi^2)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}\right)^2=\mu\varphi^6-\nu\varphi^4-\delta\varphi^2+C. \tag{18}$$

以下的解基于方程(18). 这是个改进形式的高阶非线性薛定谔方程.

3.1 明孤子解

方程(18)的明孤子解满足下列条件:

当$\eta\to\pm\infty$时, $\varphi\to0$, $\varphi'\to0$, 故积分常数$C=0$. 令$y=\varphi^2\Rightarrow y'^2=4y\varphi'^2$, 则方程(18)变成

$$(1+\gamma y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\eta}\right)^2=4\mu y^2\left(y^2-\frac{\nu}{\mu}y-\frac{\delta}{\mu}\right). \tag{19}$$

当$\nu^2+4\mu\delta>0$时, 取$y_a=\nu+\sqrt{\nu^2+4\mu\delta}$, $a=\nu-\sqrt{\nu^2+4\mu\delta}$和$b=-1/\gamma<0$, 则方程(19)可写成

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\eta}\right)^2=-\frac{4\mu}{\gamma}y^2\frac{(y_a-y)(y-a)}{y-b}. \tag{20}$$

方程(20)只有在参数满足条件$\mu>0$, $\delta<0$, $\gamma>0$, $y_a>a>y>0>b$时才有解, 这个解是

$$\begin{aligned}&\frac{b-1}{y_a\sqrt{y_a-b}}F(\lambda_1,m_1)\\&+\frac{b(y_a-a)}{y_a a\sqrt{y_a-b}}\varPi(\lambda_1,m_1,q_1)\\&=\pm\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}(\eta-\eta_0),\end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$\lambda_1=\sin^{-1}\sqrt{\frac{(y_a-b)(a-y)}{(a-b)(y_a-y)}},$$

$$m_1=\sqrt{\frac{a-b}{y_a-b}},\quad q_1=\frac{y_a(a-b)}{a(y_a-b)}, \tag{22}$$

$F(\lambda,m)$和$\varPi(\lambda,m,q)$分别是第一和第三类椭圆积分. 孤子峰值为$y_m=a$. 在参数区间$\mu>0,\delta<0,\gamma>0,y_a>a>0>b$内, 应用概率幅归一化条件$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,t)|^2\,\mathrm{d}x=1$, 考虑到$a>y>0$, 得

$$\begin{aligned}&\frac{b-y_a}{\sqrt{y_a-b}})F(\lambda_{10},m_1)\\&+\frac{(y_a-a)}{\sqrt{y_a-b}}\varPi(\lambda_{10},m_1,q_1)=\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}},\end{aligned} \tag{23}$$

其中

$$\lambda_{10}=\sin^{-1}\sqrt{\frac{(y_a-b)a}{(a-b)y_a}},\quad q_1=\frac{y_a(a-b)}{a(y_a-b)},$$
$$m_1=\sqrt{\frac{a-b}{y_a-b}}. \tag{24}$$

从 (23) 式中可以求得孤子能量.

3.2 暗孤子解

对于暗孤子, 方程 (18) 应满足下列边界条件: 当 $\eta\to\pm\infty$ 时, $\varphi'\to 0$, $\varphi\to\varphi_{\rm b}$, $\varphi_{\rm b}$ 相当于背景幅值. 积分常数 $C=-\mu\varphi_{\rm b}^6+\nu\varphi_{\rm b}^4+\lambda\varphi_{\rm b}^2$. 设 $y=\varphi^2$, $y_{\rm b}=\varphi_{\rm b}^2$, 考虑到 $\varphi_{\rm b}^2$ 是背景强度, 可以取

$$y_{\rm b}=\frac{\nu+\sqrt{\nu^2+3\mu\delta}}{3\mu},$$
$$a=\frac{\nu-2\sqrt{\nu^2+3\mu\delta}}{3\mu},$$
$$b=-\frac{1}{\gamma}<0, \tag{25}$$

这样, 可以保证 $y_{\rm b}>a$. 方程 (18) 化作

$$y'^2=\frac{4\mu}{\gamma}y(y_{\rm b}-y)^2\frac{y-a}{y-b}. \tag{26}$$

方程 (26) 在不同参数区间有解. 具体有以下五种暗孤子.

3.2.1 第一类暗孤子

当 $\mu>0,\delta>0,\gamma>0,y_{\rm b}>y>0>a>b$ 时

$$\varPi(\lambda_2,m_2,q_2)=\pm|b|^{3/2}\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}(\eta-\eta_0), \tag{27}$$

其中 $\lambda_2=\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{b-y}}\right)$, $m_2^2=\frac{b-a}{b}$, $q_2=(y_{\rm b}-b)/b$. 暗孤子峰最小值为 $y_m=0$, 是黑孤子. 应用概率幅归一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,t)|^2\,{\rm d}x=1$ 得

$$\varPi(\lambda_{2y_{\rm b}},m_2,q_2)-\varPi\left(\frac{\pi}{2},m_2,q_2\right)=\frac{\sqrt{\mu}}{\gamma^2}, \tag{28}$$

其中 $\lambda_{2y_{\rm b}}=\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{b-y_{\rm b}}}\right)$. 利用 (28) 式可求孤子能量.

3.2.2 第二类暗孤子

当 $\mu>0$, $\delta>0$, $\gamma>0$, $y_{\rm b}>y>0>b>a$ 时, 暗孤子解为

$$\frac{a-b}{(y_a-a)\sqrt{|b|}}F(\lambda_2,m_2)+\frac{1}{b\sqrt{|b|}}\varPi(\lambda_2,m_2,q_2)$$
$$=\pm\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}(\eta-\eta_0), \tag{29}$$

其中 $\lambda_2=\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{b-y}}\right)$, $m_2^2=\frac{b-a}{b}$, $q_2=\frac{y_{\rm b}-b}{b}$. 暗孤子峰最小值为 $y_m=0$, 也是黑孤子. 应用概率幅归一化条件得

$$\frac{a-b}{(y_a-a)\sqrt{|b|}}[F(\lambda_{2y_{\rm b}},m_2)-K(m_2)]$$
$$+\frac{1}{b\sqrt{|b|}}[\varPi(\lambda_{2y_{\rm b}},m_2,q_2)-\varPi(\frac{\pi}{2},m_2,q_2)]$$
$$=\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}, \tag{30}$$

其中 $\lambda_{2y_{\rm b}}=\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{b-y_{\rm b}}}\right)$, $K(m_2)$ 是第一类完全椭圆积分. 利用 (30) 式亦可求孤子能量.

3.2.3 第三类暗孤子

当 $\mu>0$, $\delta<0$, $\gamma>0$, $\nu^2>-3\mu\delta$, $y_{\rm b}>y>a>0>b$ 时, 其解表示为

$$\frac{2y_{\rm b}}{(y_{\rm b}+b)\sqrt{a-b}}F(\lambda_3,m_3)$$
$$+\frac{y_{\rm b}-b}{(y_{\rm b}+b)\sqrt{a-b}}\varPi(\lambda_3,m_3,q_3)$$
$$=\pm\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}(\eta-\eta_0), \tag{31}$$

其中 $\lambda_3=\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{y-b}}\right)$, $m_3^2=\frac{b}{b-a}$, $q_3=\frac{y_{\rm b}+b}{a-b}$. 暗孤子峰最小值为 $y_m=a$. 因为 $a>0$, 所以是灰孤子. 应用概率幅归一化条件可得

$$\frac{2y_{\rm b}}{(y_{\rm b}+b)\sqrt{a-b}}[F(\lambda_{3y_{\rm b}},m_3)-K(m_3)]$$
$$+\frac{y_{\rm b}-b}{(y_{\rm b}+b)\sqrt{a-b}}\Big[\varPi(\lambda_{3y_{\rm b}},m_3,q_3)$$
$$-\varPi\left(\frac{\pi}{2},m_3,q_3\right)\Big]=\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}, \tag{32}$$

其中 $\lambda_{3y_{\rm b}}=\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{y_{\rm b}-b}}\right)$, $K(m_3)$ 是第一类完全椭圆积分. 利用 (32) 式亦可求孤子能量.

3.2.4 第四类暗孤子

当 $\mu>0$, $\delta<0$, $\gamma>0$, $\nu^2>-3\mu\delta$, $y_{\rm b}>a>y>0>b$ 时, 结果与上面情况相同, 只要把 y 限定在 $a>y>0$ 范围内即可. 但暗孤子峰最小值为 $y_m=0$. 表明不能取到最大值 $y_{\rm b}$. 应用概率幅归一化条件得

$$\frac{2y_{\rm b}}{(y_{\rm b}+b)\sqrt{a-b}}[K(m_3)-F(\lambda_{30},m_3)]$$

$$+\frac{y_b-b}{(y_b+b)\sqrt{a-b}}\Big[\Pi(\frac{\pi}{2},m_3,q_3)$$
$$-\Pi(\lambda_{30},m_3,q_3)\Big]=\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}, \tag{33}$$

其中 $\lambda_{30}=\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\right)$.

3.2.5 第五类暗孤子

特殊情况, 当 $a=b$, 即 $2\gamma\sqrt{\nu^2+3\mu\delta}=3\mu+\nu\gamma$ 时, 方程 (26) 变成

$$y'^2=\frac{4\mu}{\gamma}y(y_b-y)^2, \tag{34}$$

(34) 式有解析解

$$y=y_b\tanh^2\left[\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}y_b(\eta-\eta_0)\right]. \tag{35}$$

这是标准扭结孤子, 是最常见的暗孤子.

4 结　论

本文在半经典近似条件下, 应用 H-P 近似和相干态理论, 对带交换相互作用各向异性海森伯自旋铁磁链模型进行了仔细研究. 求出了用第一类和第三类椭圆积分表示的精确明孤子和暗孤子的解析解. 根据归一化条件, 可以求出孤子的能级, 在做简化近似的情况下可以用完全椭圆积分来表示. 文献 [11] 只求得了低阶非线性作用下的明孤子. 各向异性参数 τ 影响孤子的具体表达式. 事实上, 在考虑高阶非线性相互作用时, 暗孤子解有丰富的内容. 这是本文的创新之处. 这些结果对于铁磁自旋系统有一定的参考价值.

参考文献

[1] Nakamura K, Sasada T 1974 *Phys. Lett.* **48** A321
[2] Lakshmanan M 1977 *Phys. Lett. A* **61** 53
[3] Pushkarov D I, Pushkarov K I 1977 *Phys. Lett. A* **61** 339
[4] Jauslin H R, Schneider T 1982 *Phys. Rev. B* **26** 5153
[5] Mead L R, Papanicolaoy N 1983 *Phys. Rev. B* **28** 1633
[6] Borsa F, Pini M G, Rettori A, Tognetti V 1983 *Phys. Rev. B* **28** 5173
[7] Kopinga K, Tinus A M C, De Jonge W J M 1984 *Phys. Rev. B* **29** 2868
[8] Skrinjar M J, Kapor D V, Stojanovic S D 1987 *Solid State Phys.* **12** 2243
[9] Mikeska H J, Steiner M 1991 *Adv. Phys.* **40** 191
[10] Daniel M, Kavitha L 2002 *Phys.Rev. B* **66** 184433
[11] Skrinjar M J, Kapor D V, Stojanovic S D 1987 *Solid State Phys.* **20** 2243-
[12] Holstein T, Primakoff H 1940 *Phys. Rev.* **58** 1098
[13] Glauber R J 1963 *Phys.Rev.* **131** 2766
[14] Tsoy E N 2010 *Phys.Rev. A* **82** 063829
[15] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Soliton, Nonlinear Evolution Equations Scattering* (New York: Cambridge University Press) pp98–172
[16] Xie Y D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210305 (in Chinese) [谢元栋 2012 物理学报 **61** 210305]
[17] Greenhill A G 1959 *The Applications of Elliptic Functions* (New York: Dover Pub.) pp10–34
[18] Byrd P F, Friedman M D 1954 *Handbook of Elliptic Intergrals for Engineers and Physicists* (Berlin: Springer Verlag) pp904–910

Higher-order solitons in an anisotropic Heisenberg spin chain*

Xie Yuan-Dong[1)2)†]

1) (*School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

2) (*Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials, School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

(Received 22 May 2016; revised manuscript received 5 July 2016)

Abstract

An anisotropic Heisenberg ferromagnetic spin chain model is studied by using Holstain-Primakoff representation. In the semiclassical limit, the exact solutions for bright and dark solitons are found by using the coherent-state method combined with the Holstein-Primakoff bosonic representation of spin operators. These results show that the solutions can be expressed in terms of the elliptic integrals in different parameter regions. Some solutions for dark solitons are the innovation points in this paper.

Keywords: anisotropic ferromagnetic spin chain, bright soliton, dark soliton

PACS: 75.10.Hk, 75.10.Jm, 05.45.Yv **DOI:** 10.7498/aps.65.207501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11274124).

† Corresponding author. E-mail: xieyd@scnu.edu.cn