

随机参激下 Duffing-Rayleigh 碰撞振动系统的 P-分岔分析

徐伟 杨贵东 岳晓乐

P-bifurcations of a Duffing-Rayleigh vibroimpact system under stochastic parametric excitation

Xu Wei Yang Gui-Dong Yue Xiao-Le

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 210501 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.210501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.210501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I21>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

具有非线性阻尼涨落的线性谐振子的随机共振

Stochastic resonance of a linear harmonic oscillator with non-linear damping fluctuation

物理学报.2016, 65(6): 060501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.060501>

二值噪声激励下欠阻尼周期势系统的随机共振

Stochastic resonance in periodic potential driven by dichotomous noise

物理学报.2015, 64(24): 240502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.240502>

Levy 噪声激励下的幂函数型单稳随机共振特性分析

Characteristic analysis of power function type monostable stochastic resonance with Levy noise

物理学报.2015, 64(22): 220502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.220502>

带碰撞双稳态压电俘能系统的俘能特性研究

Vibration energy harvesting from a piezoelectric bistable system with two symmetric stops

物理学报.2015, 64(21): 210501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210501>

二维耦合定向输运模型研究

A two-dimensional coupled directed transport model

物理学报.2015, 64(15): 150501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.150501>

随机参激下 Duffing-Rayleigh 碰撞振动系统的 P-分岔分析*

徐伟[†] 杨贵东 岳晓乐

(西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710129)

(2016年6月3日收到; 2016年7月25日收到修改稿)

基于等效非线性系统方法和突变理论, 分析了随机参激下 Duffing-Rayleigh 碰撞振动系统的 P-分岔. 首先, 借助非光滑变换和狄拉克函数将原碰撞振动系统转化为一个不含速度跳的新系统; 接着, 利用等效非线性系统方法得到了系统的稳态概率密度函数; 然后, 应用突变理论, 得到了随机 P-分岔发生的临界参数条件的解析表达式. 最后, 通过典型概率密度函数曲线和图像验证了结果的正确性.

关键词: 碰撞振动系统, P-分岔, 随机参激

PACS: 05.40.-a, 05.40.Ca, 05.10.Gg

DOI: 10.7498/aps.65.210501

1 引言

随机分岔是一种不同于确定性动力系统中的分岔和混沌的复杂的非线性现象, 它表征了噪声导致的系统定性性质的变化, 对深入研究动力系统的随机控制具有重要的意义, 近些年来受到了国内外学者的广泛关注^[1-6]. 其类型主要有两种: D-分岔和 P-分岔. D-分岔研究是从一族参考测度中分岔出新的不变测度, 可用 Lyapunov 指数的正负号变化来判别; P-分岔则研究系统的不变测度的密度(平稳概率密度)的形状(峰的位置、形状及个数)随参数的变化, 可通过对平稳概率密度求极值进行研究. 一般来说, 二者没有直接联系. 即 D-分岔并不意味着 P-分岔, 反之亦然.

关于光滑系统的随机 P-分岔已有较多研究. 陈林聪和朱位秋^[7]在研究谐和与宽带噪声激励下含分数阶导数型阻尼的 Duffing 振子的平稳响应时, 发现分数阶数的变化可以导致随机 P-分岔的产生; 戎海武等^[8,9]研究了多个稳定周期解共存系统的双峰稳态概率密度; 文献^[10, 11]讨论了双稳态的

Duffing-van der Pol 系统幅值稳态概率密度的随机 P-分岔, 郝颖和吴志强^[12-14]从奇异性理论方面分析了随机激励下三稳态的 van der Pol-Duffing 系统的随机 P-分岔现象, 发现响应的概率密度呈多峰形状.

在物理学与工程学领域, 许多非光滑因素不可避免地存在并影响着动力系统的稳定性和可靠性, 如间隙、脉冲、干摩擦等. 碰撞振动系统就是一种典型的非光滑系统, 由于其状态空间不连续, 使得很多适用于光滑系统的解析方法不再适用^[15], 对其随机 P-分岔的研究较少. 一些专家学者在研究碰撞振动系统的稳态响应时, 发现碰撞的恢复系数及线性阻尼系数的变化可以导致随机 P-分岔的产生^[16-20], 但没有得到发生随机 P-分岔的临界条件的解析表达式.

本文主要研究随机参激下 Duffing-Rayleigh 碰撞振动系统的 P-分岔, 首先利用非光滑变换及等效非线性系统方法得到系统的平稳响应, 然后应用突变理论得到系统发生随机 P-分岔的临界条件的解析表达式, 进而分析了随机参激强度的变化对碰撞

* 国家自然科学基金(批准号: 11472212, 11532011, 11302170)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

振动系统稳态概率密度P-分岔的影响.

2 碰撞振动系统模型及简化

考虑一个随机参激下的Duffing-Rayleigh碰撞振动系统,其运动方程如下:

$$\ddot{x} - \alpha(1 - \dot{x}^2)\dot{x} - \dot{x}\xi(t) + x^3 = 0, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$\dot{x}_+ = -r\dot{x}_-, \quad x = 0, \quad (2)$$

其中, α 为阻尼系数; $\xi(t)$ 是强度为 $2D$ 的高斯白噪声; $x = 0$ 为碰撞振动系统刚性约束面的位置,即在 $x = 0$ 处振子与约束面发生碰撞; \dot{x}_+ 和 \dot{x}_- 分别表示振子在发生碰撞后与发生碰撞前的瞬时速度; r 为恢复系数,用以表征碰撞前后系统的能量损失.由方程(1)和(2)可知,系统的运动速度在碰撞前后有一个跳跃,因此,这是一个非光滑的动力系统.由于运动状态的不连续,直接对其处理非常困难.这里,引入非光滑的坐标变换^[21]

$$\begin{aligned} x &= x_1 = |y|, \\ \dot{x} &= x_2 = \dot{y} \operatorname{sgn} y, \\ \ddot{x} &= \ddot{y} \operatorname{sgn} y, \end{aligned} \quad (3)$$

代入到方程(1)和方程(2)中,得

$$\ddot{y} - \alpha(1 - \dot{y}^2)\dot{y} - \dot{y}\xi(t) + y^3 = 0, \quad t \neq t_*, \quad (4)$$

$$\dot{y}_+ = r\dot{y}_-, \quad t = t_*, \quad (5)$$

式中, t_* 表示碰撞发生的时刻.与原方程比较可知,经过非光滑的坐标变换,系统的状态空间由原来的 $\Sigma = \{(x, \dot{x}) : x \geq 0, \dot{x} \in R\}$ 变为 $\tilde{\Sigma} = \{(y, \dot{y}) : y \in R, \dot{y} \in R\}$.利用狄拉克函数,可以将方程(5)看作在 $t = t_*$ 时刻对方程(4)施加了一个脉冲项,根据狄拉克函数的性质得到脉冲项为 $(1 - r)\dot{y}|\dot{y}|\delta(y)$,这样方程(4)和方程(5)就可以合并为一个新的近似等价系统

$$\begin{aligned} \ddot{y} - \alpha(1 - \dot{y}^2)\dot{y} - (r - 1)\dot{y}|\dot{y}|\delta(y) + y^3 \\ = \dot{y}\xi(t). \end{aligned} \quad (6)$$

可以看到合并后的近似等价系统不再包含速度跳,从而可以用一些光滑系统中适用的解析方法进行研究.

3 稳态概率密度求解

由方程(6)表示的系统是一个强非线性的系统,通常很难得到精确解,我们引入如下具有精确

平稳解的能量依赖系统:

$$\ddot{y} + C(E)\dot{y} + y^3 = h(E)\xi(t), \quad (7)$$

其中, $C(E)$ 和 $h(E)$ 是关于能量 E 的任意函数.

根据文献[22],该能量依赖系统的精确稳态概率密度为

$$\begin{aligned} p(y, \dot{y}) \\ = Nh^{-1}(E) \exp \left[-2 \int_0^E \frac{C(u)}{h^2(u)} du \right] \Big|_{E=\frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{y^4}{4}}. \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$r(y) = \operatorname{sgn} y \sqrt{\frac{y^4}{2}}, \quad (9)$$

并做变换

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \sqrt{2E} \sin \varphi, \quad r(y) = \sqrt{2E} \cos \varphi, \\ \varphi &\in [0, 2\pi), \end{aligned} \quad (10)$$

从而可以得到关于新变量的稳态概率密度为

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} |\cos \varphi|^{-\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

假设有一个形如方程(7)的系统可以近似代替给定的系统方程(6),这样就可以根据方程(8)近似地得到方程(6)所表示的系统的稳态解.通常适当选取 $C(E)$ 和 $h(E)$ 使得两方程之差在某种意义上最小,这里我们采用的原则是使两个系统的平均能量包线具有相同的Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK)方程.

由方程(6)可得其漂移和扩散系数分别为

$$\begin{aligned} a(y, \dot{y}) &= \alpha(1 - \dot{y}^2)\dot{y}^2 + (r - 1)\dot{y}^2|\dot{y}|\delta(y) + 2D\dot{y}^2, \\ b(y, \dot{y}) &= 2D\dot{y}^4. \end{aligned} \quad (12)$$

利用变换(10)将方程(12)转化为关于能量 E 和相位角 φ 的表达式 $a(E, \varphi)$ 和 $b(E, \varphi)$,并以 φ 的概率密度方程(11)为权进行加权平均,得到平均后能量包线的FPK方程的漂移和扩散系数:

$$\begin{aligned} \bar{a}(E) &= \int_0^{2\pi} [2\alpha(1 - 2E \sin^2 \varphi)E \sin^2 \varphi \\ &\quad + 4DE \sin^2 \varphi + \sqrt{2E}(r - 1)E \sin^2 \varphi \\ &\quad \times |\sin \varphi| \delta(\pm \sqrt{4E} |\cos \varphi|^{\frac{1}{2}})] p(\varphi) d\varphi, \\ \bar{b}(E) &= \int_0^{2\pi} 8DE^2 \sin^4 \varphi p(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

另一方面,方程(7)的能量包线FPK方程的漂移与扩散系数为

$$a(E) = -\frac{4}{3}EC(E) + \frac{2}{3}Eh(E) \frac{dh}{dE} + \frac{1}{2}h^2(E),$$

$$b(E) = \frac{4}{3}Eh^2(E). \tag{14}$$

令方程(13)和方程(14)相应的系数相等,得等价能量依赖系统的

$$h(E) = \left(\frac{24DE}{7}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$C(E) = -\alpha + \frac{1}{7}D + \frac{12}{7}\alpha E - \frac{3(r-1)E^{\frac{1}{4}}\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/4)}. \tag{15}$$

将方程(15)代入到方程(8)中,得到方程(6)的近似稳态概率密度:

$$p(y, \dot{y}) = NE^{\frac{7(\alpha-D)}{12D}} \times \exp\left[\frac{7(r-1)\Gamma(3/4)}{D\sqrt{\pi}}E^{\frac{1}{4}} - \frac{\alpha}{D}E\right] \Big|_{E=\frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{y^4}{4}}, \tag{16}$$

其中, N 为归一化常数.

利用变换 $E = \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{y^4}{4}$ 可得系统能量的稳态概率密度为

$$p(E) = \tilde{N}E^{\frac{7\alpha-10D}{12D}} \exp\left[\frac{7(r-1)\Gamma(3/4)}{D\sqrt{\pi}}E^{\frac{1}{4}} - \frac{\alpha}{D}E\right], \tag{17}$$

这里, \tilde{N} 为归一化常数.

由方程(1)和(2)所表示的原碰撞振动系统的位移 x 和速度 \dot{x} 的联合概率密度可利用非光滑变换的逆变换得到,

$$p(x, \dot{x}) = p(y, \dot{y}) \left| \frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(x, \dot{x})} \right| = 2NE^{\frac{7(\alpha-D)}{12D}} \exp\left[\frac{7(r-1)\Gamma(3/4)}{D\sqrt{\pi}}E^{\frac{1}{4}} - \frac{\alpha}{D}E\right] \Big|_{E=\frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{y^4}{4}}. \tag{18}$$

4 随机P-分岔分析

4.1 能量概率密度的P-分岔条件

随机P-分岔的分析可根据概率密度函数的极值点数目的变化来判断P-分岔的条件. 根据突变理论^[23]可知, 概率密度函数的极值点数目的变化需要满足以下两个条件:

$$\frac{\partial p(E)}{\partial E} = 0, \quad \frac{\partial^2 p(E)}{\partial E^2} = 0. \tag{19}$$

将方程(17)代入(19)式, 求解得P-分岔的临界条件表达式:

$$1024\alpha(7\alpha - 10D)^3 = 729 \left[\frac{7(r-1)\Gamma(3/4)}{D\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \right]^4. \tag{20}$$

从方程(20)可以看到, 阻尼系数 α 、恢复系数 r 和随机参激的强度 $2D$ 都对能量的稳态概率密度是否发生随机P-分岔有影响. 这里, 我们主要讨论随机参激的强度的影响.

图1给出了阻尼参数 $\alpha = 0.03$ 时, 分岔条件(20)式的图形. 可以看到临界条件曲线将 (D, r) 平面分成了两个区域, 恢复系数与随机参激的强度在同一个区域取值时, 系统能量的概率密度函数曲线的定性性质相同; 在不同的区域取值时, 定性性质不同. 为了更清晰地呈现这种现象, 图2给出了在不同区域取值时, 系统能量的典型稳态概率密度函数曲线, 其中, 圆点表示原系统的数值模拟结果, 实线表示解析结果, 可以看到, 二者吻合得很好. 图2(a)中的参数 $r = 0.95, D = 0.01$ 取自于图1中的区域2, 此时, 概率密度函数的峰值不在 $E = 0$ 处, 意味着振子以较大的概率稳定在非零的位置. 图2(b)中的参数 $r = 0.95, D = 0.02$ 取自于图1的区域1中, 此时概率密度函数的峰值出现在 $E = 0$ 的位置, 意味着振子以较大的概率稳定在碰撞振动系统的平衡位置处. 这就是说随机参激强度的变化可以改变系统的定性性质, 即导致随机P-分岔的发生.

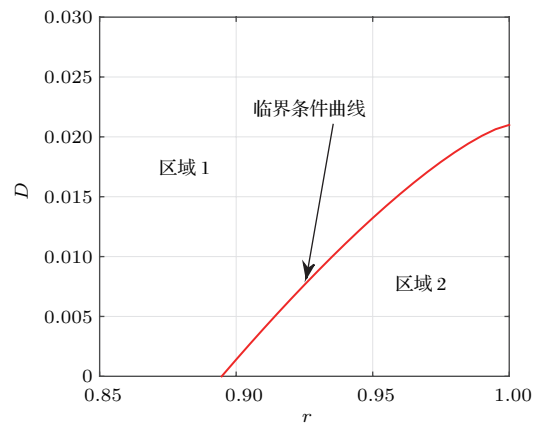


图1 系统能量的概率密度函数发生P-分岔的临界条件曲线
Fig. 1. Critical condition curve of P-bifurcation about the stationary probability density of the system's energy.

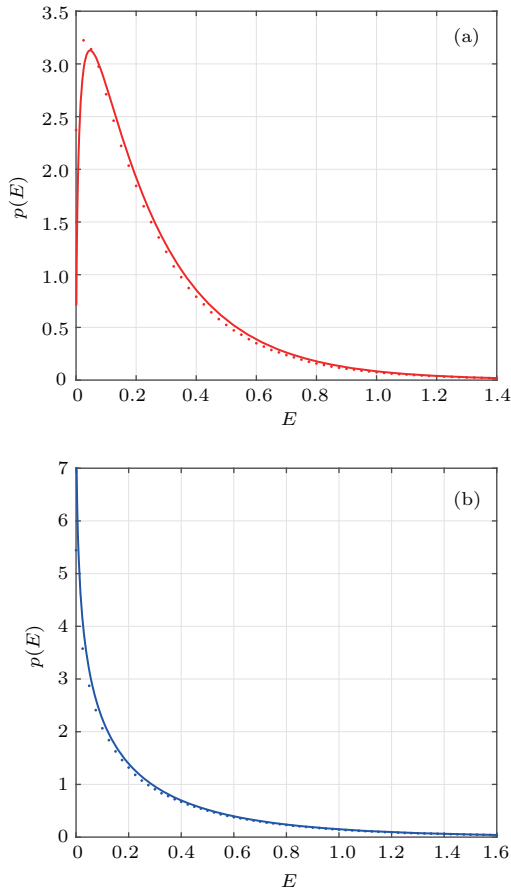


图2 典型概率密度曲线 (a) $r = 0.95, D = 0.01$; (b) $r = 0.95, D = 0.02$

Fig. 2. Typical curves of the stationary probability density: (a) $r = 0.95, D = 0.01$; (b) $r = 0.95, D = 0.02$.

4.2 位移和速度的联合概率密度的P-分岔条件

类似于能量的稳态概率密度的P-分岔条件的求解, 碰撞振动系统位移和速度的联合概率密度的极值点数目变化的条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, \dot{x})}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 p(x, \dot{x})}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial p(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial^2 p(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^2} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

将方程(18)代入到(21)式, 得

$$1024\alpha(\alpha - D)^3 = \frac{729}{\pi^2} \left[(r - 1) \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \right]^4. \quad (22)$$

这就是系统位移和速度的联合概率密度发生随机P-分岔的临界条件.

为了研究随机参激强度的改变对系统位移 x 和速度 \dot{x} 的联合概率密度的影响, 图3给出了阻尼系数 $\alpha = 0.03$ 时, 随机P-分岔的临界条件曲线. 可

以看到, 整个 (D, r) 平面被分成了两个区域, 即在临界曲线的两侧, 系统的联合概率密度的定性性质不同. 为了更清晰地呈现这种不同, 图4给出了对应于图3中临界曲线两侧区域的典型联合概率密

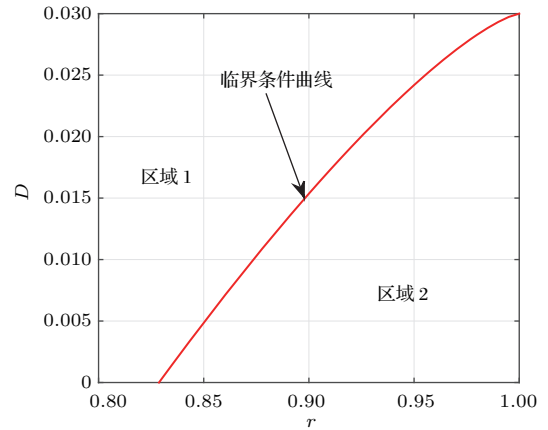


图3 系统位移和速度的联合概率密度函数发生P-分岔的临界条件曲线

Fig. 3. Critical condition curve of P-bifurcation about the joint probability density of the system's displacement and velocity.

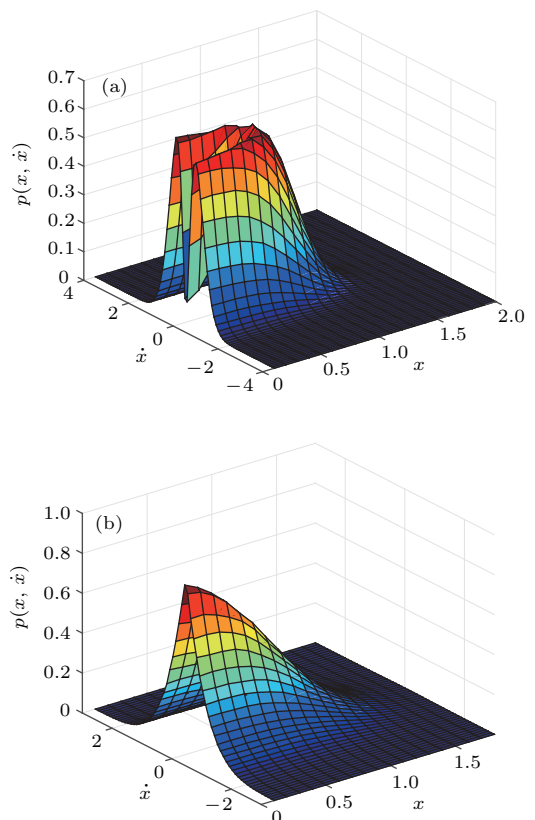


图4 (网刊彩色) 典型联合概率密度曲线 (a) $r = 0.95, D = 0.01$; (b) $r = 0.95, D = 0.025$

Fig. 4. (color online) Typical figures of the joint probability density of displacement and velocity: (a) $r = 0.95, D = 0.01$; (b) $r = 0.95, D = 0.025$.

度图像. 其中, 图 4(a) 中的参数是从区域 2 中选取的, 此时联合概率密度函数图像呈火山口形状, 图 4(b) 中的参数取自于区域 1, 此时联合概率密度函数图像仅有一个单峰, 且出现在平衡位置处. 由随机 P-分岔的定义可知, 随机参激强度的变化导致系统的联合概率密度发生了随机 P-分岔.

5 结 论

本文对高斯白噪声参激下的 Duffing-Rayleigh 碰撞振动系统的随机 P-分岔现象进行了分析. 首先, 利用非光滑坐标变换将原碰撞振动系统的相平面扩展到了整个相空间, 利用狄拉克函数将碰撞条件看作一个脉冲阻尼, 得到了一个等价的不含速度跳的新系统; 然后, 对新系统用等效非线性系统方法求得了其近似平稳解; 最后, 用突变理论得到了系统发生随机 P-分岔的临界条件的解析表达式, 同时选取典型的概率密度函数曲线和图像, 验证了所得结果的正确性. 结果表明, 随机参激强度的改变可以诱导系统稳态概率密度函数发生随机 P-分岔.

参考文献

- [1] Zhu W Q 2003 *Nonlinear Stochastic Dynamics and Control: Hamilton Theory System Frame* (Beijing: Science Press) p280 (in Chinese) [朱位秋 2003 非线性随机动力学与控制——Hamilton 理论体系框架 (北京: 科学出版社) 第 280 页]
- [2] Liu X B, Chen Q 1996 *Adv. Mech.* **26** 437 (in Chinese) [刘先斌, 陈虬 1996 力学进展 **26** 437]
- [3] Xu W, He Q, Rong H W, Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese) [徐伟, 贺群, 戎海武, 方同 2003 物理学报 **52** 1365]
- [4] Arnold L 1998 *Random Dynamical Systems* (Berlin, Berlin Heidelberg, New York: Springer) p1
- [5] Namachchivaya N S 1990 *Appl. Math. Comput.* **38** 101
- [6] Huang Z L, Zhu W Q 2002 *J. Sound. Vib.* **2** 245
- [7] Chen L C, Zhu W Q 2010 *Chin. J. Appl. Mech.* **3** 517 (in Chinese) [陈林聪, 朱位秋 2010 应用力学学报 **3** 517]
- [8] Rong H W, Wang X D, Xu W, Meng G, Fang T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2557 (in Chinese) [戎海武, 王向东, 徐伟, 孟光, 方同 2005 物理学报 **54** 2557]
- [9] Rong H W, Wang X D, Meng G, Xu W, Fang T 2006 *Chin. J. Appl. Mech.* **27** 1373 (in Chinese) [戎海武, 王向东, 孟光, 徐伟, 方同 2006 应用数学和力学 **27** 1373]
- [10] Xu Y, Gu R C, Zhang H Q, Xu W, Duan J Q 2011 *Phys. Rev. E* **83** 056215
- [11] Gu R C, Xu Y, Hao M L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060513 (in Chinese) [顾仁财, 许勇, 郝孟丽 2011 物理学报 **60** 060513]
- [12] Hao Y, Wu Z Q 2013 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **43** 257 (in Chinese) [郝颖, 吴志强 2013 力学学报 **43** 257]
- [13] Wu Z Q, Hao Y 2013 *Sci. Sin.: Phys. Mech. Astron.* **43** 524 (in Chinese) [吴志强, 郝颖 2013 中国科学: 物理学 力学 天文学 **43** 524]
- [14] Wu Z Q, Hao Y 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 060501 (in Chinese) [吴志强, 郝颖 2015 物理学报 **64** 060501]
- [15] Dimmentberg M F, Iourtchenko D V 2004 *Nonlinear Dynam.* **36** 229
- [16] Feng J Q, Xu W, Rong H W, Wang R 2009 *Int. J. Non-Linear Mech.* **44** 51
- [17] Zhao X R, Xu W, Yang Y G, Wang X Y 2015 *Commun. Nonlinear Sci.* **35** 166
- [18] Li C, Xu W, Wang L, Li D X 2013 *Chin. Phys. B* **22** 110205
- [19] Li C, Xu W, Feng J Q, Wang L 2013 *Physica A* **392** 1269
- [20] Li C, Xu W, Yue X L 2014 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **24** 1450129
- [21] Zhuravlev V F 1976 *Mech. Solids* **2** 23
- [22] Zhu W Q 1998 *Random Vibration* (Beijing: Science Press) p334 (in Chinese) [朱位秋 1998 随机振动 (北京: 科学出版社) 第 334 页]
- [23] Ling F H 1987 *Catastrophe Theory and its Applications* (Shanghai: Shang Hai Jiao Tong University Press) p4 (in Chinese) [凌复华 1987 突变理论及其应用 (上海: 上海交通大学出版社) 第 4 页]

P-bifurcations of a Duffing-Rayleigh vibroimpact system under stochastic parametric excitation*

Xu Wei[†] Yang Gui-Dong Yue Xiao-Le

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

(Received 3 June 2016; revised manuscript received 25 July 2016)

Abstract

Vibroimpact dynamics has been widely studied by experts and scholars in the fields of physics, engineering and mathematics. Most of the researches focus on vibroimpact systems under deterministic excitations by using numerical methods. However, random excitation often exists in vibroimpact system, whose roles cannot be neglected, sometimes may be quite important. Stochastic bifurcation is one of the most critical parts of stochastic dynamics, but the relevant researches about vibroimpact system are rarely seen so far due to the fact that the analytical method has its inherent difficulty. This paper aims to investigate the P-bifurcations of a Duffing-Rayleigh vibroimpact system under stochastic parametric excitation based on an equivalent nonlinear system method and the catastrophe theory. Firstly, the original Duffing-Rayleigh vibroimpact system is transformed into a new system without velocity jump by using the nonsmooth transformation method and Dirac function. Then, the equivalent nonlinear system method is introduced to obtain the stationary probability density of the response. Finally, the explicit parameter conditions for stochastic P-bifurcations are derived based on the catastrophe theory. Besides, the effect of stochastic parametric excitation on the system response is also discussed.

Keywords: vibroimpact system, P-bifurcation, stochastic parametric excitation

PACS: 05.40.-a, 05.40.Ca, 05.10.Gg

DOI: [10.7498/aps.65.210501](https://doi.org/10.7498/aps.65.210501)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11472212, 11532011, 11302170).

[†] Corresponding author. E-mail: weixu@nwpu.edu.cn