

基于回溯筛选的稀疏重构时延估计算法

冷雪冬 巴斌 逯志宇 王大鸣

Sparse reconstruction time delay estimation algorithm based on backtracking filter

Leng Xue-Dong Ba Bin Lu Zhi-Yu Wang Da-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 210701 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.210701

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.210701>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I21>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于高速移动通信的虚拟天线阵列理论研究

Virtual antenna array theory based on high speed mobile communications

物理学报.2016, 65(7): 070701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.070701>

交替寻优生成元素幅值结合混沌随机相位构造循环测量矩阵

Constructing circulant measurement matrix through alternating optimizing amplitudes together with chaotic stochastic phases of the matrix generating elements

物理学报.2015, 64(13): 130702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130702>

一种基于选择性测量的自适应压缩感知方法

An adaptive compressed sensing method based on selective measure

物理学报.2014, 63(20): 200701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200701>

基于马尔科夫链蒙特卡罗的时延估计算法

Time delay estimation using Markov Chain Monte Carlo method

物理学报.2014, 63(13): 130701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.130701>

标志位频谱感知方法研究

Investigation of sign spectrum sensing method

物理学报.2011, 60(11): 110701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.110701>

基于回溯筛选的稀疏重构时延估计算法*

冷雪冬[†] 巴斌 逯志宇 王大鸣

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450001)

(2016年6月2日收到; 2016年7月14日收到修改稿)

针对无线定位中时延估计在小样本(单快拍)、低信噪比条件下需要大量独立分布测量数据问题, 提出了一种基于回溯筛选的稀疏重构时延估计算法, 实现了单快拍、低信噪比条件下接收信号的精确时延估计. 该算法首先建立接收信号的稀疏表示模型, 然后基于该模型建立正交观测矩阵, 最后在重构算法中引入回溯筛选思想, 利用时延与观测矩阵之间的一一对应关系得到时延的无偏估计. 对该模型下时延估计的克拉美罗界进行了推导. 仿真分析表明, 所提方法在单快拍、低信噪比条件下精度远高于求根多重信号分类算法, 相比于正交匹配追踪算法, 在较小的复杂度代价下性能得到了较大提升.

关键词: 稀疏重构, 时延估计, 回溯筛选, 测量矩阵正交化

PACS: 07.50.Qx, 07.05.Kf, 84.40.Ua, 89.70.Eg

DOI: 10.7498/aps.65.210701

1 引言

时延估计被广泛应用于雷达、声纳和无线定位^[1]等领域, 复杂环境下的时延估计算法研究是该领域的研究重点. 现有时延估计方法可分为五类: 相关法^[2]、高阶累积量法^[3]、自适应法^[4]、最大似然法^[5]和子空间法^[6]. 相关法原理简单、工程实现容易, 但要求信号与噪声之间互不相关; 高阶累积量法消除了高斯噪声的影响, 但计算复杂度较高; 自适应法能够调整滤波器参数跟踪时变的时延, 但估计精度受初值影响容易陷入局部收敛; 最大似然类方法作为理论最优算法, 性能在低信噪比下依旧可以逼近克拉美罗界(Cramér-Rao bound, CRB), 但该方法需要网格搜索复杂度较高; 子空间法具有超分辨能力, 但在小样本、低信噪比的条件下性能大大下降.

为了解决小样本、低信噪比条件下现有算法性能的不足, 时延估计问题引入了很多新方法. 文献^[7]将求根多重信号分类(root-multiple signal classification, Root-Music)方法应用到二维参数估

计中, 直接对参数求解实现了脉冲无线电系统的到达时间、到达方向(direction of arrival, DOA)联合估计, 在低信噪比下仍具有较好的性能, 但该方法需要频域平滑, 在单快拍条件下估计精度大幅下降. 文献^[8]将马尔可夫链蒙特卡罗方法应用于无源雷达定位中, 在单快拍、低信噪比条件下均方误差依旧能够接近CRB, 但该方法在马尔可夫链抽样的过程中易陷入稳定状态. 与此同时, 压缩感知稀疏重构^[9]作为一种新的理论, 被广泛应用在信号处理领域. 文献^[10]在时域干扰消除与相关处理后, 在单快拍条件下利用稀疏重构方法得到了DOA的超分辨估计. 文献^[11]提出了一种基于信源信号的等正弦空间的最优稀疏化模型, 在该模型下实现信号重构与DOA估计. 文献^[12]通过压缩感知波束形成算法对高斯随机矩阵的正交三角分解后得到的测量矩阵与奇异值分解后得到的低维数据接收矩阵进行重构, 实现了高分辨DOA估计. 文献^[13]利用正交匹配追踪(orthogonal matching pursuit, OMP)算法实现了已知发射信号条件下的单、多径时延估计, 进而将稀疏重构的方法引入时延估计中, 但该方法在选取原子的过程中有一定概

* 国家自然科学基金(批准号: 61401513)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: lengxuedong@outlook.com

率选择次优原子导致估计结果的不准确.

本文在已知发射信号条件下, 构造了一种基于稀疏表示的接收信号模型, 然后根据该模型将导向矢量矩阵构造为测量矩阵, 最后在OMP算法的基础上引入回溯筛选机理, 重构出增益系数向量. 通过增益系数向量与时延的一一对应关系, 得到时延的无偏估计. 通过仿真实验将本文算法与Root-Music算法和OMP算法进行比较, 并对这三种算法进行了复杂度分析, 表明了本文算法的优越性.

2 数学模型

假设辐射源发射的信号为 $s(t)$, 考虑无线信道多径传播效应, 多径数为 L_p , 则接收到的信号为

$$y(t) = \sum_{i=0}^{L_p-1} a_i s(t - \tau_i) + w(t), \quad (1)$$

其中 a_i 为不同径的增益系数, τ_i 为不同径对应的时延, $w(t)$ 为加性高斯白噪声. 对接收的信号做离散傅里叶变换, 频域形式可以表示为

$$Y(k) = \sum_{i=0}^{L_p-1} a_i S(k) e^{-j2\pi(f_c + k\Delta f)\tau_i} + W(k), \quad (2)$$

其中, $k = 0, 1, \dots, K-1$; f_c 为载波频率; Δf 为频域采样间隔; $W(k)$ 表示均值为0, 方差为 σ^2 的加性高斯白噪声, 记作 $W(k) \sim N(0, \sigma^2)$. 将(2)式化为向量的形式为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{a} + \mathbf{W}, \quad (3)$$

其中,

$$\mathbf{Y} = [y(0), y(1), \dots, y(K-1)]^T, \quad (4)$$

(4) 式为 $y(t)$ 的离散傅里叶变换;

$$\mathbf{S} = \text{diag}[s(0), s(1), \dots, s(K-1)], \quad (5)$$

(5) 式为辐射源信号矢量;

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}(\tau_0), \mathbf{v}(\tau_1), \dots, \mathbf{v}(\tau_{L_p-1})], \quad (6)$$

$$\mathbf{v}(\tau_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi\Delta f\tau_i} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi(K-1)\Delta f\tau_i} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

(6) 和 (7) 式为导向矢量;

$$\mathbf{a} = [a_0 e^{-j2\pi f_c \tau_0}, a_1 e^{-j2\pi f_c \tau_1}, \dots, a_{L_p-1} e^{-j2\pi f_c \tau_{L_p-1}}]^T, \quad (8)$$

(8) 式为增益系数矢量;

$$\mathbf{W} = [w(0), w(1), \dots, w(K-1)]^T, \quad (9)$$

(9) 式为加性高斯白噪声矢量.

利用稀疏重构的思想进行时延估计, 信号的稀疏表示是前提, 测量矩阵的合理构造与信号重构算法的设计是正确估计的核心. 图1为基于稀疏重构进行时延估计的算法流程图.

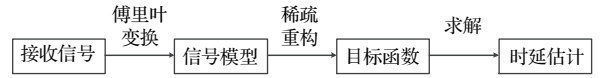


图1 基于稀疏重构的时延估计算法流程图

Fig. 1. Flow chart of time delay estimation algorithm based on sparse reconstruction.

在无线电定位的模型中, 通过选择合适的稀疏表示矩阵, 信号可以被表示为稀疏形式. 而在时域的角度衡量多径无线信道, 不同径的传播时延不同, 并且时延在时域的表示是稀疏的, 因此可以直接构造稀疏信号的形式. 如图2所示, 将整个时域按照时延划分成 N 份, 即 $\tilde{\tau} = \{\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_{N-1}\}$, 可以假设任意一个时延划分 $\tilde{\tau}_l$ ($l = 0, 1, \dots, N-1$) 都对应着一条潜在的径, “●”表示时域实际存在的径, “○”表示时域中实际并不存在的径. 那么增益系数稀疏向量 $\tilde{\mathbf{a}} = [\tilde{a}_0 e^{-j2\pi f_c \tau_0}, \tilde{a}_1 e^{-j2\pi f_c \tau_1}, \dots, \tilde{a}_{N-1} e^{-j2\pi f_c \tau_{N-1}}]^T$ 的每一行都对应着一条潜在的径, 为体现出信号在时域的稀疏性, 潜在多径数应远远大于实际多径数, 即 $N \gg L_p$, 因此 $\tilde{\mathbf{a}}$ 就是信号增益系数的稀疏表示矩阵.

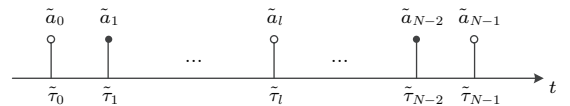


图2 时延在时域的稀疏化表示示意图

Fig. 2. Sparse representation of time delay in time domain.

由于导向矢量矩阵 $\tilde{\mathbf{V}} = [\mathbf{v}(\tilde{\tau}_0), \mathbf{v}(\tilde{\tau}_1), \dots, \mathbf{v}(\tilde{\tau}_{N-1})]$ 中包含了时延的全部信息, 因此可以令 $\Phi_0 = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{V}}$ 作为测量矩阵, 通过求解(10)和(11)式的最优 ℓ_0 范数问题由接收信号 $\mathbf{Y} = \Phi_0 \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{N}$ 精

确重构增益系数稀疏向量 $\tilde{\mathbf{a}}$, 再根据 $\tilde{\tau}$ 和 $\tilde{\mathbf{a}}$ 的一一对应关系, 得到多径的时延估计.

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min \|\tilde{\mathbf{a}}\|_0, \quad (10)$$

$$\|\mathbf{Y} - \Phi_0 \tilde{\mathbf{a}}\|_2 \leq \sigma. \quad (11)$$

3 稀疏重构时延估计算法

针对 (10) 和 (11) 式的求解, 需要穷举出 $\tilde{\mathbf{a}}$ 中非零值的所有 $C_N^{L_p}$ 种组合, 因此无法直接求解. 可以通过在测量矩阵 Φ_0 中选取与信号最优匹配的列向量(原子)来求解, 最优匹配的原子即信号在原子所构成空间上的投影值最大的原子. 其中投影值为信号与每个原子内积的绝对值, 即

$$u = \{u_j | u_j = |\langle \mathbf{Y}, \Phi_{0_j} \rangle|, j = 1, 2, \dots, N\}, \quad (12)$$

其中 \mathbf{Y} 为接收信号, Φ_{0_j} 为 Φ_0 的第 j 列, 即测量矩阵的第 j 个原子, 由此可以将最优化 ℓ_0 范数问题的

求解转化为线性规划问题求解.

3.1 测量矩阵约束等距性准则

文献 [14] 推导了通过测量矩阵成功重构出系数稀疏矩阵的充要条件是测量矩阵满足约束等距性准则 (restricted isometry property, RIP), 对于稀疏度为 L_p 的增益系数稀疏向量 $\hat{\mathbf{a}}$, RIP 的定义为: 当不等式

$$(1 - \delta_{L_p}) \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2 \leq \|\Phi_0 \hat{\mathbf{a}}\|_2^2 \leq (1 + \delta_{L_p}) \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2$$

成立时, 若 $0 < \delta_{L_p} < 1$, 则称 Φ_0 是以参数 δ_{L_p} 满足 RIP 准则的线性算子. 证明一个确定矩阵 Φ_0 是否满足 RIP 准则是一个组合问题, 在 L_p 值较大时遍历所有组合计算 δ_{L_p} 是不现实的. Candès 等 [14] 证明了 RIP 准则可以等价描述为: 如果 Φ_0 的任意 $2L_p$ 列是线性无关的, 则 Φ_0 满足 RIP 准则.

$$\Phi_0 = \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{V}} = \text{diag}[s(0), s(1), \dots, s(K-1)]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j2\pi\Delta f\tau_0} & e^{-j2\pi\Delta f\tau_1} & \dots & e^{-j2\pi\Delta f\tau_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j2\pi\Delta f(K-1)\tau_0} & e^{-j2\pi\Delta f(K-1)\tau_1} & \dots & e^{-j2\pi\Delta f(K-1)\tau_{N-1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(0) & s(0) & \dots & s(0) \\ s(1) e^{-j2\pi\Delta f\tau_0} & s(1) e^{-j2\pi\Delta f\tau_1} & \dots & s(1) e^{-j2\pi\Delta f\tau_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s(K-1) e^{-j2\pi\Delta f(K-1)\tau_0} & s(K-1) e^{-j2\pi\Delta f(K-1)\tau_1} & \dots & s(K-1) e^{-j2\pi\Delta f(K-1)\tau_{N-1}} \end{bmatrix}.$$

令 $a_1\Phi_{0_1} + a_2\Phi_{0_2} + \dots + a_{2L_p}\Phi_{0_{2L_p}} = 0$, 由于 $\tilde{\mathbf{V}}$ 的列具有相似的结构, 仅有 e 指数的系数不同, 如要满足上式, 唯有令 $a_1 = a_2 = \dots = a_{2L_p} = 0$, 因此 Φ_0 的任意 $2L_p$ 列是线性无关的, 即 Φ_0 满足 RIP 准则.

3.2 测量矩阵正交化

根据正交矩阵的性质, 可知正交矩阵的任意两列都是正交的. 取 Φ_0 的任意两列 Φ_{0_i}, Φ_{0_j} , 可得

$$\begin{aligned} \Phi_{0_i} \cdot \Phi_{0_j}^T &= \begin{bmatrix} s(0)s(1) e^{-j2\pi\Delta f\tau_i} \vdots s(K-1) e^{-j2\pi\Delta f(K-1)\tau_i} \\ s(0)s(1) e^{-j2\pi\Delta f\tau_j} \vdots s(K-1) e^{-j2\pi\Delta f(K-1)\tau_j} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} s(0)^2 & \dots & s(0) s(K-1) e^{-j2\pi\Delta f(K-1)\tau_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s(0) s(K-1) e^{-j2\pi\Delta f(K-1)\tau_i} & \dots & s(K-1)^2 e^{-j2\pi\Delta f(K-1)(\tau_i+\tau_j)} \end{bmatrix} \neq \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

根据(13)式可知 Φ_0 是非正交的,而根据 $Y = \Phi_0 \tilde{a} + N$ 可知接收信号 Y 是由 Φ_0 的行向量与 \tilde{a} 的列向量相乘得到的.当 Φ_0 的行向量相互正交时,则 Y 之间的相关度也相应减少.因此可以对 Φ_0 的行向量正交化后再应用于该模型,本文利用Gram-Schmidt正交化方法对测量矩阵的第*i*行向量 $\Phi_{0_{ii}}$ 进行正交化.该过程的步骤如下.

1) 将 Φ_0 的第一行向量根据(14)式进行单位化,得到第一行正交化结果,

$$\Phi_{ii} = \frac{\Phi_{0_{ii}}}{\|\Phi_{0_{ii}}\|} = \frac{\Phi_{0_{ii}}}{\sqrt{\langle \Phi_{0_{ii}}, \Phi_{0_{ii}} \rangle}} \quad (i = 1). \quad (14)$$

2) 由(12)式计算 Φ_0 第二行向量在第一行向量正交化结果向量上的投影,并由(15)式计算第二行向量与这个投影的差值,对差值进行单位化得到第二行向量正交化的结果,

$$\Phi_{jj} = \Phi_{0_{jj}} - \sum_{i=1}^{j-1} \langle \Phi_{0_{jj}}, \Phi_{0_{ii}} \rangle \Phi_{ii}, \quad j = 2, 3, \dots, K. \quad (15)$$

3) 计算第三行向量在第一、二行向量正交化结果向量上的投影,由(15)式计算第三个原子与这个投影的差值,对差值进行单位化得到正交化结果.

4) 依次类推,直到计算出所有*K*行向量的正交化结果得到正交化测量矩阵 Φ .

3.3 基于回溯筛选的重构算法

文献[13]采用OMP算法对信号进行重构,该算法从测量矩阵中选择与信号最匹配的原子,稀疏逼近并求出余量,经过迭代后将信号由所选出的原子线性表示.然而OMP算法仅仅选择了信号在原子所构成空间中投影值最大的原子,在稀疏度不为1的条件下往往会同时出现若干个投影值相等的原子,此时会导致选择次优原子.

本文针对此问题对选取原子的方法进行改进:首先对投影值由大到小排序,并选取前 $2L_p$ 个原子.通过选取多个原子的方式确保第一次选取的原子中包含最优原子.然后引入回溯机理,用最小二乘法对所选原子进行逼近,对逼近得到的信号进行排序,并选择前 L_p 个原子.

本文重构算法的步骤为:

1) 初始化,初值 $r_0 = Y$,迭代次数 $t = 1$,索引集集合 $\Lambda = \emptyset, \lambda = \emptyset$;

2) 利用(12)式计算投影值 u ,并对 u 排序,选择前 $2L_p$ 个最大值对应的索引值存入第*t*次迭代的索引集集合 λ_t ;

3) 更新索引集, $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$,以及索引集对应的测量矩阵 Φ 中的原子集合 $\Phi_t = \Phi_{t-1} \cup \{\Phi_{\lambda_t}\}$;

4) 利用(16)式逼近信号,并对信号集合排序选择前 L_p 个最大元素,将对应的原子存入 $\hat{\Phi}_t$,

$$\hat{x}_t = (\Phi_t^T \Phi_t)^{-1} \Phi_t^T Y; \quad (16)$$

5) 利用(17)式对余量进行更新,

$$r_t = Y - \hat{\Phi}_t \hat{x}_t; \quad (17)$$

6) $t = t + 1$,迭代终止条件 $t > L_p$,如不满足终止条件,返回步骤2)继续迭代.

该方法根据测量矩阵的RIP条件,投影值 u 中每 $2L_p$ 个元素构成的集合所包含的信息近似于 Y 中 $2L_p$ 个元素所构成的集合.那么 u 中前 $2L_p$ 个元素所对应的支撑也对应于这些元素在 Y 中的支撑.因此可以通过这种方式确保所选原子是最优的.

3.4 回溯筛选稀疏重构时延估计的步骤

根据上述分析可以将利用稀疏重构时延估计方法归纳为以下步骤:

1) 对接收信号进行快速傅里叶变换得到接收数据向量 Y ;

2) 由辐射源信号矢量 S 和划分时延后得到导向矢量矩阵 \tilde{V} 构造测量矩阵 $\Phi_0 = S\tilde{V}$,并对其正交化得到 Φ ;

3) 根据3.3节中的重构算法重构出系数稀疏向量 \hat{a} ;

4) 根据 \hat{a} 与 $\hat{\tau}$ 的一一对应关系估计出时延.

4 时延估计的CRB

CRB给出了无偏估计的最小均方误差,下面对该模型的CRB进行推导.由(3)式以及相关初始条件,可以将概率密度函数表示为

$$p(Y|\tau, a) = \frac{1}{(2\pi)^K (\sigma^2/2)^K} e^{-\frac{1}{\sigma^2} [y - sv(\tau)a]^H [y - sv(\tau)a]}. \quad (18)$$

对(18)式取对数可得

$$\ln p \triangleq \ln p(Y|\tau, a)$$

$$\begin{aligned}
 &= -K \ln(2\pi) - K \ln(\sigma^2/2) \\
 &\quad - \frac{1}{\sigma^2} [\mathbf{Y} - \mathbf{S}\mathbf{V}(\tau)\mathbf{a}]^H [\mathbf{Y} - \mathbf{S}\mathbf{V}(\tau)\mathbf{a}]. \quad (19)
 \end{aligned}$$

将(19)式分别对 σ^2 , τ , \mathbf{a} 的实部 a_{Re} 与虚部 a_{Im} 求导可得

$$\frac{\partial \ln p}{\partial (\sigma^2)} = -\frac{K}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} \mathbf{W}^H \mathbf{W}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \ln p}{\partial a_{\text{Re}}} = \frac{2}{\sigma^2} \text{Re} [\mathbf{V}^H(\tau) \mathbf{S}^H \mathbf{W}], \quad (21)$$

$$\frac{\partial \ln p}{\partial a_{\text{Im}}} = \frac{2}{\sigma^2} \text{Im} [\mathbf{V}^H(\tau) \mathbf{S}^H \mathbf{W}], \quad (22)$$

$$\frac{\partial \ln p}{\partial \tau} = \frac{2}{\sigma^2} \text{Re} \{ \mathbf{a}^* \mathbf{d}^H(\tau) \mathbf{S}^H \mathbf{W} \}, \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}(\tau) &= \frac{\partial \mathbf{V}(\tau)}{\partial \tau} \\
 &= [0, -j2\pi\Delta f e^{-j2\pi\Delta f \tau}, \dots, \\
 &\quad -j2\pi\Delta f (K-1) e^{-j2\pi\Delta f (K-1)\tau}]^T. \quad (24)
 \end{aligned}$$

根据(21), (22), (23), (24)式可以推导出:

$$E \left\{ \left[\frac{\partial \ln p}{\partial (\sigma^2)} \right]^2 \right\} = \frac{K}{\sigma^4}, \quad (25)$$

$$E \left\{ \left[\frac{\partial \ln p}{\partial a_{\text{Re}}} \right] \left[\frac{\partial \ln p}{\partial a_{\text{Re}}} \right]^T \right\} = \frac{2}{\sigma^2} \text{Re} [\mathbf{V}^H(\tau) \mathbf{V}(\tau)], \quad (26)$$

$$E \left\{ \left[\frac{\partial \ln p}{\partial a_{\text{Re}}} \right] \left[\frac{\partial \ln p}{\partial a_{\text{Im}}} \right]^T \right\} = -\frac{2}{\sigma^2} \text{Im} [\mathbf{V}^H(\tau) \mathbf{V}(\tau)], \quad (27)$$

$$E \left\{ \left[\frac{\partial \ln p}{\partial a_{\text{Im}}} \right] \left[\frac{\partial \ln p}{\partial a_{\text{Im}}} \right]^T \right\} = \frac{2}{\sigma^2} \text{Re} [\mathbf{V}^H(\tau) \mathbf{V}(\tau)], \quad (28)$$

$$E \left\{ \left[\frac{\partial \ln p}{\partial a_{\text{Re}}} \right] \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \tau} \right]^T \right\} = \frac{2}{\sigma^2} \text{Re} [\mathbf{V}^H(\tau) \mathbf{d}(\tau) \mathbf{a}], \quad (29)$$

$$E \left\{ \left[\frac{\partial \ln p}{\partial a_{\text{Im}}} \right] \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \tau} \right]^T \right\} = \frac{2}{\sigma^2} \text{Im} [\mathbf{V}^H(\tau) \mathbf{d}(\tau) \mathbf{a}], \quad (30)$$

$$E \left\{ \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \tau} \right] \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \tau} \right]^T \right\} = \frac{2}{\sigma^2} \text{Re} [\mathbf{a}^* \mathbf{d}^H(\tau) \mathbf{d}(\tau) \mathbf{a}]. \quad (31)$$

根据上述公式以及文献[15, 16]可以得到 τ 的CRB满足

$$\begin{aligned}
 CRB(\tau) &= \\
 &\frac{\sigma^2}{2} \left\{ \text{Re} \left[\mathbf{a}^* \mathbf{d}^H(\tau) \left[\mathbf{I} - \frac{1}{K} \mathbf{V}(\tau) \mathbf{V}^H(\tau) \right] \mathbf{d}(\tau) \mathbf{a} \right] \right\}^{-1}. \quad (32)
 \end{aligned}$$

5 仿真实验

5.1 仿真分析

本文研究的是无线定位模型下的时延估计算法, 采用正交频分复用信号作为发射信号. 根据IEEE 802.11 g协议[17], 将系统参数设置如下: 子载波数为64个, 载波频率为2.4 GHz, 系统带宽为20 MHz, 在这20 MHz内每隔0.2 MHz插入一个导频符号. 为验证本文算法的实用性与鲁棒性, 采用蒙特卡罗实验将本文算法与文献[7]中的Root-Music算法和文献[13]中的OMP算法以及CRB进行对比分析.

首先定义信噪比为

$$SNR = 10 \lg \frac{|y(t)|^2}{|w(t)|^2}, \quad (33)$$

其中 $y(t)$ 为接收信号, $w(t)$ 为加性高斯白噪声.

均方误差为

$$\begin{aligned}
 RMSE_i &= \sqrt{\frac{1}{M} \left(\sum_{m=1}^M |\hat{\tau}_{m,i} - \tau_i|^2 \right)}, \\
 &\quad i = 1, 2, \dots, L_p, \quad (34)
 \end{aligned}$$

其中, M 为蒙特卡罗仿真次数, $\hat{\tau}_{m,i}$ 为第 i 条径第 m 次蒙特卡罗实验时延的估计值, τ_i 为第 i 条径时延真实值.

仿真一: 假设多径接收信号的多径数(稀疏度) $L_p = 2$, 到达时间分别为 $\tau_1 = 200$ ns和 $\tau_2 = 600$ ns, 快拍数为1. 在 $SNR = 10$ dB时利用本文算法进行 $M = 200$ 的蒙特卡罗仿真, 得到时延估计值 $\hat{\tau}_{m,1}, \hat{\tau}_{m,2}$ 的分布如图3所示. 由图3可以看出本文算法在单快拍条件下能够实现时延的无偏估计.

定义时延估计误差为

$$\begin{cases} \Delta\tau_{m,1} = \hat{\tau}_{m,1} - \tau_1, \\ \Delta\tau_{m,2} = \hat{\tau}_{m,2} - \tau_2. \end{cases} \quad (35)$$

根据(35)式计算出 $\Delta\tau_{m,1}, \Delta\tau_{m,2}$, 图4为时延估计误差的分布. 定义时延估计误差的均值为

$$\Delta\hat{\tau} = \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M [|\Delta\tau_{m,1}| + |\Delta\tau_{m,2}|]. \quad (36)$$

为了便于分析算法的统计特性, 定义时延估计误差在2 ns以内为正确重构, 估计误差在1 ns以内为精确重构. 由(36)式求出 $\Delta\hat{\tau} = 0.19735$ ns, 实现

了单快拍条件下时延的精确重构, 因此可以看出本文算法的性能较理想, 实用性较高.

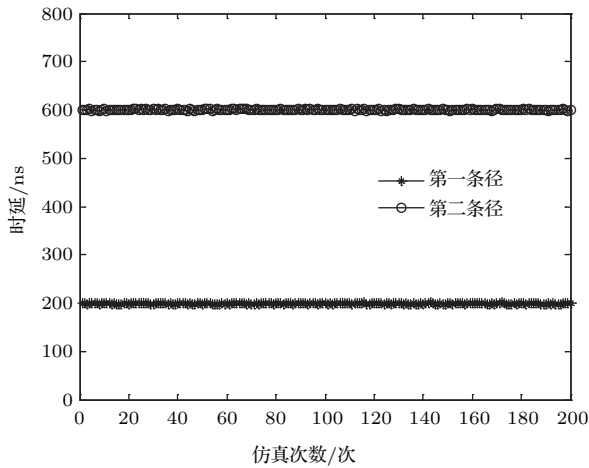


图3 $SNR = 10$ dB, $L_p = 2$ 条件下时延估计值分布
Fig. 3. Distribution of time delay estimation under the conditions of $SNR = 10$ dB, $L_p = 2$.

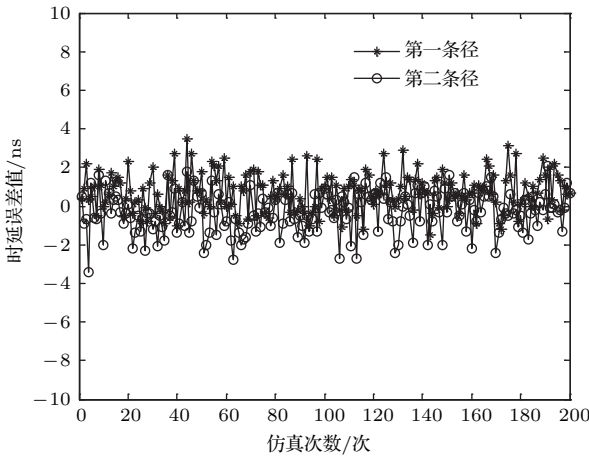


图4 $SNR = 10$ dB, $L_p = 2$ 条件下时延误差值分布
Fig. 4. Distribution of time delay estimation error under the conditions of $SNR = 10$ dB, $L_p = 2$.

在其他参数不变的条件下, 令 $SNR = 10$ dB, 得到时延估计值分布如图 5 所示. 由图 5 可以看出, 虽然随着信噪比的下降, 时延估计值分布趋于发散, 但其均值仍接近真实值. 因此本文算法在低信噪比下依旧有着较强的鲁棒性.

仿真二: 在相同的条件下, 将本文算法与 Root-Music 算法和 OMP 算法进行比较. 分别绘制这些算法的均方误差 (mean square error, MSE) 曲线, 并与 CRB 进行对比, 曲线如图 6 所示. 由图 6 可以看出, 在单快拍的条件下, OMP 算法与本文算法的估计性能明显优于 Root-Music 算法. 这是由于 Root-Music 算法在快拍数减小时, 特征分

解得到的范德蒙矩阵不满秩, 因此导致算法在单快拍下估计性能不准确, 而且在低信噪比条件下稳定性较差. 由于本文在选取内积最大值时采用了回溯机理, 因此性能比 OMP 算法更好. 图 7 为对比 OMP 与本文算法时延估计值的散布图, 随着信噪比的提高, OMP 算法与本文算法的时延分布范围趋于紧密; 在信噪比为 -10 dB 时, 本文算法的时延分布范围比 OMP 算法减小了 22.5%; 当信噪比为 20 dB 时, 本文算法精确重构的数量与 OMP 算法相比增加了 35.61%. 因此本文算法的时延估计性能在精度与鲁棒性方面都优于 OMP 算法.

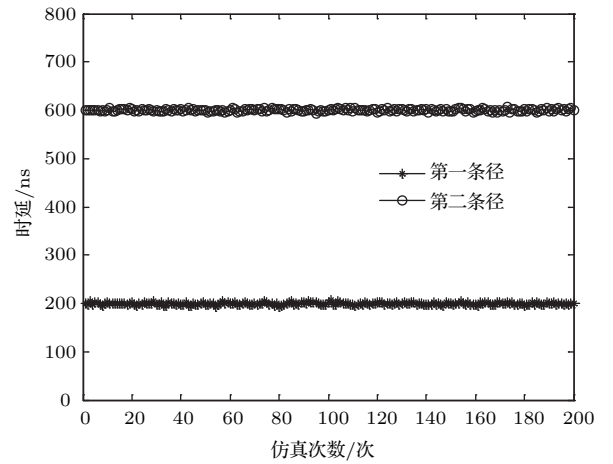


图5 $SNR = 0$ dB, $L_p = 2$ 条件下时延估计值分布图
Fig. 5. Distribution of time delay estimation under the conditions of $SNR = 0$ dB, $L_p = 2$.

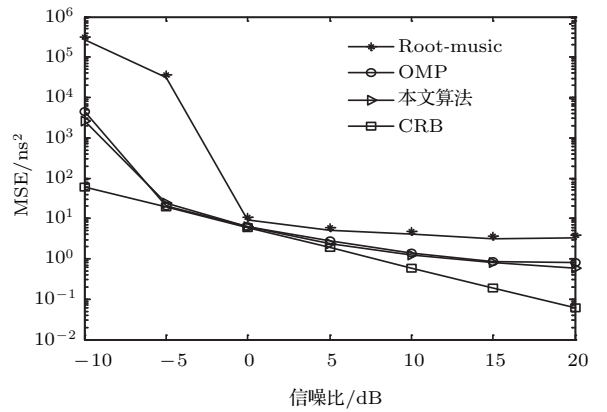


图6 不同算法 MSE 对比图

Fig. 6. MSE contrast of different algorithms.

仿真三: 将本文算法在不同多径数 (稀疏度) 条件下进行仿真, 仿真结果如图 8 所示, 可以看出随着多径数目的增加, 估计的均方误差也会随之上升. 这是因为本文算法在迭代选取原子的过程中, 每次都要选中多个较相关的原子, 同时剔除部

分原子. 如果剔除的原子中包含下一条径的最优原子, 就会导致下一次迭代中出现“漏选”问题. 因此当 $L_p = 1$ 时, 算法性能最优, 能够逼近 CRB, 当 $L_p > 1$ 时, 性能会随多径数的增加而下降.

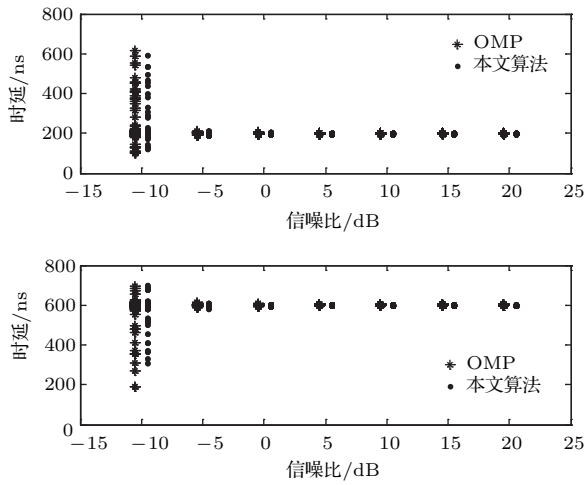


图7 不同信噪比条件下两条径时延估计值分布
Fig. 7. Distribution of two-paths' time delay estimation under different SNR conditions.

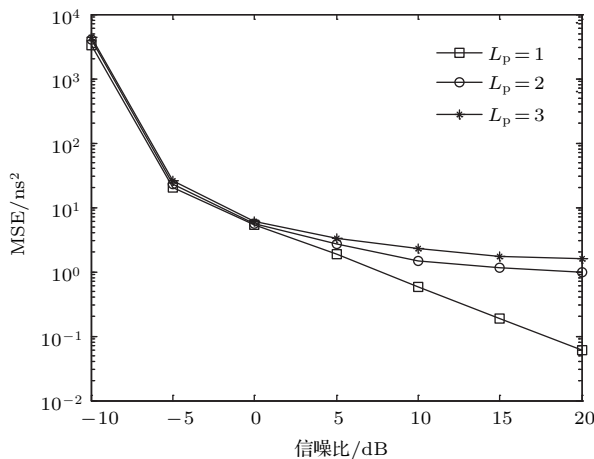


图8 本文算法在不同多径数下MSE对比图
Fig. 8. MSE contrast of the algorithm in this paper under different paths.

5.2 复杂度分析

Root-Music算法的计算复杂度主要包括两部分: 对协方差矩阵进行特征分解, 复杂度为 $O(K^3 + K^2)$; 对构造的求根多项式求解, 复杂度为 $O(K^2 + 5K - LK - L - 2)$, 该算法复杂度随 K 增加呈指数增加. OMP算法的计算复杂度主要包括两部分: 计算相关系数 u , 复杂度为 $O(NK)$; 更新余量, 复杂度为 $O(3K + 2)$. 本文算法在选取

最优原子的过程中引入回溯机理, 复杂度为 $O\left(NL_p K + 2L_p + \left(\frac{2L_p^3 + 9L_p^2 + 16L_p + 15}{6}\right)L_p^2 K\right)$.

表1为三种算法复杂度的对比.

表1 算法复杂度对比表
Table 1. Algorithm complexity comparison.

算法名称	复杂度
Root-Music	$O(K^3 + 2K^2 + 5K - L_p K - L_p - 2)$
OMP	$O\left(NL_p K + 2L_p + \frac{3L_p(L_p + 1)}{2}K\right)$
本文算法	$O\left(NL_p K + 2L_p + \left(\frac{2L_p^3 + 9L_p^2 + 16L_p + 15}{6}\right)L_p^2 K\right)$

由表1可以看出, Root-Music算法复杂度随信号点数 K 增加呈指数级增加, 而本文算法较OMP算法复杂度增加较小, 根据以上分析, 本文算法在较小复杂度的代价下取得了性能的较大提升.

6 结论

在无线定位系统中, 现有稀疏重构时延估计方法具有在单快拍, 低信噪比条件下较好的估计性能, 但是在选取原子过程中有一定概率选择次优原子. 针对该问题, 本文算法首先对测量矩阵进行正交化处理, 并在选取原子的过程中引入了回溯筛选机理, 实现了在单快拍条件下的无偏时延估计, 在低信噪比条件下具有比Root-Music算法和OMP算法更好的估计性能. 相比于OMP算法, 在较小复杂度的代价下取得了性能的较大提升. 与此同时给出了模型CRB以及复杂度分析, 仿真结果表明该算法是一个稳定可靠的优秀算法.

参考文献

- [1] Zhang M, Ma Y L, Li B Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030511
- [2] Knapp C, Carter G 1976 *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* **24** 320
- [3] Ma W, Huang J G 2001 *Comput. Eng. Appl.* **37** 54 (in Chinese) [马雯, 黄建国 2001 计算机工程与应用 **37** 54]
- [4] Cheng L, Chen G, Gao W Z, Zhang F, Li G 2014 *IEEE Trans. Smart Grid* **5** 2957
- [5] Champagne B, Eizenman M, Pasupathy S 1989 *Acoustics, Speech, and Signal Processing* Glasgow, UK, May 23-26, 1989 p2633
- [6] Li X M, Tao R, Wang Y 2010 *Radar Sci. Technol.* **8** 362 (in Chinese) [李雪梅, 陶然, 王越 2010 雷达科学与技术 **8** 362]

- [7] Wang F Q, Zhang X F, Wang F 2014 *J. Commun.* **35** 137 (in Chinese) [王方秋, 张小飞, 汪飞 2014 通信学报 **35** 137]
- [8] Li J, Zhu J D, Feng Z H, Zhao Y J, Li D H 2015 *Circ. Syst. Signal Process.* **34** 3897
- [9] Donoho D L 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 1289
- [10] Wang H T, Wang J 2013 *J. Electron. Inform. Technol.* **35** 877 (in Chinese) [王海涛, 王俊 2013 电子与信息学报 **35** 877]
- [11] Lin B, Zhang Z H, Zhu J B 2014 *J. Electron. Inform. Technol.* **36** 589 (in Chinese) [林波, 张增辉, 朱炬波 2014 电子与信息学报 **36** 589]
- [12] Chen Y F, Huang J G, Su J J 2013 *Torpedo Technol.* **21** 110 (in Chinese) [陈玉凤, 黄建国, 苏建军 2013 鱼雷技术 **21** 110]
- [13] Wang F Q, Zhang X F 2014 *ETRI J.* **36** 460
- [14] Candès E J, Tao T 2005 *IEEE Trans. Inform. Theory* **51** 4203
- [15] Stoica P, Nehorai A 1989 *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* **37** 720
- [16] Stoica P, Nehorai A 1990 *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* **38** 1783
- [17] Gast M S (translated by O'Reilly Media, Inc.) 2007 802.11[®] *Wireless Networks: The Definitive Guide* (2nd Ed.) (Nanjing: Publishing House of Southeast University) pp309–317 (in Chinese) [加斯特 M S 著 (O'Reilly 公司译) 2007 802.11[®] 无线网络权威指南 (第二版) (南京: 东南大学出版社) 第 309–317 页]

Sparse reconstruction time delay estimation algorithm based on backtracking filter*

Leng Xue-Dong[†] Ba Bin Lu Zhi-Yu Wang Da-Ming

(Institute of Information System Engineering, The PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

(Received 2 June 2016; revised manuscript received 14 July 2016)

Abstract

The time delay estimation is widely used in wireless location field, and is the research emphasis in complex environment of this field. The current delay estimation algorithms can be classified as five methods of correlation, high-order statistics, self-adaption, maximum likelihood and subspace. However, the existing algorithms can hardly achieve an ideal performance in small sample (single snapshot) and low signal-to-noise ratio environment during wireless location. In order to solve the problem about the insufficiency of the current algorithms in the above conditions, many new methods have been introduced into the delay estimation problem. The compressed sensing sparse reconstruction method has been applied to the signal processing field as a newly-proposed algorithm in recent years. The delay estimation is realized by using the method of sparse reconstruction, in which the sparse representation of the signal is the premise. The rational construction of the measurement matrix and the design of the signal reconstruction algorithm are the core of correct estimation.

The purpose of this article is to deal with the lack of measurement data in small sample (single snapshot) and low signal-to-noise ratio environment during wireless location. In the model of wireless location, the signal can be represented as a sparse matrix form by selecting suitable sparse representation matrix. The wireless multi-channel is measured in the time domain, the propagation delay varies with channel and the delay representation in the time domain is sparse, so that it can be directly constructed into the form of sparse signal. Since the necessary and the sufficient condition of the coefficient sparse matrix successfully reconstructed by the measurement matrix are the measurement matrix meeting the restricted isometry property (RIP). The orthogonal measurement matrix based on the steering vector by the method of Gram-Schmidt is proven to achieve the RIP. A novel sparse reconstruction algorithm based on backtracking filter is constructed to estimate the time delay. In order to guarantee that the first selection includes the optimal atom, several atoms are selected. And then the backtracking mechanism is introduced, and the selected atoms are approached by the method of the minimum square to sequence the obtained signals and select the optimal atom. Therefore, this method can be used to guarantee that the optimal atom is selected. The presented algorithm can achieve the delay estimation by using the corresponding relation between the time delay and the measurement matrix in a high precision. Furthermore, the Cramer-Rao bound (CRB) of this model is derived. Finally, simulations show that the proposed approach is suitable for small sample (single snapshot) and low signal-to-noise ratio environment. The proposed method can achieve a higher precision than Root-MUSIC and improve performance at low complexity cost compared with OMP algorithm. The simulation result proves that the algorithm is stable and reliable.

Keywords: sparse reconstruction, time delay estimation, backtracking filter, orthogonal measurement matrix

PACS: 07.50.Qx, 07.05.Kf, 84.40.Ua, 89.70.Eg

DOI: 10.7498/aps.65.210701

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61401513).

† Corresponding author. E-mail: lengxuedong@outlook.com