物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

量子隐形传态保真度的新公式及应用

贾芳 刘寸金 胡银泉 范洪义

New formula for calculating the fidelity of teleportation and its applications

Jia Fang Liu Cun-Jin Hu Yin-Quan Fan Hong-Yi

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 220302 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.220302
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.220302
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I22

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 65, No. 22 (2016) 220302

量子隐形传态保真度的新公式及应用*

贾芳 1)2)3)† 刘寸金 2) 胡银泉 2) 范洪义 1)

1) (中国科学技术大学材料化学与工程系, 合肥 230026)

2) (江西师范大学, 光电子通信重点实验室, 南昌 330022)

3) (江西师范大学量子科学与技术中心, 南昌 330022)

(2016 年 4 月 14 日收到; 2016 年 8 月 10 日收到修改稿)

基于传统的 Kimble-Braunstein 量子隐形传态方案, 利用纠缠态表象方法导出了平均意义下输出量子态的密度算符表示——输出态算符与输入态、纠缠源的特征函数的关系, 以及输出态特征函数与以上特征函数的简洁关系. 基于此, 对于任意的双模纠缠源, 进一步推导了传输相干态的保真度公式——它仅仅表示成纠缠源的 Q 函数的一个简洁积分. 这为保真度计算提供了一条方便有效的途径. 作为应用, 我们考察了包括高斯与非高斯纠缠态作为纠缠源实现相干态传输的保真度.

关键词: 量子隐形传态, 保真度, 特征函数, Q 函数

PACS: 03.65.–w, 03.65.Ud **DOI:** 10.7498/aps.65.220302

1 引 言

量子纠缠作为量子信息与量子计算的主要资源之一, 一直都受到实验物理学和理论物理学领域的广泛关注 [1]. 为了更好地实现量子通信和量子计算任务, 无论是对离散变量的量子系统还是连续变量的量子系统, 人们期望制备出具有更高纠缠度的量子纠缠态. 比如, 对于连续变量双模压缩纠缠态, 目前实验上制备的压缩度大约在 1.5(约为 10 dB). 目前, 实验上进一步提高纠缠度仍然是一个具有挑战性的工作.

为了达到提高纠缠度或提高量子隐形传态保真度的目的, 人们从理论和实验上提出了许多有效方法. 其中, 光子增加和光子扣除被认为是简单有效的途径之一. 比如, Ralph 等 [2,3] 提出了利用光子扣除实现双模压缩真空态传输量子态保真度的改善. 实验上, Parigi 等 [4] 利用光子扣除与增加证明了光子增加与扣除算符的不对易性. Hu 等 [5−7] 研究了光子扣除、增加双模压缩热态的统计性质. 最近, Wang 等 [8] 研究了多光子增加或扣除双模压缩真空态的纠缠度等与光子增减数目的关系, 研究表明: 压缩度、纠缠等都能被改善, 并随扣除光子数的增加而增加. 此外, Zhang 等 [9] 研究了多光子增加和扣除双模压缩真空态在量子隐形传态中的应用, 结果表明: 只有对称情况下的光子扣除操作能实现量子隐形传态的改善, 并且隐形传态保真度随扣除的光子数目的增加而表现出更好的行为.

纯化或提高量子纠缠的目的之一在于实现长距离的量子信息通信方案, 如量子计算和量子隐形传态等. 对于连续变量的量子系统, 人们通常采用标准的 Kimble-Braunstein (KB) 传输方案来讨论纠缠源在实现量子隐形传态中的有效性 [10]. 该方案实际上是考虑了理想的、对称的光束分离器以及在幺正变换过程中的单位增益的量子平移操作. 对于非理想的、非对称的光束分离器以及可调的增益参数情况, 最近也进行了详细讨论并给出了改善保真度的一般描述和新的途径 [11].

* 国家自然科学基金 (批准号: 11664017, 11264018, 11464018)、江西省自然科学基金 (批准号: 20151BAB212006)、江西省学位与研究生教育教学改革研究项目 (批准号: JXYJG-2013-027) 和江西省教育厅科技项目 (批准号: GJJ14274, GJJ14276) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jenshier@126.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

在文献[10]中, Braunstein和Kimble考察了一般的高斯型纠缠源传输任意单模量子态的隐形传输保真度, 并导出了一个计算隐形传态保真度的一般公式, 即通过高斯纠缠源和被传输量子态的Wigner函数的积分形式给出保真度. 一般而言, 为了获得高纠缠或高量子隐形传态保真度, 人们通常会进一步制备不同的纠缠源, 比如将通常的高斯纠缠态转换成非高斯纠缠源来达到此目的, 光子扣除双模压缩真空态就是一个典型的例子. 此时, 纠缠源将不再具有高斯特性. 那么, 对于此类一般性的纠缠源, 我们该如何计算其保真度呢?

另一方面, 由于相干态是介于量子与经典之间的连续变量态, 因此常常用作被传输的对象来考察保真度的高低, 以便与无纠缠的情况进行对比. 在以上提及的诸多相关研究中, 利用不同的纠缠源传输相干态是主要研究内容之一. 本文针对任意的纠缠源(包括高斯与非高斯纠缠源、纯态与混合态情况), 基于标准的KB量子隐形传态方案导出一个传输相干态的保真度新公式. 我们的研究发现该公式恰好与纠缠源的Q函数密切相关. 利用此公式, 我们可以极其方便、简洁地计算利用任意纠缠源传输相干态的保真度, 从而使计算更具经济性特点. 这也为保真度的计算提供了一条新的有效途径.

本文安排如下: 利用相干态的完备性和平移算符的反正规乘积表示, 导出任意密度算符的Weyl表示; 利用量子力学纠缠态表象及其相关特点, 进一步导出平均意义下输出量子态的特征函数表示; 借助保真度的特征函数表示以及平移算符的相干态表示, 解析推导了任意纠缠源传输相干态的保真度计算公式. 作为应用, 我们考察了若干高斯与非高斯纠缠态传输相干态的情况. 最后给出了结论.

2 密度算符的Weyl表示

首先推导任意密度算符的Weyl表示. 注意到相干态的完备性关系,

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}|z\rangle\langle z| = 1, \tag{1}$$

这里$|z\rangle$为相干态, (1)式表示投影算符$|z\rangle\langle z|$构成了一个完备的算符空间, 因此其他量子态可以在这个空间中展开. 对于密度算符为ρ的单模量子系统, 可在该算符空间中予以展开, 即

$$\rho = \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} P(z)|z\rangle\langle z|, \tag{2}$$

其中, $P(z)$称为密度算符ρ的P-函数.

另一方面, P-函数与特征函数的关系由下式决定[12]:

$$P(z) = \int \frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\chi_N(\lambda)\,\mathrm{e}^{z\lambda^*-z^*\lambda}, \tag{3}$$

其中, 特征函数$\chi_N(\lambda)$定义为

$$\chi_N(\lambda) = \mathrm{e}^{|\lambda|^2/2}\,\mathrm{Tr}(\rho D(\lambda)) \equiv \mathrm{e}^{|\lambda|^2/2}\chi_{\mathrm{W}}(\lambda), \tag{4}$$

Tr表示求迹, 即平移算符在密度算符ρ下的平均值; $\chi_{\mathrm{W}}(\lambda) \equiv \mathrm{Tr}(\rho D(\lambda))$为对称编序下的特征函数, $D(\lambda) = \exp\{\lambda a^+ - \lambda^* a\}$为系统模式对应的平移算符.

将(3)和(4)式代入(2)式可得

$$\rho = \int \frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\chi_{\mathrm{W}}(\lambda)\,\mathrm{e}^{\frac{|\lambda|^2}{2}} \times \left\{\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\,\mathrm{e}^{z\lambda^*-z^*\lambda}|z\rangle\langle z|\right\}. \tag{5}$$

注意到相干态$|z\rangle$是Bose湮灭算符a的本征态, 即$a|z\rangle = z|z\rangle$, 则上式{ }中的积分可表示成

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\,\mathrm{e}^{z\lambda^*}|z\rangle\langle z|\,\mathrm{e}^{-z^*\lambda} = \mathrm{e}^{a\lambda^*}\,\mathrm{e}^{-a^+\lambda}. \tag{6}$$

实际上, 平移算符$D(-\lambda)$的反正规乘积为$D(-\lambda) = \mathrm{e}^{\frac{|\lambda|^2}{2}}\,\mathrm{e}^{a\lambda^*}\,\mathrm{e}^{-a^+\lambda}$. 因此, 密度算符(5)可表示成

$$\rho = \int \frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\chi_{\mathrm{W}}(\lambda)D(-\lambda), \tag{7}$$

此即密度算符ρ的Weyl展开.

利用(7)式, 我们可将其直接推广至双模密度算符的情况. 对于双模密度算符ρ_{12}, 其Weyl展开可表示为

$$\rho_{12} = \int \frac{\mathrm{d}^2\lambda_1 d^2\lambda_2}{\pi^2}\chi_{\mathrm{W}}(\lambda_1,\lambda_2) \times D_1(-\lambda_1)D_2(-\lambda_2). \tag{8}$$

这里, $\chi_{\mathrm{W}}(\lambda_1,\lambda_2)$为双模量子系统$\rho_{12}$的特征函数, D_1, D_2分别为系统两个模所对应的平移算符.

3 输出量子态的特征函数

本节中, 我们利用(7)和(8)式来推导KB传态方案中输出量子态的特征函数表示. 设Alice持有待传输的目标态ρ_{in}, Alice和Bob分别分享任意纠缠源ρ_{12}中的粒子1和2. 在执行隐形传输操作前, 系统处于初态: $\rho_{\mathrm{in}}\otimes\rho_{12}$. 为了实现隐形传态, Alice需要对其持有的粒子1和ρ_{in}进行联合测量, 即让

粒子1和$\rho_{\rm in}$作为一个对称光束分离器的输入态, 再对输出两端进行测量, 其中一端测量其坐标, 另一端测量其动量. 若将这两端的测量和光束分离器看作一个整体, 则对于粒子1和$\rho_{\rm in}$两输入态而言, 就是实现该系统向纠缠态($|\eta\rangle$)上的投影[13]. 这是因为, 测量后系统态可表示为

$$_{\rm in}\langle p|_1\langle q|B_{1,{\rm in}}\rho_{\rm in}\otimes\rho_{12}B^{+}_{1,{\rm in}}|q\rangle_1|p\rangle_{\rm in}, \tag{9}$$

其中$B_{1,{\rm in}}=\exp\left[\frac{\pi}{4}(a_1a^{+}_{\rm in}-a^{+}_1a_{\rm in})\right]$为光束分离器算符, $\pi/4$表示光束分离器是对称的, 即透射率和反射率相等且为1/2; 此外, 利用坐标、动量本征态的表达式

$$|q\rangle_1=\frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\{-\frac{1}{2}q^2+\sqrt{2}qa^{+}_1-\frac{a^{+2}_1}{2}\}|0\rangle,$$
$$|p\rangle_{\rm in}=\frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\{-\frac{1}{2}p^2+{\rm i}\sqrt{2}pa^{+}_{\rm in}+\frac{a^{+2}_{\rm in}}{2}\}|0\rangle, \tag{10}$$

以及光束分离器的变换关系[14] $B_{1,{\rm in}}a_1B^{+}_{1,{\rm in}}=(a_1+a_{\rm in})/\sqrt{2}, B_{1,{\rm in}}a_{\rm in}B^{+}_{1,{\rm in}}=(a_{\rm in}-a_1)/\sqrt{2}$, 可得

$$|\eta\rangle=\sqrt{\pi}B^{+}_{1,{\rm in}}|q\rangle_1|p\rangle_{\rm in}$$
$$=\exp\{-\frac{|\eta|^2}{2}+\eta a^{+}_1-\eta^*a^{+}_{\rm in}+a^{+}_1a^{+}_{\rm in}\}|00\rangle, \tag{11}$$

其中$\eta=q+{\rm i}p$. (11)式即是可对易算符$Q_1-Q_{\rm in}, P_1+P_{\rm in}$的共同本征态, 即$(Q_1-Q_{\rm in})|\eta\rangle=\sqrt{2}q|\eta\rangle, (P_1+P_{\rm in})|\eta\rangle=\sqrt{2}p|\eta\rangle$. 这里$Q_1|q\rangle_1=q|q\rangle_1$, 及$P_{\rm in}|p\rangle_{\rm in}=p|p\rangle_{\rm in}$, $P_1=(a_1-a^{+}_1)/(i\sqrt{2}), Q_{\rm in}=(a_{\rm in}+a^{+}_{\rm in})/\sqrt{2}, P_{\rm in}=(a_{\rm in}-a^{+}_{\rm in})/(i\sqrt{2})$. 理论上, 纠缠态表象$|\eta\rangle$又可表示成一个单模平移算符作用在一个无限大压缩上得到, 即

$$|\eta\rangle=D_1(\eta)\exp\{a^{+}_1a^{+}_{\rm in}\}|00\rangle$$
$$=D_{\rm in}(-\eta^*)\exp\{a^{+}_1a^{+}_{\rm in}\}|00\rangle, \tag{12}$$

这里, $D_{\rm in}$为待传输模对应的平移算符.

下面, 我们利用(12)式来推导输出量子态的特征函数. 联合测量后, 系统(粒子2)所处的状态为

$$\rho_2(\eta)=\frac{1}{\pi P(q,p)}\{\langle\eta|(\rho_{\rm in}\otimes\rho_{12})|\eta\rangle\}, \tag{13}$$

其中$P(q,p)=Tr[\langle\eta|(\rho_{\rm in}\otimes\rho_{12})|\eta\rangle]/\pi$表示测量结果处于$(q,p)$的概率, 亦为归一化系数.

将密度算符的Weyl的表示(7)和(8)式代入(13)式, 可得

$$\rho_2(\eta)=\frac{1}{\pi P(q,p)}\int\frac{{\rm d}^2\lambda}{\pi}\chi_{\rm in}(\lambda)\frac{1}{\pi^2}\times\int{\rm d}^2\lambda_1{\rm d}^2\lambda_2\chi_{12}(\lambda_1,\lambda_2)\times\{\langle\eta|D_{\rm in}(-\lambda)D_1(-\lambda_1)|\eta\rangle\}\times D_2(-\lambda_2). \tag{14}$$

进一步利用(12)式, 则上式$\{\cdots\}$中结果可写成

$$\langle\eta|D_{\rm in}(-\lambda)D_1(-\lambda_1)|\eta\rangle$$
$$=\langle 00|\exp[a_{\rm in}a_1]D_1(-\lambda-\eta)D_{\rm in}(-\lambda_1-\eta^*)\times\exp[a^{+}_{\rm in}a^{+}_1]|00\rangle\exp\left\{\frac{1}{2}(\eta\lambda^*-\eta^*\lambda)+\frac{1}{2}(\lambda_1\eta-\lambda^*_1\eta^*)\right\}$$
$$=\{\langle\eta+\lambda|\eta+\lambda^*_1\rangle\}\exp\left\{\frac{1}{2}(\eta\lambda^*-\eta^*\lambda)+\frac{1}{2}(\lambda_1\eta-\lambda^*_1\eta^*)\right\}$$
$$=\pi\delta^{(2)}(\lambda-\lambda^*_1)\exp(\lambda_1\eta-\lambda^*_1\eta^*). \tag{15}$$

(15)式计算中我们利用了两平移算符乘积的算符恒等式$D(\alpha)D(\beta)=\exp[{\rm Im}(\alpha\beta^*)]D(\alpha+\beta)$和纠缠态表象的正交特点: $\langle\eta|\eta'\rangle=\pi\delta^{(2)}(\eta-\eta')$. 因此, 测量后的密度算符(14)可改写成

$$\rho_2(\eta)=\frac{1}{\pi P(q,p)}\int\frac{{\rm d}^2\lambda_1{\rm d}^2\lambda_2}{\pi^2}\exp(\lambda_1\eta-\lambda^*_1\eta^*)\times\chi_{\rm in}(\lambda^*_1)\chi_{12}(\lambda_1,\lambda_2)D_2(-\lambda_2). \tag{16}$$

当完成关联测量后, Alice需要将测量结果(q,p)通过经典信道告知Bob. Bob在接收到该信息后对其所持有的量子态进行幺正操作(平移操作), 以期使得操作后的量子态变成待传输的量子态$\rho_{\rm in}$. Bob平移后的量子态为:$D_2(\eta)\rho_2D^{+}_2(\eta)$. 通常情况下, 对于连续变量系统, 观测者对多次测量感兴趣, 即Bob通过对所有测量输出取平均来构建原来的待传送态, 即平均量子态密度算符$\bar{\rho}_{2,{\rm out}}$为

$$\bar{\rho}_{2,{\rm out}}=\int{\rm d}^2\eta D_2(\eta)\rho_2D^{+}_2(\eta)P(q,p)$$
$$=\int\frac{{\rm d}^2\eta}{\pi}\int\frac{{\rm d}^2\lambda_1{\rm d}^2\lambda_2}{\pi^2}\exp(\lambda_1\eta-\lambda^*_1\eta^*)\times\chi_{\rm in}(\lambda^*_1)\chi_{12}(\lambda_1,\lambda_2)D_2(\eta)\times D_2(-\lambda_2)D_2(-\eta). \tag{17}$$

(16)式或(17)式即为KB传输方案中输出量子态的特征函数表示.

由特征函数定义, 即 $\chi_{\mathrm{W}}(\lambda)\equiv\mathrm{Tr}(\rho D(\lambda))$ 可得平均意义下的输出量子态的特征函数 $\overline{\chi}_{2,\mathrm{out}}(\lambda)$ 为

$$\begin{aligned}\overline{\chi}_{2,\mathrm{out}}(\lambda)=&\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda_1\mathrm{d}^2\lambda_2}{\pi^2}\exp(\lambda_1\eta-\lambda_1^*\eta^*)\\&\times\chi_{\mathrm{in}}(\lambda_1^*)\chi_{12}(\lambda_1,\lambda_2)\,\mathrm{Tr}[D_2(\eta)\\&\times D_2(-\lambda_2)D_2(-\eta)D_2(\lambda)].\end{aligned}\tag{18}$$

利用平移算符乘积的恒等式公式以及公式 $\mathrm{Tr}\{D(-\lambda_2)\}=\pi\delta^{(2)}(\lambda_2)$, 可得 (18) 式的算符迹为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_2\{D_2(\eta)D_2(-\lambda_2)D_2(-\eta)D_2(\lambda)\}\\&=\pi\delta^{(2)}(\lambda-\lambda_2)\exp\bigg[\frac{1}{2}(\lambda_2^*\lambda-\lambda_2\lambda^*)\\&\quad+\lambda_2\eta^*-\lambda_2^*\eta\bigg].\end{aligned}\tag{19}$$

将 (19) 式代入 (18) 式并利用积分公式 [15]

$$\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi^2}\exp\{z\alpha^*-z^*\alpha\}=\delta^{(2)}(\alpha),\tag{20}$$

有

$$\begin{aligned}\overline{\chi}_{2,\mathrm{out}}(\lambda)=&\int\frac{\mathrm{d}^2\eta\mathrm{d}^2\lambda_1\mathrm{d}^2\lambda_2}{\pi^2}\delta^{(2)}(\lambda-\lambda_2)\\&\times\exp\{(\lambda_1-\lambda_2^*)\eta+(\lambda_2-\lambda_1^*)\eta^*\}\\&\times\chi_{\mathrm{in}}(\lambda_1^*)\chi_{AB}(\lambda_1,\lambda_2)\\&\times\exp\left[\frac{1}{2}(\lambda_2^*\lambda-\lambda_2\lambda^*)\right]\\=&\frac{1}{\pi^2}\int\mathrm{d}^2\eta\mathrm{d}^2\lambda_1\exp\{(\lambda_1-\lambda^*)\eta\\&-(\lambda_1^*-\lambda)\eta^*\}\chi_{\mathrm{in}}(\lambda_1^*)\chi_{12}(\lambda_1,\lambda)\\=&\int\mathrm{d}^2\lambda_1\delta^{(2)}(\lambda_1-\lambda^*)\\&\times\chi_{\mathrm{in}}(\lambda_1^*)\chi_{12}(\lambda_1,\lambda),\end{aligned}\tag{21}$$

即平均意义下的输出态密度算符对应的特征函数为

$$\overline{\chi}_{2,\mathrm{out}}(\lambda)=\chi_{\mathrm{in}}(\lambda)\chi_{12}(\lambda^*,\lambda).\tag{22}$$

至此, 我们应用纠缠态表象及其相关特点完成了平均意义下输出量子态特征函数的推导, 即建立了输出量子态特征函数与待传输量子态、纠缠源的特征函数的关系 [16].

4 新保真度公式的导出

下面, 我们进一步推导隐形传态保真度新公式——待传输的量子态 ρ_{in} 和输出端的量子态 $\bar{\rho}_{2,\mathrm{out}}$ 的保真度. 对于密度算符 ρ_1 和 ρ_2, 保真度可定义为 $F=\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{in}}\bar{\rho}_{2,\mathrm{out}})$. 为了能获得计算隐形传态方案的保真度, 我们利用计算 F 的特征函数表示.

注意到平移算符的求迹对应 delta 函数, 利用 (7) 式则 $\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{in}}\bar{\rho}_{2,\mathrm{out}})$ 可写成

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{in}}\bar{\rho}_{2,\mathrm{out}})\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda_1\mathrm{d}^2\lambda_2}{\pi^2}\chi_{\mathrm{in}}(\lambda_1)\bar{\chi}_{2,\mathrm{out}}(\lambda_2)\\&\quad\times\mathrm{Tr}(D(-\lambda_1)D(-\lambda_2))\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\chi_{\mathrm{in}}(\lambda)\bar{\chi}_{2,\mathrm{out}}(-\lambda).\end{aligned}\tag{23}$$

因此, 隐形传态的保真度 F 为

$$F=\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\chi_{\mathrm{in}}(\lambda)\chi_{\mathrm{in}}(-\lambda)\chi_{12}(-\lambda^*,-\lambda).\tag{24}$$

在讨论连续变量量子态的隐形传态时, 相干态 $\langle\alpha|$ 是研究最多的量子态之一. 此外, 在理想的 KB 方案 (包括对称的光束分离器) 中, 已有研究证明: 当考虑相干态作为输入时, 保真度与相干态的振幅无关 [11]. 因此, 为方便考虑真空态情况, 其特征函数为 $\chi_{\mathrm{in}}(\lambda)=\mathrm{Tr}[0\rangle\langle0|\,\mathrm{e}^{\lambda a^+-\lambda^*a}]=\exp(-|\lambda|^2/2)$. 将其代入 (24) 式可得相干态的隐形传态保真度为

$$F=\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\exp(-|\lambda|^2)\chi_{12}(-\lambda^*,-\lambda),\tag{25}$$

即对于任意双模纠缠源 ρ_{12}, 只要知道其特征函数, 通过 (25) 式就可以获得隐形传态保真度.

另一方面, 注意到平移算符的反正规乘积为 $D(-\lambda)=\mathrm{e}^{\frac{|\lambda|^2}{2}}\,\mathrm{e}^{a\lambda^*}\,\mathrm{e}^{-a^+\lambda}$, 则在相干态表象下, 平移算符可表示成

$$\begin{aligned}D_1(-\lambda^*)=&\int\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\pi}\exp\left\{\frac{|\lambda|^2}{2}+z_1\lambda^*\right.\\&\left.-z_1^*\lambda\right\}|z_1\rangle\langle z_1|,\\D_2(-\lambda)=&\int\frac{\mathrm{d}^2z_2}{\pi}\exp\left\{\frac{|\lambda|^2}{2}+z_2\lambda\right.\\&\left.-z_2^*\lambda^*\right\}|z_2\rangle\langle z_2|.\end{aligned}\tag{26}$$

利用特征函数定义可知

$$\begin{aligned}&\chi_{12}(-\lambda^*,-\lambda)\\&=\mathrm{Tr}[\rho_{12}D_1(-\lambda^*)D_2(-\lambda)]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2z_2}{\pi}\exp\{|\lambda|^2+z_1\lambda^*-z_1^*\lambda\\&\quad+z_2\lambda-z_2^*\lambda^*\}\\&\quad\times\langle z_1,z_2|\rho_{12}|z_1,z_2\rangle.\end{aligned}\tag{27}$$

将 (27) 式代入 (25) 式, 并利用积分 (20) 式可得

$$F = \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \langle z, z^* | \rho_{12} | z, z^* \rangle \\ = \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} Q(z, z^*), \tag{28}$$

其中, $Q(z, z^*) = \langle z, z^* | \rho_{12} | z, z^* \rangle$. (28) 式即为计算任意纠缠源传输相干态的保真度新公式. 由此可见, 对于任意双模纠缠源, 相干态的传输保真度恰恰与纠缠源的Q-函数密切相关. 当纠缠源的Q-函数已知时, 我们可直接通过 (28) 式计算传态保真度; 当纠缠源密度算符的正规乘积已知时, 我们也可直接通过 (28) 式计算保真度. 这里, 我们不仅可以通过相空间分布函数来计算保真度, 而且将保真度与纠缠源算符建立起了密切联系, 可以方便我们从多种不同角度考察问题, 如当纠缠源处于环境之中, 只需利用密度算符主方程中密度算符的Kraus算符和表示给出相应密度算符表示, 即可计算有环境影响下的保真度.

5 新公式的应用

下面, 我们考虑新保真度公式的几个应用.

5.1 双模压缩真空态作为纠缠源

首先, 考虑用双模压缩真空态实现相干态的隐形传态. 双模压缩真空态为

$$S_2(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|00\rangle \\ = \exp[r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} a^+ b^+ - r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} ab]|00\rangle \\ = \operatorname{sech} r \exp[a^+ b^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tanh r]|00\rangle. \tag{29}$$

利用 (29) 式中的第二式, 则双模压缩真空态的Q函数可直接写出:

$$Q(z, z^*) \\ = \operatorname{sech}^2 r \exp[-2|z|^2(1 - \cos\theta \tanh r)]. \tag{30}$$

将 (30) 式代入 (28) 式并利用积分公式 [17]

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \exp(\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^*) \\ = -\frac{1}{\zeta} \exp\left\{-\frac{\xi\eta}{\zeta}\right\}, \tag{31}$$

可得

$$F = \frac{1}{2\cosh^2 r - \cos\theta \sinh 2r} \\ \leqslant \frac{1 + \tanh r}{2}. \tag{32}$$

当 $\theta = 0$ 时, 此式恰好为双模压缩真空态传输相干态的保真度 [9].

5.2 光子增加双模压缩真空态作为纠缠源

作为第二个例子, 我们考察双模光子增加压缩真空态. 理论上, 该态由产生算符 $a^+(b^+)$ 连续作用于双模压缩真空态 $S_2|00\rangle$ 而得 [5–7](为方便, 这里取 $\theta = 0$). 其形式如下

$$|\mathrm{PATMSV}\rangle \\ = N_{m,n} a^{+m} b^{+n} S_2 |00\rangle \\ = \operatorname{sech} r N_{m,n} a^{+m} b^{+n} \,\mathrm{e}^{a^+ b^+ \tanh r} |00\rangle, \tag{33}$$

其中 $N_{m,n}$ 为归一化常数 [5–7]: $N_{m,n}^{-2} = m!n! \cosh^{2n} r P_m^{(0,n-m)}(\cosh 2r)$, m 和 n 分别为 a, b 模光子增加数目 (正整数). 利用微分表示形式, 将光子增加操作改写成指数形式, 即

$$|\mathrm{PATMSV}\rangle \\ = \operatorname{sech} r N_{m,n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial \tau^n} \\ \times \mathrm{e}^{t a^+ + \tau b^+ + a^+ b^+ \tanh r} |00\rangle|_{t=\tau=0}. \tag{34}$$

因此, 光子增加压缩真空态的Q函数可表示成

$$Q(z, z^*) = |\langle z, z^* | \mathrm{PATMSV} \rangle|^2 \\ = \operatorname{sech}^2 r N_{m,n}^2 \,\mathrm{e}^{-2|z|^2(1 - \tanh r)} \\ \times \frac{\partial^{2m+2n}}{\partial t^m \partial \tau^n \partial t'^m \partial \tau'^n} \\ \times \mathrm{e}^{t z^* + \tau z + t' z + \tau' z^*}|_{t=\tau=t'=\tau'=0}. \tag{35}$$

将 (35) 式代入 (28) 式并利用 (31) 式积分, 可得传态保真度为

$$F = N_{m,n}^2 \operatorname{sech}^2 r \frac{\partial^{2m+2n}}{\partial t^m \partial \tau^n \partial t'^m \partial \tau'^n} \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \\ \times \mathrm{e}^{-2|z|^2(1 - \tanh r) + (t + \tau') z^* + (\tau + t') z}|_{t=\tau=t'=\tau'=0} \\ = \frac{N_{m,n}^2 \operatorname{sech}^2 r}{2(1 - \tanh r)} \frac{\partial^{2m+2n}}{\partial t^m \partial \tau^n \partial t'^m \partial \tau'^n} \\ \times \exp\left\{\frac{(t + \tau')(\tau + t')}{2(1 - \tanh r)}\right\}_{t=\tau=t'=\tau'=0}. \tag{36}$$

特别地, 当 $m = n = 0$ 时, (36) 式正好退化为 (32) 式的结果. 不失一般性, 我们假定 $m \leqslant n$, 则利用新公式 [18]

$$\frac{\partial^{2m+2n}}{\partial t^m \partial t'^m \partial \tau^n \partial \tau'^n} \\ \times \exp\{A(tt' + \tau'\tau) + B(t\tau + t'\tau')\}_{t=\tau=t'=\tau'=0} \\ = m!n! A^{n-m} (B^2 - A^2)^m P_m^{(n-m,0)}$$

$$\times [(B^2+A^2)/(B^2-A^2)], \tag{37}$$

这里 $P_m^{(n-m,0)}$ 为Jacobi多项式, 可得

$$F = F_0 F_a, \tag{38}$$

其中

$$F_0 = \frac{1+\tanh r}{2}, \tag{39}$$

$$F_a = \sum_{s=0}^{\min[m,n]} \frac{N_{m,n}^2 (m!n!)^2}{s!s!(n-s)!(m-s)!} \times \left(\frac{1}{2(1-\tanh r)}\right)^{m+n}, \tag{40}$$

其中 F_0 为双模压缩真空态传输相干态的保真度 (32), 而 F_a 为光子增加操作引入的多项式项. (38)—(40) 式就是利用光子增加双模压缩真空态传输相干态保真度的解析表达式.

5.3 光子扣除双模压缩真空态作为纠缠源

最后, 我们考虑光子扣除双模压缩态情况, 其定义为

$$\begin{aligned} &|\mathrm{PSTMSV}\rangle \\ &= \bar{N}_{m,n} a^m b^n S_2 |00\rangle \\ &= \operatorname{sech} r \bar{N}_{m,n} a^m b^n \mathrm{e}^{a^+ b^+ \tanh r} |00\rangle, \end{aligned} \tag{41}$$

其中 $\bar{N}_{m,n}$ 为归一化常数[18,19]: $\bar{N}_{m,n}^{-2} = m!n! \sinh^{2n} r P_m^{(n-m,0)}(\cosh 2r)$. 与光子增加情况类似, 我们将 (41) 式改写成

$$\begin{aligned} &|\mathrm{PSTMSV}\rangle \\ &= \bar{N}_{m,n} \operatorname{sech} r \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial \tau^n} \mathrm{e}^{(a^+ + t)(b^+ + \tau) \tanh r} |00\rangle|_{t=\tau=0}, \end{aligned} \tag{42}$$

这里, 我们使用了算符公式 $\mathrm{e}^{ta} a^+ \mathrm{e}^{-ta} = a^+ + t$[12]. 利用计算光子增加双模压缩态Q函数的类似方法, 可得

$$\begin{aligned} &Q(z, z^*) \\ &= \bar{N}_{m,n}^2 \operatorname{sech}^2 r\, \mathrm{e}^{-2|z|^2(1-\tanh r)} \times \frac{\partial^{2m+2n}}{\partial t^m \partial \tau^n \partial t'^m \partial \tau'^n} \\ &\quad \times \mathrm{e}^{[\tau t + \tau' t' + (t+\tau')z + (\tau + t')z^*] \tanh r}|_{t=\tau=t'=\tau'=0}. \end{aligned} \tag{43}$$

将 (43) 式代入 (28) 式并利用 (31) 式积分以及 (37) 式, 最后可得

$$\begin{aligned} F &= F_0 F_s, \\ F_s &= \bar{N}_{m,n}^2 m!n! 2^m (F_0 \sinh^2 r)^n P_m^{(n-m,0)} \\ &\quad \times \left\{\frac{F_0}{4}(2 + \mathrm{e}^{2r} + 5\mathrm{e}^{-2r})\right\}. \end{aligned} \tag{44}$$

其中 F_0 定义在 (39) 式, F_s 为光子扣除而引入的多项式. (44) 式与文献 [8] 中的 (41) 式完全相同.

6 结 论

基于标准的KB量子隐形传态方案和单、双模密度算符的Weyl展开, 我们利用量子力学纠缠态表象 $|\eta\rangle$ 的正交性等特点, 导出了平均意义下输出量子态的密度算符与任意待传输态、纠缠源的特征函数的关系. 基于该结果, 进一步导出了输出量子态特征函数和待传输量子态、纠缠源的特征函数的简洁关系. 此外, 利用保真度的特征函数表示, 导出了对于相干输入态的保真度新公式. 研究表明: 保真度与纠缠源的Q函数密切联系. 当知道纠缠源的Q函数或密度算符的正规乘积时, 即可方便有效地计算相应的传输保真度公式. 这为保真度的计算提供了一条新途径.

参考文献

[1] Bouwmeester D, Ekert A K, Zeilinger A 2000 *The Physics of Quantum Information* (Berlin: Springer)

[2] Cochrane P T, Ralph T C, Mibum G J 2002 *Phys. Rev. A* **65** 062306

[3] Cochrane P T, Ralph T C 2003 *Phys. Rev. A* **67** 22313

[4] Parigi V, Zavatta A, Kim M S, Bellini M 2007 *Science* **317** 1890

[5] Hu L Y, Zhang Z M 2012 *J. Opt. Soc. Am. B* **29** 529

[6] Hu L Y, Jia F, Zhang Z M 2012 *J. Opt. Soc. Am. B* **29** 1456

[7] Hu L Y, Zhang Z M 2013 *J. Opt. Soc. Am. B* **30** 518

[8] Wang S, Hou L L, Chen X F, Xu X F 2015 *Phys. Rev. A* **91** 063832

[9] Zhang H L, Hu Y Q, Jia F, Hu L Y 2014 *Int. J. Theor. Phys.* **53** 2091

[10] Braunstein S L, Kimble H J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 869

[11] Hu L Y, Liao Z Y, Ma S L, Zubairy M S 2016 *Phys. Rev. A* **93** 033807

[12] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press)

[13] Fan H Y 2002 *Phys. Lett. A* **294** 253

[14] Jia F, Xu X X, Liu C J, Huang J H, Hu L Y, Fan H Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 220301 (in Chinese) [贾芳, 徐学翔, 刘寸金, 黄接辉, 胡利云, 范洪义 2014 物理学报 **63** 220301]

[15] Fan H Y 1997 *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publisher) (in Chinese) p27 [范洪义 1997 量子力学表象与变换论——狄拉克符号法进展 (上海: 上海科技出版社) p27]

[16] Marian P, Marian T A 2006 *Phys. Rev. A* **74** 042306

[17] Puri R R 2001 *Mathematical Methods of Quantum Optics* (Berlin: Springer-Verlag) (Appendix A)

[18] Hu L Y, Fan H Y, Zhang Z M 2013 *Chin. Phys. B* **22** 034202

[19] Xu X X, Hu L Y, Fan H Y 2009 *Mod. Phys. Lett. A* **24** 2623

New formula for calculating the fidelity of teleportation and its applications*

Jia Fang[1)2)3)†] Liu Cun-Jin[2)] Hu Yin-Quan[2)] Fan Hong-Yi[1)]

1) (*Department of Material Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

2) (*Key Laboratory of Optoelectronic and Telecommunication, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China*)

3) (*Center for Quantum Science and Technology, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China*)

(Received 14 April 2016; revised manuscript received 10 August 2016)

Abstract

Quantum teleportation plays an important role in quantum information science. In order to obtain the effect of quantum teleportation of a quantum state by using an entangled resource, the fidelity of teleporting the quantum state should be calculated. Braunstein and Kimble [*Phys. Rev. Lett.* **80** 869 (1998)] derived a formula of calculating the fidelity of quantum teleportation for Gaussian entangled resource and any input state to be teleported. Then, the point is how to calculate the quantum teleportation fidelity for any entangled resource. In this paper, werealize this purpose by using the entangled state representation. First, we derive the Weyl expansion of any density operator by using the completeness relation between coherent state and P-representation. Then using the orthogonal property of entangled state representation and the traditional Kimble-Braunstein scheme of quantum teleportation, we further derive the mean density operator of the output state, which means that we establish the relation between the output density operator and the characteristic functions of the input state to be teleported and the entangled resources. The characteristic function of the output state is also derived which is in the concise form relating these two characteristic functions above. Then we further obtain a new formula for calculating the quantum teleportation fidelity for the coherent state input and any two-mode entangled resource. It is shown that the fidelity of teleportation can be easily calculated when the Q-function of the normally ordering form of entangled resource is known. This is a convenient way of obtaining the fidelity of teleportation. As its applications, some Gaussian and non-Gaussian entangled states are examined to teleport the coherent state, whose results are correct.

Keywords: quantum teleportation, fidelity, characteristics function, Q-function

PACS: 03.65.–w, 03.65.Ud **DOI:** 10.7498/aps.65.220302

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11664017, 11264018, 11464018), the Natural Science Foundation of Jiangxi Province of China (Grant No. 20151BAB212006), the Academic Degree and Postgraduate Education Foundation of Jiangxi Province of China (Grant No. JXYJG-2013-027), and the Education Department of Jiangxi Province of China (Grant Nos. GJJ14274, GJJ14276).

† Corresponding author. E-mail: jenshier@126.com