

双 Pearcey 光束的构建及数学机理研究

任志君 李晓东 金洪震 施逸乐 杨照清

Construction of Bi-Pearcey beams and their mathematical mechanism

Ren Zhi-Jun Li Xiao-Dong Jin Hong-Zhen Shi Yi-Le Yang Zhao-Qing

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 214208 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.214208

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.214208>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I21>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

沙尘大气电磁波多重散射及衰减

Multiple scattering and attenuation for electromagnetic wave propagation in sand and dust atmosphere

物理学报.2016, 65(9): 094205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.094205>

Pearcey 光束簇的实验产生和光学结构研究

Generation of a family of Pearcey beams and their optical structure

物理学报.2015, 64(23): 234205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.234205>

背景辐射对被动测距精度影响分析及实验研究

Influence of background radiation on the precision of passive ranging

物理学报.2015, 64(3): 034216 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.034216>

温度、湿度及压强对激光在水中衰减特性的影响

Influences of temperature, humidity and pressure on the attenuation characteristics of laser beam in water

物理学报.2015, 64(2): 024215 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.024215>

大气环境下基于目标照明回光的视轴误差校正实验研究

Experimental research of boresight error correction using returning signals from the illuminated targets through atmosphere

物理学报.2015, 64(2): 024216 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.024216>

双Pearcey光束的构建及数学机理研究*

任志君^{1)2)†} 李晓东²⁾ 金洪震¹⁾²⁾ 施逸乐²⁾ 杨照清²⁾

1) (浙江师范大学信息光学研究所, 金华 321004)

2) (浙江师范大学, 浙江省光信息检测与显示技术研究重点实验室, 金华 321004)

(2016年4月5日收到; 2016年7月8日收到修改稿)

通过推导椭圆线的菲涅耳衍射分布, 得到了形如Pearcey函数的数学表达式. 通过数值模拟和实验产生, 发现椭圆光环经菲涅耳衍射后形成的Pearcey光束外形上很像两个经典Pearcey光束面对面组合而成, 我们把它命名为双Pearcey光束, 这是形式不变Pearcey光束家族的新成员. 随后, 利用数学突变理论, 给出了双Pearcey光束所具有的光学拓扑结构的数学机理和相应表达式.

关键词: 双Pearcey光束, 菲涅耳衍射, 突变理论

PACS: 42.68.Ay, 42.60.Jf, 42.25.Fx, 42.25.Bs

DOI: 10.7498/aps.65.214208

1 引言

1960年激光器问世以来, 激光技术的一个重要任务是控制和改变激光束的空间形态, 以满足各种科学实验对光束特性的具体要求. 光束在自由空间传输, 需满足波动方程, 这是研究光束传输和控制光束形态的理论基础. 波动方程最为典型的特解是余弦函数解, 这是我们熟知的简谐波. 简谐波在自由空间传输时, 其空间分布与传输距离无关, 这实际上是一种“无衍射”光束, 但作为理论模型的无衍射“余弦(简谐)波”, 波振面有无限宽, 能量为无限大(余弦函数平方不可积), 因而这种光束并无实际价值. 此外, 人们通过寻找波动方程的其他特解(这些特解的形式与度规和传输距离无关), 人们构造了几种具有“主瓣”结构的无衍射光束, 比如Bessel光束^[1]和Airy光束^[2]. 不同于余弦光束, Bessel和Airy光束由于存在“主瓣”结构, 因而更具实用性^[3-6].

实际上, 既然光的传输必需满足波动方程, 而波动方程有无穷多个特解. 在波动方程无限多个解中, 满足光束分布与传输距离无关条件的特解

少之又少. 我们熟知的仅是直角坐标系下的余弦函数^[7]、极坐标系下的Bessel函数和Airy函数^[1,2]、椭圆坐标系下的Mathieu函数^[8]. 这构成了无衍射光束家庭中仅有的成员.

除了条件极为苛刻的无衍射光束, 人们还发现波动方程在近轴条件下另外的一类解. 在光束传输过程中, 这类函数的分布虽与传输距离有关, 但传输过程中, 描述光束的函数形式却并不改变, 这也是极少见也难得的一类波动方程特解. 传输过程中, 这类光强分布改变但函数形式不变的光束, 可被视作形式不变光束. 我们最熟知的是Gaussian函数, 它正是大多数基模激光器所出射的光束分布形态^[9]. 2012年, 基于波动方程在傍轴近似下的特解——Pearcey函数, 人们还构造了Pearcey光束^[10]. 这种光束与Gaussian光束传输特性非常接近, 即随着传输距离的改变, 光束分布在变化, 但却始终能用Pearcey函数来描述. 显然, 这是典型的形式不变光束. 不同于文献^[10]的相位调制, 2015年, 我们课题组利用振幅调制, 实验产生了与文献^[10]相同的Pearcey光束^[11]. 近来, 甚至半Pearcey光束也被理论构建和实验产生^[12]. 本文利用Pearcey函数是波动方程特解的结论, 进一步构

* 国家自然科学基金(批准号: 11274278, 11674288)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: renzhijun@zjnu.cn

建了双Pearcey光束. 不同于经典形态的Pearcey光束^[10,11]和半Pearcey光束^[12], 从外形上看, 双Pearcey光束仿佛是两个经典Pearcey光束面对面的叠加. 显然, 这是一种新的Pearcey光束形态. 双Pearcey光束的产生, 不仅为Pearcey光束家族增添了新的成员, 也为形式不变光束家族增添了新的成员.

2 理 论

利用惠更斯-菲涅耳原理, 光在自由空间的传输方程可写作

$$E(\xi, \eta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int g(x_0, y_0) \frac{ik}{r} e^{ikr} dx_0 dy_0, \quad (1)$$

式中, $r = [(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + z^2]^{1/2}$ 为物点到接收面任意点的距离.

当物光波为椭圆线时, 有

$$g(x_0, y_0) = \delta[y_0 - n(1 - x_0^2/m^2)^{1/2}], \quad (2)$$

式中, δ 代表 δ 函数, m 和 n 分别为椭圆的半长轴和半短轴. 在满足傍轴近似条件, 即当 $z^3 \gg (1/8\lambda)[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2]_{\max}^2$, 把(2)式代入(1)式, 椭圆线物光波的菲涅耳衍射表达式可写为

$$\begin{aligned} E(\xi, \eta, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int \delta[y_0 - n(1 - x_0^2/m^2)^{1/2}] \\ &\quad \times \exp\{ik[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + z^2]^{1/2}\} \\ &\quad \times [(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + z^2]^{-1/2} dx_0 dy_0 \\ &= \frac{e^{ikz}}{z} \int_{-m}^m \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda z} [(\xi - x_0)^2 + n^2(1 - x_0^2/m^2) \right. \\ &\quad \left. + \eta^2 - 2n\eta(1 - x_0^2/2m^2 + x_0^4/8m^4)]\right\} dx_0. \quad (3) \end{aligned}$$

这里, 为了把(3)式写为Pearcey函数的形式, 参照文献^[11], 设(3)式中 $x_0 = m\left(\frac{4\lambda z}{\pi\eta n}\right)^{1/4} x$. (3)式改写为

$$\begin{aligned} E(\xi, \eta, z) &= m\left(\frac{4\lambda z}{\pi\eta n}\right)^{1/4} \frac{e^{ikz}}{z} \int_{-\left(\frac{\pi\eta n}{4\lambda z}\right)^{1/4}}^{\left(\frac{\pi\eta n}{4\lambda z}\right)^{1/4}} \\ &\quad \times \exp(i\Psi) dx, \quad (4) \end{aligned}$$

式中,

$$\Psi = x^4 + px^2 + qx, \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} p &= 2(m^2 - n^2 - \eta n) \left(\frac{\pi}{\lambda z \eta n}\right)^{1/2}, \\ q &= 2\sqrt{2}m\xi \left(\frac{\pi^3}{\lambda^3 z^3 \eta n}\right)^{1/4}. \quad (6) \end{aligned}$$

显然, (4)式恰为有限积分区间的不完全Pearcey函数的积分形式(标准Pearcey函数的积分区间为 $-\infty$ 到 ∞), 说明椭圆线的菲涅耳衍射表达式正好是Pearcey函数的形式. 由此可知, 利用椭圆线的菲涅耳衍射, 有望产生有限能量(积分区间不是 $-\infty$ 到 ∞)的Pearcey光束.

基于(4)式, 我们典型地模拟了三种不同压缩系数 n/m (定义为椭圆短轴和长轴之比)的椭圆线经菲涅耳衍射后的光束分布, 如图1所示. 图1中, 假设入射光波为He-Ne激光($\lambda = 632.8$ nm), 准直后的光束为平行光. 同时, 为便于比较, 所有用于产生双Pearcey光束的椭圆半长轴均为1.75 mm, 而短半轴不同. 模拟结果与文献^[10, 11]中的经典Pearcey光束对比后发现, 椭圆线衍射形成的Pearcey光束, 仿佛是两个经典Pearcey光束面对面叠加所得. 借用文献^[12]中半Pearcey光束的命名, 我们把这种叠加的Pearcey光束命名为双Pearcey光束.

从(4)式和图1可知, 双Pearcey光束在传输过程中, 纵然光束分布随着传输距离的改变而改变, 但始终能用Pearcey函数描述. 这一传输特性与经典Pearcey光束非常相似. 显然, 双Pearcey光束是一种形式不变光束. 此外, 在椭圆长轴不变的情况下, 通过对比压缩系数分别为0.3, 0.5, 0.7的椭圆(椭圆长轴不变, 短轴改变)所产生的双Pearcey光束, 我们发现, 椭圆越圆, 双Pearcey光束的分布范围(星形线)越小, 星形线的短轴与长轴越接近. 说明通过改变椭圆的形状, 可产生各种双Pearcey光束. 我们注意到, 任意压缩系数的椭圆线形成的双Pearcey光束的轮廓结构都很像星形线, 光强最大的四个点正好在星形线的四个尖角处. 下面我们将理论分析双Pearcey光束为什么会有这样的光学结构和形态.

3 双Pearcey光束拓扑结构的数学机理

我们注意到, 方程(1)中的双Pearcey光束的表达式 Ψ 与突变理论中的塞曼突变机构的表达式

完全相同, 这个函数被称作势函数^[13]. 势函数中, p 和 q 叫做状态变量, x 叫做控制变量. 势函数 Ψ 的临界点由 $\Psi' = 0$ 求得, 有

$$\Psi' = 4x^3 + 2p \cdot x + q. \quad (7)$$

(7) 式为三次方程, 三次方程最多有三个不等的根. 形如 (7) 式的三次方程, 也被称作卡尔丹方程.

根据突变理论^[13,14], 当 $\Psi' = 0$, 每有一个实根, 对应一个稳态点及相应的一条衍射线; 三个实根对应三个稳态点及相应的三条衍射线. 如果三个实根中有两个实根相等, 则相应的两条衍射线形成一条焦散线 (caustic); 如果三个实根全部相等, 则这三条衍射线两两间可形成两条散焦线, 两条相切的焦散线形成一个尖点 (cusp).

利用卡尔丹方程的求解方法^[15], 方程 (7) 的三个根分别为

$$x_1 = \left\{ \left[\left(\frac{q}{8} \right)^2 + \left(\frac{p}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{q}{8} \right\}^{1/3} + \left\{ - \left[\left(\frac{q}{8} \right)^2 + \left(\frac{p}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{q}{8} \right\}^{1/3}, \quad (8a)$$

$$x_2 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \times \left\{ \left[\left(\frac{q}{8} \right)^2 + \left(\frac{p}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{q}{8} \right\}^{1/3} + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \times \left\{ - \left[\left(\frac{q}{8} \right)^2 + \left(\frac{p}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{q}{8} \right\}^{1/3}, \quad (8b)$$

$$x_3 = \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \times \left\{ \left[\left(\frac{q}{8} \right)^2 + \left(\frac{p}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{q}{8} \right\}^{1/3} + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \times \left\{ - \left[\left(\frac{q}{8} \right)^2 + \left(\frac{p}{6} \right)^3 \right]^{1/2} - \frac{q}{8} \right\}^{1/3}. \quad (8c)$$

由方程组 (8) 可知, 卡尔丹方程实根的数目由下面的判别式决定^[15],

$$\Delta = \left(\frac{q}{8} \right)^2 + \left(\frac{p}{6} \right)^3. \quad (9)$$

当 $\Delta > 0$ 时, x_1 为实根, x_2 和 x_3 为复根, 即此时有一个实根和两个复根; $\Delta < 0$ 时, x_1, x_2 和 x_3 均为实根, 且 $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, 即此时有三个不等的实根; 当 $\Delta = 0$ 时, x_1, x_2 和 x_3 均为实根, 即此时有三个

实根, 三个实根是否相等, 下面将分情况讨论. 将 (6) 式代入 (9) 式, 由 $\Delta = 0$ 得

$$\left(\frac{\xi}{n} \right)^{2/3} + \left(\frac{\eta}{m} \right)^{2/3} = \left(\frac{m^2 - n^2}{mn} \right)^{2/3}. \quad (10)$$

如图 1 所示, (10) 式为星形线表达式.

$\Delta = 0$ 时, 又分为两种情况.

1) 在 (8) 式中, 当 $p = 0, q = 0$, 有 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, 即此时有一个三重零根. 既然三个实根相等的点形成一个尖点^[13,14]. 由 $p = 0, q = 0$, 可求得尖点位置为

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{m^2 - n^2}{n} \quad (\eta > 0), \quad (11a)$$

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{m^2 - n^2}{n} \quad (\eta < 0). \quad (11b)$$

2) 当 $p \neq 0, q \neq 0$ 时, 即 $\xi \neq 0, \eta \neq \pm \frac{m^2 - n^2}{n}$, 三个实根中有两个根相等, 两个相等的实根形成一条焦散线^[13,14]. 由 $\Delta = 0$ 可得焦散线为形如 (10) 式的星形线. 注意, 对比本文和文献^[10, 11] 可知, 本文由椭圆形成的双 Pearcey 光束的焦散线和经典 Pearcey 光束的焦散线完全不同. 经典 Pearcey 光束的焦散线为半立方抛物线^[10,11], 而本文构建的双 Pearcey 光束的焦散线为 (10) 式所示的星形线.

此外, 物光波的表达式 (2) 也可写作如下的形式:

$$\bar{g}(x_0, y_0) = \delta[x_0 - m(1 - y_0^2/n^2)^{1/2}]. \quad (12)$$

注意, (2) 和 (12) 式在形式上虽有所不同, 但数学上却完全等价, 实际代表的是同一条椭圆线. 将 (12) 式代入 (1) 式, 重复 (3)—(6) 式的推导步骤, 得到

$$\bar{\Psi} = y^4 + \bar{p} \cdot y^2 + \bar{q} \cdot y, \quad (13)$$

式中, $\bar{p} = 2(m^2 - n^2 - \xi n) \cdot \left(\frac{\pi}{\lambda z \xi n} \right)^{1/2}$, $\bar{q} = 2\sqrt{2} \cdot m\eta \cdot \left(\frac{\pi^3}{\lambda^3 z^3 \xi n} \right)^{1/4}$.

同样, 势函数 $\bar{\Psi}$ 的临界点由 $\bar{\Psi}' = 0$ 求得. 此时卡尔丹方程的判别式仍为 (10) 式, 但由卡尔丹方程的三重零根条件 $\bar{p} = 0, \bar{q} = 0$, 可得另外两处尖点位置为

$$\xi = \frac{m^2 - n^2}{m}, \quad \eta = 0 \quad (\xi > 0), \quad (14a)$$

$$\xi = -\frac{m^2 - n^2}{m}, \quad \eta = 0 \quad (\xi < 0). \quad (14b)$$

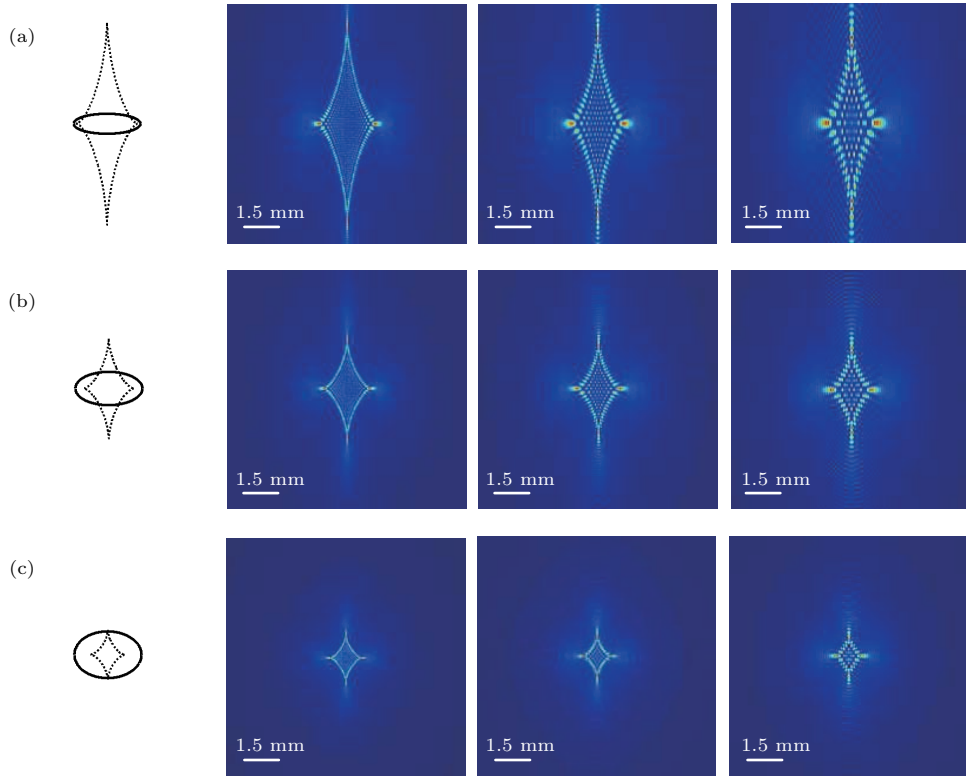


图1 (网刊彩色) (a)—(c) 第一列为压缩系数 $n/m = 0.3, 0.5, 0.7$ 的椭圆 (实线) 和对应的焦散线 (虚线); 第二、三、四列分别为椭圆线在传输距离 1, 2, 3 m 处菲涅耳衍射所得的双 Pearcey 光束
 Fig. 1. (color online) (a)–(c) The first column represent ellipse lines (solid lines) and their corresponding evolute lines (dotted lines) for the elliptic compression coefficient of $n/m = 0.3, 0.5, 0.7$. The second to fourth column represent Bi-Pearcey beams generated by ellipse line based on Fresnel diffraction in the propagation distances for 1, 2, 3 m.

综合 (11) 和 (14) 式, 易知双 Pearcey 光束四个尖点分别位于

$$\xi = \pm \frac{m^2 - n^2}{m}, \quad \eta = 0, \quad (15a)$$

$$\xi = 0, \quad \eta = \pm \frac{m^2 - n^2}{n}. \quad (15b)$$

由 (15) 式, 可知星形焦散线的四个顶点为双 Pearcey 光束的四个能量极大的尖点.

焦散线 (caustic) 是衍射突变理论中常用的一个概念, caustic 一词源自于希腊语单词 burning^[16], 直译为“燃烧的”. 实际上指光线最集中、光强最强的地方. 通过突变理论的概念, 可以很好地解释双 Pearcey 光束的特点, 即双 Pearcey 光束边缘的星形焦散线处, 光强明显强于其他区域, 而焦散线的四个尖点处光强又最强.

由突变理论^[13,14]并结合几何光学中光线的观点可知, 对于临界点方程, 一个实根意味着该处只有一条光线, 两个实根意味着该处有两条光线. 而由三重实根的条件, 意味着该处有三条光线通过, 因此尖点处的光强最强, 两条光线通过的散焦线

处的光强次之, 只有一条光线通过的区域光强最弱. 利用数学上的突变理论, 很好地解释了图 1 中双 Pearcey 光束所具有的拓扑结构.

需要指出, (4) 式并非严格意义的 Pearcey 函数. 从 Pearcey 函数的定义^[13,14], 可知理想 Pearcey 函数的积分区间为 $(-\infty, \infty)$. 但本文由椭圆的菲涅耳衍射所得的表达式, 虽然形式上与 Pearcey 函数相同, 但积分区间为 $\left(-\left(\frac{\pi\eta n}{4\lambda z}\right)^{1/4}, \left(\frac{\pi\eta n}{4\lambda z}\right)^{1/4}\right)$. 参照 Airy 函数的定义^[17]

$$Ai(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx - t^3/3) dt, \quad (16)$$

理想 Airy 函数平方不可积, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Ai(x)|^2 dx \rightarrow \infty. \quad (17)$$

既然实际产生的 Airy 光束总是在有限区间积分, 因而形成的 Airy 光束总是有限能量 Airy 光束^[18,19]. 同样, 理论上, 理想 Pearcey 光束并不存在. 实际中, 不论利用抛物线相位^[10], 还是抛物

线振幅^[11]产生Pearcey光束,其抛物线的范围总在有限区间.实际产生的经典Pearcey光束也并非理想的Pearcey光束,而是有限能量Pearcey光束^[10,11].同理,椭圆线经菲涅耳衍射后形成的形如Pearcey函数的双Pearcey光束,从表达式(4)来看,积分区间 $\left(-\left(\frac{\pi\eta n}{4\lambda z}\right)^{1/4}, \left(\frac{\pi\eta n}{4\lambda z}\right)^{1/4}\right)$ 显然是有限的,因而双Pearcey光束是一种有限能量的Pearcey光束.

最后,与文献^[11]中的实验方法相同,我们利用振幅型空间光调制器产生椭圆线光环,椭圆光环经菲涅耳衍射后,实验产生了双Pearcey光束.我们给出了如图1(b)所示的椭圆亮环,在自由空间传输2,3 m后,用科学电荷耦合器件记录该光束,如图2所示.实验结果与理论结果(图1第二行第三、四列)基本一致,证明了理论结果的正确性.

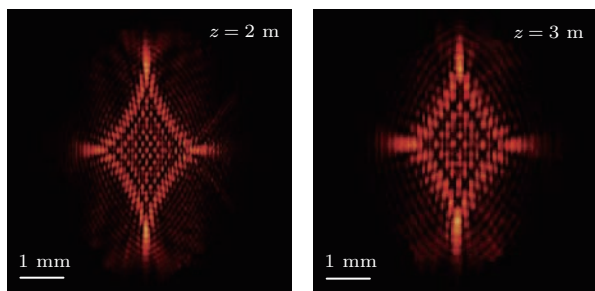


图2 (网刊彩色) 双Pearcey光束实验图

Fig. 2. (color online) Experimental results of Bi-Pearcey beams.

4 结 论

在傍轴近似条件下,通过推导椭圆线的菲涅耳衍射分布,得到了形如Pearcey函数的数学表达式.这一结果表明椭圆线光环经菲涅耳衍射后,可形成Pearcey光束.进一步,通过理论模拟,表明椭圆线经菲涅耳衍射后形成的Pearcey光束不同于经典的Pearcey光束和半Pearcey光束,它的外形很像两个Pearcey光束面对面叠加而成.我们通过振幅调制,实验产生了这种双Pearcey光束,这是Pearcey光束家族新的一员.随后,基于突变理论中的塞曼突

变机构,给出了双Pearcey光束光学拓扑结构的数学机理.

参考文献

- [1] Durnin J 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1499
- [2] Siviloglou G A, Broky J, Dogariu A, Christodoulides D N 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 213901
- [3] Lorenser D, Singe C, Curatolo A, Sampson D D 2014 *Opt. Lett.* **39** 548
- [4] Yan Z, Jureller J E, Sweet J, Guffey M J, Pelton M, Scherer N F 2012 *Nano Lett.* **12** 5155
- [5] Polynkin P, Kolesik M, Moloney J V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Science* **324** 229
- [6] Vettenburg T, Dalgarno H I C, Nylk J, Coll-Lladó C, Ferrier D E K, Cizmár T, Gunn-Moore F J, Dholakia K 2014 *Nat. Methods* **11** 541
- [7] Born M, Wolf E (translated by Yang J S) 2006 *Principles of Optics* (Beijing: Electronic Industry Press) (in Chinese) [波恩,沃耳夫著(杨葭荪译)2006 光学原理(北京:电子工业出版社)]
- [8] Gutiérrez-Vega J C, Iturbe-Castillo M D, Chávez-Cerda S 2000 *Opt. Lett.* **25** 1493
- [9] Siegman A E 1986 *Lasers* (Mill Valley: University Science Books)
- [10] Ring J D, Lindberg J, Mourka A, Mazilu M, Dholakia K, Dennis M R 2012 *Opt. Express* **20** 18955
- [11] Ren Z J, Li X D, Jin H Z 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 234205 (in Chinese) [任志君,李晓东,金洪震 2015 物理学报 **64** 234205]
- [12] Kovalev A A, Kotlyar V V, Zaskanov S G, Porfirev A P 2015 *J. Opt.* **17** 035604
- [13] Poston T, Stewart I 1976 *Catastrophe Theory and its Applications* (London: Pitman Publishing)
- [14] Stamens J J, Spjelkavik B 1983 *Opt. Acta* **30** 1331
- [15] Editing Group for Math Manual 1979 *Math Manual* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [数学手册编写组 1979 数学手册(北京:高等教育出版社)]
- [16] Nye J, Wright F J 1999 *Natural Focusing and Fine Structure of Light: Caustics and Wave Dislocations* (Bristol: Institute of Physics Publishing)
- [17] Vallée O, Soares M 2004 *Airy Functions and Applications to Physics* (London: Imperial College Press)
- [18] Le Y Y, Xiao H, Wang Z X, Wu M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 044205 (in Chinese) [乐阳阳,肖寒,王子潇,吴敏 2013 物理学报 **62** 044205]
- [19] Siviloglou G A, Christodoulides D N 2007 *Opt. Lett.* **32** 979

Construction of Bi-Pearcey beams and their mathematical mechanism*

Ren Zhi-Jun^{1)2)†} Li Xiao-Dong²⁾ Jin Hong-Zhen¹⁾²⁾ Shi Yi-Le²⁾ Yang Zhao-Qing²⁾

1) (*Institute of Information Optics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*)

2) (*Key Laboratory of Optical Information Detecting and Display Technology, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*)

(Received 5 April 2016; revised manuscript received 8 July 2016)

Abstract

We present a theoretical expression in the form of the Pearcey function by deducing the Fresnel diffraction distribution of an elliptic line. Then, we numerically simulate and experimentally generate this kind of new Pearcey beams by using the Fresnel diffraction of optical ellipse line. This kind of beams can be referred to as Bi-Pearcey beams because their appearance of the topological structure is very similar to the combination of two face-to-face classical Pearcey beams. It is no doubt that so-called Bi-Pearcey beams are the new member of a family of form-invariant Pearcey beams. Subsequently, we also provide the theoretical mechanism of generating Bi-Pearcey beams based on the Zeeman catastrophe machine of catastrophic theory. By solving the critical equation of potential function of Bi-Pearcey beams generated by an ellipse line, we find that the optical morphogenesis of Bi-Pearcey beams is determined by the number of roots of the critical equation. The critical equation of potential function of Bi-Pearcey beams is a classical Cartan equation, which has at most three real roots. For the Fresnel diffraction of ellipse line, three real roots of the critical equation are corresponding to three stable points and represent three diffraction lines, hence they can be used to examine the optical topological structure of Bi-Pearcey beams. By choosing the appropriate control variable of Bi-Pearcey beams, two diffraction lines of an ellipse line overlap, and the strong caustic line of Bi-Pearcey beams is correspondingly generated when the two of the three real roots of the critical equation are equal. If the three real roots of the critical equation are all equal, the strongest cusps of Bi-Pearcey beams are generated, accordingly. Moreover, the equation of the caustic line and their positions of four cusps of Bi-Pearcey beams are given by solving the control variable equation of Bi-Pearcey beams. In conclusion, we elucidate the mathematical mechanism of topical morphogenesis of Bi-Pearcey beams based on catastrophic theory.

Keywords: Bi-Pearcey beams, Fresnel diffraction, catastrophe theory

PACS: 42.68.Ay, 42.60.Jf, 42.25.Fx, 42.25.Bs

DOI: [10.7498/aps.65.214208](https://doi.org/10.7498/aps.65.214208)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11274278, 11674288).

† Corresponding author. E-mail: renzhijun@zjnu.cn