

用两比特海森伯 XY 模型研究热几何失协

范竑锐 袁亚丽 侯喜文

Thermal geometric discords in a two-qubit Heisenberg XY model

Fan Hong-Rui Yuan Ya-Li Hou Xi-Wen

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 220301 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.220301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.220301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

{Cu₃} 单分子磁体在热平衡和磁场作用下的三体纠缠

Tripartite entanglement of {Cu₃} single molecular magnet with magnetic field in thermal equilibrium

物理学报.2016, 65(12): 120301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.120301>

等距离耦合腔系统中的非局域性

Dynamics of nonlocality in an equidistance cavity coupled by fibers

物理学报.2016, 65(10): 100301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.100301>

基于轨道角动量的多自由度 W 态纠缠系统

Entangled W state of multi degree of freedom system based on orbital angular momentum

物理学报.2015, 64(14): 140301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.140301>

Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用和内禀消相干对基于两量子比特 Heisenberg 自旋系统的量子密集编码的影响

Effects of Dzyaloshinskii-Moriya interaction and intrinsic decoherence on quantum dense coding via a two-qubit Heisenberg spin system

物理学报.2015, 64(8): 080302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.080302>

非均匀磁场和杂质磁场对自旋 1 系统量子关联的影响

Effects of inhomogeneous magnetic field and magnetic impurity on the quantum correlation of spin-1 system

物理学报.2015, 64(3): 030301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.030301>

用两比特海森伯 XY 模型研究热几何失协*

范竑锐 袁亚丽 侯喜文†

(华中师范大学物理科学与技术学院, 武汉 430079)

(2016年6月3日收到; 2016年8月15日收到修改稿)

研究磁场、温度及相互作用参数对两量子比特海森伯 XY 模型的热量子关联影响, 其中量子关联用两种改进的几何失协, 以及共生度来描述. 结果表明: 在低温和弱磁场区域, 这三个量呈现类似的行为; 但是, 两种几何失协在对抗温度和磁场上比共生度更强大; 在合适的条件下, 一种改进的几何失协随磁场的增加而增加, 而另一种失协是减小的; 特别是, 这种改进的几何失协出现突然变化, 而另一种失协和共生度没有这种变化. 这些结果有助于深入理解不同的几何失协量度以及两类量子关联.

关键词: 几何失协, 共生度, 两量子比特模型

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Ac

DOI: 10.7498/aps.65.220301

1 引言

量子关联在量子信息科学中起着非常重要的作用, 因此对系统的量子关联进行量化和表征已经成为研究热点之一^[1-3]. 量子纠缠是一种典型的量子关联, 人们已提出了各种各样的纠缠度量, 其中最常用的就是共生度^[4]和负性^[5,6], 而且这两种度量能很好地描述量子系统^[7-10]的纠缠特征.

随着量子纠缠理论的深入研究, 人们开始普遍接受还存在其他类型的非经典关联, 这是因为纠缠为零的可分离态中仍然存在着非经典关联, 其中最为典型的关联是量子失协^[11,12], 它揭示测量诱导的量子关联, 得到了广泛研究. 例如: 应用量子失协分析了 Ising 链模型^[13,14]和海森伯模型^[15]的量子关联, 很好地研究了量子相变. 由于量子失协所包含的最优化十分复杂, 导致只有一些特殊的两量子比特态^[16-19]和高斯态^[20]具有解析的量子失协表达式. 为此, 人们提出了一种量子失协的几何度量^[21], 即几何失协, 它是用 Hilbert-Schmidt 范

数来描述测量诱导的量子关联. 最近, 人们研究了两量子比特系统的几何失协和量子失协特性^[22,23], 结果表明: 失协不会出现突然死亡的现象, 且失协存在的参数范围比存在纠缠的范围要大些. 但是, 最新的研究^[24]发现, 对两体系统中非测量的子系统进行物理操作时, 这种几何失协会增加. 因此, 人们提出了一些改进的几何失协^[25,26], 分析了一些特殊量子态的几何失协特性.

本文利用两种改进的几何失协^[25-27], 比较研究两比特海森伯 XY 模型的热几何失协特性; 以计算纠缠共生度作为参考, 结果表明, 在合适的条件下, 两种改进的几何失协表现出不同的行为, 一种几何失协随磁场的增加而增加, 而另一种失协是减小的, 特别是, 这种改进的几何失协出现了突然变化的现象, 而另一种失协和共生度没有这种现象. 第二节介绍两种改进的几何失协和纠缠共生度的定义, 给出海森伯 XY 模型及其热态密度矩阵; 第三节, 研究不同磁场、温度及相互作用参数对热量子关联的影响; 最后, 给出研究结论和讨论.

* 国家自然科学基金 (批准号: 11174099) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xwzhou@phy.ccnu.edu.cn

2 定义与模型

2.1 几何失协定义

为了研究的方便, 我们简要介绍两组分量量子态的一些重要的几何失协定义. 任意两组分量量子态 ρ 的原始几何失协^[21]的定义是

$$D(\rho) = \min_{\chi} \|\rho - \chi\|_2^2, \quad (1)$$

其中 χ 是量子失协为零的经典态, $\|G\|_2^2 = \text{Tr}(G^\dagger G)$ 是 Hilbert-Schmidt 空间的 2-范数. 这种几何失协更一般的形式^[28]是

$$D(\rho) = \min_{\Pi^a} \left\| \rho - \prod^a(\rho) \right\|_2^2, \quad (2)$$

其中

$$\prod^a(\rho) = \sum_k \left(\prod_k^a I^b \right) \rho \left(\prod_k^a I^b \right),$$

$$\prod^a = \left\{ \prod_k^a \right\},$$

即对子系统 A 遍历所有的 von-Neumann 测量, 这样原始几何失协就能理解为单边 von-Neumann 测量对量子态所带来的最小扰动, 而最小扰动用 Hilbert-Schmidt 空间的 2-范数来度量.

尽管这种 2-范数几何失协对任意两组分量量子态进行数值计算十分方便, 但它作为一种关联度量还存在一些质疑^[24]. 为了使几何失协更有效, 人们在原始的几何失协基础上进行了改进, 一种改进的几何失协是采用密度矩阵的平方根而非密度矩阵本身来描述量子态的非定性^[25], 其定义是

$$D_1(\rho) = \min_{\Pi^a} \left\| \sqrt{\rho} - \prod^a(\sqrt{\rho}) \right\|_2^2, \quad (3)$$

其中 $\prod^a(\sqrt{\rho}) = \sum_k (\prod_k^a \otimes I^b) \sqrt{\rho} (\prod_k^a \otimes I^b)$, 这种几何失协具有一些独特的性质^[25].

实际上, 原始 2-范数的几何失协是来自一般形式下 P -范数的几何失协

$$D(\rho) = \min_{\Pi^a} \left\| \rho - \prod^a(\rho) \right\|_p^p, \quad (4)$$

其中 $\|G\|_p = \text{Tr} \left[(G^\dagger G)^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{p}}$ 是 Schatten P -范数. 因此, 原始几何失协在定义(4)下取 $P = 2$ 就可以

得到. 在 $P = 1$ 的条件下, 另一种改进的几何失协^[26]是

$$D_2(\rho) = \min_{\Pi^a} \left\| \rho - \prod^a(\rho) \right\|_1, \quad (5)$$

其中 $\|G\|_1 = \text{Tr}(\sqrt{G^\dagger G})$ 是 1-范数. 需要指出的是, 1-范数的几何失协已经被证明是很好的量子关联度量^[26], 在 P 取其他值的情形, 这种 P -范数几何失协不能很好地描述量子关联^[26].

作为参考, 我们最感兴趣的纠缠量度是共生度, 两比特态的纠缠共生度 (concurrence)^[4]的定义是

$$C(\rho) = \max \left\{ \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0 \right\}, \quad (6)$$

其中 λ_i 为厄米矩阵 $\mathbf{R} = \sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}$ 的本征值, $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y)$, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$.

在下一节, 我们利用几何失协(3)和(5)式, 以及共生度(6)式的定义, 研究两比特海森伯 XY 模型的几何失协特性.

2.2 两量子比特海森伯 XY 模型

我们考虑两自旋为 1/2 粒子相互作用海森伯 XY 模型, 哈密顿量是^[28]

$$H = B(\sigma_1^z + \sigma_2^z) + J(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_2^y \sigma_1^y), \quad (7)$$

其中 B 是磁场强度, J 是相互作用参数, σ_n^α ($\alpha = x, y, z$) 是第 n ($n = 1, 2$) 个量子比特的泡利算符. 在标准基 $\{|0, 0\rangle, |0, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$ 下, 系统的哈密顿量可以表示为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad (8)$$

容易得到哈密顿量的本征值

$$E_1 = -B, \quad E_2 = B,$$

$$E_3 = -J, \quad E_4 = J, \quad (9)$$

和相应的本征矢

$$|\phi_1\rangle = |0, 0\rangle, \quad |\phi_2\rangle = |1, 1\rangle,$$

$$|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 1\rangle),$$

$$|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 1\rangle), \quad (10)$$

其中 $|i, j\rangle$ ($i = 0, 1$ 和 $j = 0, 1$) 是 $\sigma_1^z \sigma_2^z$ 的本征态. 让系统与温度为 T 的环境热平衡, 则系统的密度矩阵是

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} \sum_{l=1}^4 \exp[-\beta E_l] |\phi_l\rangle \langle \phi_l|, \quad (11)$$

其中 $\beta = 1/(k_B T)$, 这里我们令玻尔兹曼常数 $k_B = 1$, $Z = 2 \cosh[\beta B] + 2 \cosh[\beta J]$ 是系统的配分函数.

在下一节, 我们研究热态 (11) 式的两种改进的几何失协 D_1 和 D_2 , 探讨磁场、温度和相互作用参数对 D_1 和 D_2 的影响, 同时还分析热态的纠缠共生度 C . 需要说明的是, 文献 [28] 研究了模型的热机效率和共生度, 最新的文献 [22, 23] 研究了模型的热量子失协 [22] 和原始几何失协 [23].

3 结果与讨论

我们用数值方法 [29] 计算模型热态的两种改进几何失协 D_1 和 D_2 , 计算结果与直接应用解析公式 [25, 26] 得到的结果完全一致, 这种数值方法还能计算高维量子态的几何失协.

图 1 描述了相互作用参数 $J = 1$, 不同温度 $T = 0.05, 2.5$ 时热态 (11) 式的两种改进的几何失协 D_1 和 D_2 , 以及共生度 C 随磁场 B 变化曲线. 从图 1 可以看到, 在无磁场的条件下, 温度越低, 这三个量的值越大, 且当温度 $T \rightarrow 0$ 时, 这三个量都有两个稳定的平台区, 这是因为低温度下系统在两个不同的关联基态 $|\phi_3\rangle$ 和 $|\phi_1\rangle$ 上跳跃造成的, 说明对于自旋为 $1/2$ 的量子系统, 这三个量都可以用来表征量子相变. 当温度升高至 $T = 2.5$, 两种几何失协随磁场的变化表现出不同的行为, 例如 D_1 先随磁场的增大而增大, 随后在某一磁场时就开始减小, 直至减小为零, 而 D_2 随着磁场的增大一直是递减的. 需要说明的是, 不同的纠缠量度也表现出类似的行为 [30], 这可能是量子关联的独特特性. 我们期待量子失协实验 [31] 和理论 [3] 的深入发展, 以确定哪一种失协更适合描述测量诱导的量子关联. 此外, 在合适的温度, D_1 在合适的磁场发生突然变化, 而 D_2 没有这种变化. 随着温度的升高, 热纠缠 C 完全消失, 而两种几何失协仍然存在, 表明对于给定的温度, 两种改进的几何失协在对抗磁场上比热纠缠要强大.

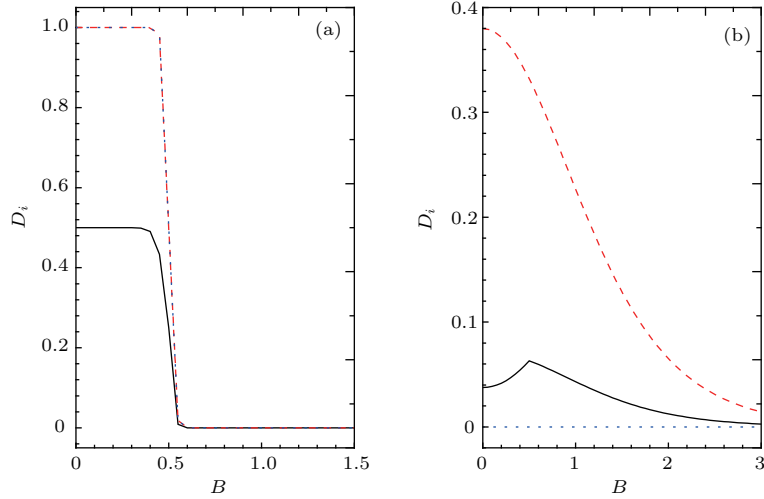


图 1 改进的几何失协 D_1 (实线), D_2 (虚线) 和共生度 C (点线) 随磁场强度 B 的变化, 其中相互作用参数 $J = 1$, 温度 (a) $T = 0.05$, (b) $T = 2.5$

Fig. 1. Dependence of two modified geometric discords D_1 (solid line), D_2 (dashed line), and concurrence C (dotted line) on magnetic field B with the coupling parameter $J = 1$ and temperature (a) $T = 0.05$ and (b) $T = 2.5$.

图 2 给出了相互作用参数 $J = 1$, 不同磁场强度 $B = 0.5, 1.0$ 时系统的两种改进的几何失协和共生度随温度 T 变化特性. 图 2 显示, 当系统处于弱磁场 $B = 0.5$ 时, 这三个量随温度的变化表现出相

似的行为. 由于系统在零温度下处于关联的基态, 这三个量在零温度下都能达到其相应的最大值, 随着温度的增加这三个量都减小, 这是由于较高温度会削弱量子相干性, 其中 D_2 减小的最慢. 当磁场

增加到 $B = 1.0$, 由于系统在零温度下处于非关联的基态, 这三个量都是从零开始变化的, 随着温度的升高, 系统开始处于非关联态与关联态的混合态, 则这三个量开始增大并在不同的温度点达到其相应的最大值, 随着温度的继续增加, 系统处于非

关联态的概率增大, 所以这三个量随着温度的增加而减小. 此外, 共生度 C 在温度高于临界温度时就会完全消失, 且临界温度不依赖于磁场 B 的大小 [22,23], 表明两种改进的几何失协在温度增强上比热纠缠要强大.

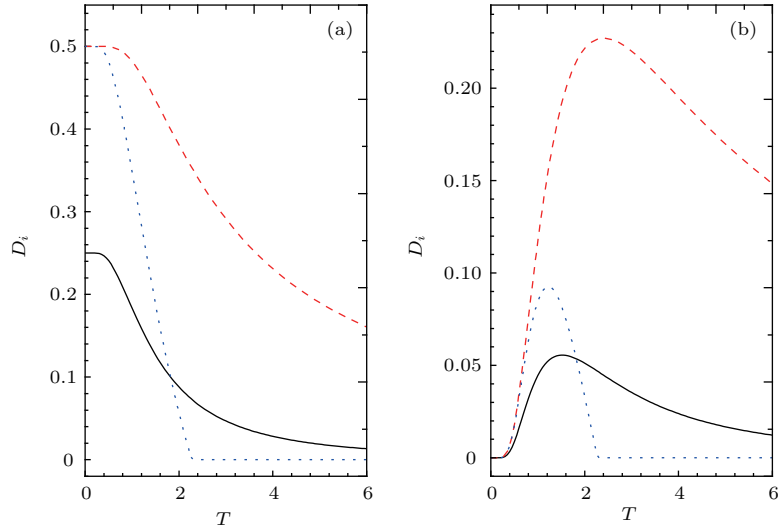


图2 改进的几何失协 D_1 (实线), D_2 (虚线) 和共生度 C (点线) 随温度 T 的变化曲线 其中相互作用参数 $J = 1$, 磁场强度 (a) $B = 0.5$, (b) $B = 1.0$

Fig. 2. Dependence of two modified geometric discords D_1 (solid line), D_2 (dashed line), and concurrence C (dotted line) on temperature T with the coupling parameter $J = 1$ and magnetic field (a) $B = 0.5$ and (b) $B = 1.0$.

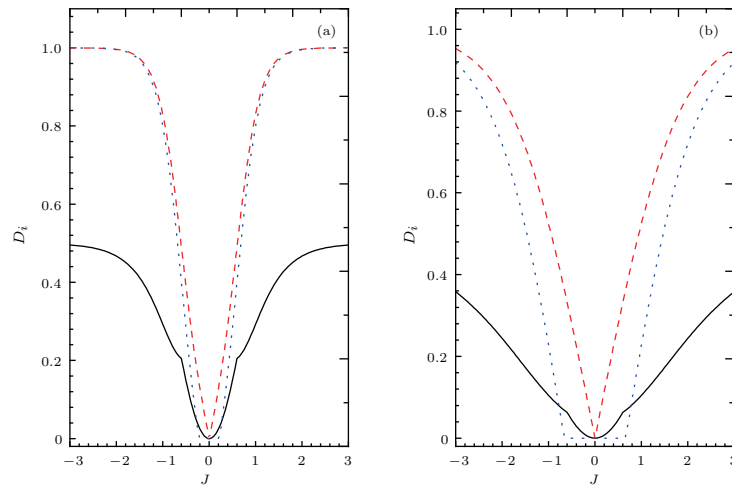


图3 改进的几何失协 D_1 (实线), D_2 (虚线) 和共生度 C (点线) 随相互作用参数 J 的变化 其中磁场强度 $B = 0.3$; 温度 (a) $T = 0.5$, (b) $T = 1.5$

Fig. 3. Dependence of two modified geometric discords D_1 (solid line), D_2 (dashed line), and concurrence C (dotted line) on the coupling parameter J with magnetic field $B = 0.3$ and temperature (a) $T = 0.5$, (b) $T = 1.5$.

图3给出了磁场 $B = 0.3$, 不同温度 $T = 0.5, 1.5$, 两种改进的几何失协和共生度随相互作用参数 J 的变化特征. 图3表明, 这三个量在低温下随 J 的变化表现出相似的行为趋势, 例如它们都是关

于 $J = 0$ 对称, 说明量子关联都存在于磁铁和反磁铁中, 而且它们会随着相互作用参数 $|J|$ 的增大而增大. 因此, 我们可以通过增大相互作用参数而获得其相应的最大值, 其中 D_2 通过极小的相互作用

参数而达到最大. 当温度升高至 $T = 1.5$, 这三个量随着温度增加而减小, 这是因为系统随着温度的升高处于非关联态和关联态的混合态中造成的. 对于给定的温度, D_1 在合适的相互作用参数点发生突然变化, 而 D_2 和 C 没有这种变化. 随着温度的增加, 存在弱耦合 $|J|$ 的一段区域使得共生度 C 为零, 表明两种改进的几何失协在对抗温度上比热纠缠更强大, 也表明两种几何失协更适合描述热量子关联.

4 结 论

利用两种改进的几何失协, D_1 和 D_2 以及纠缠共生度 C , 我们分析了两比特海森伯 XY 模型的热量子关联, 探讨了磁场 B 、温度 T 及相互作用参数 J 对关联的影响. 结果表明: 在低温和弱磁场下, 这三个量表现出类似的行为, 例如它们关于 $J = 0$ 对称, 表明它们都存在于磁铁和反磁铁中. 但是, 随着温度的升高, 这三个量表现出不同的变化趋势, 例如 D_1 随磁场增大而增大时, D_2 是递减的, 而且热纠缠在较高温度下完全消失, 这说明两种改进的几何失协比热纠缠更强大. 在合适的条件下, 改进的几何失协 D_2 在某一磁场强度或耦合参数点发生突然变化, 而另一种改进的几何失协 D_1 和纠缠共生度 C 没有这种变化. 因此, 我们可以通过磁场强度、温度及相互作用参数来调控量子关联, 也能帮助我们深入理解不同的几何失协量度以及两类不同的量子关联.

在今后的工作中, 我们将研究其他两组分系统或多组分系统的几何失协, 以及其他量子关联特性^[3].

参考文献

[1] Vedral V 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 197

- [2] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
- [3] Modi K, Brodutch A, Cable H, Paterek T, Vedral V 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 1655
- [4] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [5] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413
- [6] Vidal G, Werner R F 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032314
- [7] Arnesen M C, Bose S, Vedral V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 017901
- [8] Wang X G 2002 *Phys. Rev. A* **66** 044305
- [9] Zvyagin A A 2009 *Phys. Rev. B* **80** 144408
- [10] Leggio B, Napoli A, Messina A 2012 *Phys. Lett. A* **376** 339
- [11] Henderson L, Vedral V 2001 *J. Phys. A* **34** 6899
- [12] Ollivier H, Zurek W H 2001 *Phys. Rev. Lett.* **88** 017901
- [13] Jafari R, Kargarian M, Langari A, Siahatgar M 2008 *Phys. Rev. B* **78** 214414
- [14] Gao K, Xu Y L, Kong X M, Liu Z Q 2015 *Physica A* **429** 10
- [15] Gong J M, Tang Q, Sun Y H, Qiao L 2015 *Physica B* **461** 70
- [16] Luo S 2008 *Phys. Rev. A* **77** 042303
- [17] Ali M, Rau A R P, Alber G 2010 *Phys. Rev. A* **81** 042105
- [18] Girolami D, Adesso G 2011 *Phys. Rev. A* **83** 052108
- [19] Chen Q, Zhang C J, Yu S X, Yi X X, Oh C H 2011 *Phys. Rev. A* **84** 042313
- [20] Adesso G, Datta A 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 030501
- [21] Dakić B, Vedral V, Brukner Č 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 190502
- [22] Xie M Q, Guo B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110303
- [23] Wang D Q, He C C 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 043403
- [24] Piani M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 034101
- [25] Chang L, Luo S 2013 *Phys. Rev. A* **87** 062303
- [26] Paula F M, de Oliveira T R, Sarandy M S 2013 *Phys. Rev. A* **87** 164101
- [27] Luo S, Fu S 2010 *Phys. Rev. A* **82** 034302
- [28] He J Z, He X, Zheng J 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050303
- [29] Liu B, Hu Z, Hou X W 2014 *Int. J. Quantum Inform.* **12** 1450027
- [30] Lü H Y, Yuan W, Hou X W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110301 (in Chinese) [吕海艳, 袁伟, 侯喜文 2013 物理学报 **62** 110301]
- [31] Xu J S, Xu X Y, Li C F, Zhang C J, Zou X B, Guo G C 2010 *Nat. Commun.* **1** 7

Thermal geometric discords in a two-qubit Heisenberg XY model*

Fan Hong-Rui Yuan Ya-Li Hou Xi-Wen[†]

(Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079, China)

(Received 3 June 2016; revised manuscript received 15 August 2016)

Abstract

We study the influences of the external magnetic field, temperature, and coupling parameter on the thermal quantum correlation in a two-qubit Heisenberg XY model, where the correlation is described in terms of two modified geometric discords and concurrence. It is shown that those three quantities behave similarly in the regions of lower temperature and weak magnetic field. However, the two geometric discords are more robust against temperature and magnetic field than the concurrence. Moreover, two geometric discords exhibit different behaviors under suitable conditions, that is, one discord increases as the magnetic field rises whereas the other discord decreases. In particular, the discord reveals the phenomenon of sudden change, while neither of other discord and concurrence displays such a phenomenon.

Keywords: geometric discords, concurrence, two-qubit model

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Ac

DOI: [10.7498/aps.65.220301](https://doi.org/10.7498/aps.65.220301)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11174099).

[†] Corresponding author. E-mail: xwhou@phy.cnu.edu.cn