

网络规模衰减的随机生灭网络平均度

张晓军 钟守铭

Average degree under different network sizes for random birth-and-death networks

Zhang Xiao-Jun Zhong Shou-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 230201 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.230201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.230201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I23>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

不同粒径 Janus 微球的自驱动: 实验及驱动机制对比

Two different self-propulsion types of Janus microspheres: from the comparative experiments and driving mechanisms

物理学报.2016, 65(22): 220201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.220201>

广义平面应变锂离子电池柱形梯度材料颗粒电极中扩散诱导应力分析

Stress analysis of a cylindrical composition-gradient electrode of lithium-ion battery in generalized plane strain condition

物理学报.2016, 65(10): 100201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.100201>

硅薄膜太阳能电池表面纳米线阵列光学设计

Optical design of nanowire array on silicon thin film solar cell

物理学报.2016, 65(7): 070201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.070201>

广义非线性薛定谔方程描述的波坍缩及其演变

Collapse and evolution of wave field based on a generalized nonlinear Schrödinger equation

物理学报.2016, 65(4): 040201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.040201>

点堆中子动力学方程组曲率权重法的解

Curvature weight method of solving the point reactor neutron kinetic equations

物理学报.2015, 64(22): 220201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.220201>

## 网络规模衰减的随机生灭网络平均度\*

张晓军† 钟守铭

(电子科技大学数学科学学院, 成都 611731)

(2016年5月28日收到; 2016年6月30日收到修改稿)

在社会和生物网络中, 每个智能体都存在生与灭过程, 这些演化网络可能存在一些特殊的性质. 近年来, 这些生灭网络受到了广泛的关注, 大部分的生灭网络的研究都聚焦于度分布的求解和它们的性质. 本文研究了节点增加概率  $0 < p < 1/2$  的随机生灭网络在稳态情形下不同规模的网络的平均度, 给出了平均度的基本性质和精确求解结果. 首先, 根据基于随机过程规则 (SPR) 的 Markov 链方法, 给出了节点度的稳态方程组, 由此得到不同网络规模的平均度的递推方程组; 其次, 根据递推方程组研究了平均度的性质, 指出不同网络规模下的平均度严格单调递增收敛于  $2mq$ ; 利用这些性质, 运用生成函数法求解出不同网络规模的平均度的精确表达式; 最后, 采用数值模拟方法验证了平均度的精确求解结果和性质, 讨论了平均度与节点增加概率  $p$  以及连接数  $m$  之间的关系.

**关键词:** 随机生灭网络, 网络规模, 平均度, 生成函数法

**PACS:** 02.50.Ga, 02.60.Cb, 64.60.aq

**DOI:** 10.7498/aps.65.230201

## 1 引言

不同于纯增长网络, 现实中的许多网络如 World Wide Web<sup>[1]</sup>、朋友关系网<sup>[2]</sup>、通讯网络<sup>[3]</sup>以及食物链网络<sup>[4,5]</sup>等, 在这些网络中由于每个节点都有它的生命周期, 从而导致网络在演化过程中始终伴随着节点的增减. 研究这些生灭网络的统计特征、路由策略、社团结构、网络同步与控制等具有重要的理论和现实意义. 近年来, 一些节点具有生与灭特征的演化网络模型逐渐被研究者们提出<sup>[6-14]</sup>, 如 Slater 等<sup>[9]</sup>考虑了一类允许死亡概率的成长树模型; Saldaña<sup>[12]</sup>研究了一类随机增长网络, 其中节点的生和死是基于一个微分质量平衡方程; Ben-Naim 和 Krapivsky<sup>[13]</sup>讨论了一类成长随机网络, 在每一时间步, 以速率  $a(a \geq 1)$  加入一个节点到网络中, 同时以速率 1 随机删除一个节点; Sarahar 和 Roychowdhury<sup>[8]</sup>考虑了一类 ad hoc 网络, 新节点具有优先链接和现有节点以恒定速率被

均匀删除; Moor 等<sup>[10]</sup>讨论了一类加减网络, 在每一单位时间加入一个节点, 并以概率  $p$  随机删除一个节点. 这些生灭网络模型都考虑了节点生与灭的演化过程, 但在演化规则中基本上都要求每一时间步加入一个新节点到原有网络中, 同时以一定概率从网络中删除一个节点, 从而保证了在每一时间步网络规模即节点数增长或者保持不变, 而对网络规模波动的演化网络(即每一时刻网络的节点数既可以增加也可以减少的演化网络)及其统计特征研究很少.

每个演化网络都会经历从产生、快速成长、成熟、衰退直至死亡这样一个过程. 作为演化网络中一个最基本的模型, 随机生灭网络 (RBDN) 模型被首次提出<sup>[15]</sup>: 在每一单位时间, 以概率  $p(0 < p < 1)$  加入一个新节点, 新加入节点与原网络中  $m$  个老节点链接, 或者以概率  $q = 1 - p$  从网络中删除一个节点; 文中较为详细地研究了 RBDN 的一些统计特征如网络规模、度分布、尾部特征等. 对于 RBDN, 可用  $p$  ( $0 < p < 1$ ) 的不同取值来描

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61273015) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: sczhxj@uestc.edu.cn

述演化网络处在不同的阶段,但不同阶段的RBDN有何重要的性质、特征,这方面的研究尚未展开,特别是当演化网络处在衰退期时,其节点增加概率  $p < 1/2$ ,其网络规模随时间增加不再趋于无穷大,而是逐渐呈几何分布形式,这与增长网络有着本质的区别.在文献[16]中,针对网络规模呈衰减趋势的RBDN的度分布进行了详细的研究,这仅仅是个开始,还有更多的研究需要去完成,如在网络规模衰减时,不同规模下的RBDN的统计特征如度分布、平均度等具有什么样的性质,以及如何求解这些统计特征.

本文我们利用RBDN的状态转移方程对不同网络规模的平均度进行了研究.首先,根据状态转移方程,给出了节点的稳态方程组;其次,根据稳态方程组,得到不同网络规模下的平均度的递推方程,以此研究了平均度的性质,结合这些性质,运用生成函数法给出了平均度的精确表达式;最后用计算机数值模拟验证了文中给出的结论.

本文的结构如下:第2节给出了网络规模衰减的RBDN模型;第3节给出了不同网络规模下的平均度的稳态递推方程组;第4节讨论了不同网络规模下的平均度的性质并给出了平均度的精确求解结果;第5节运用数值模拟方法对文中结论进行了验证;第6节对本文进行了总结.

## 2 RBDN模型

考虑如下RBDN模型[15]:

- 1) 初始网络为  $m + 1$  个节点的完全图;
- 2) 在每单位时间,以概率  $p$  ( $0 < p < 1/2$ ) 加入一个新节点,并且新加入的节点随机与  $m$  个老节点链接;或者以概率  $q = 1 - p$  从网络中删除一个节点.

注:

a) 当一个节点从网络中删除后,所有与该节点相连的边也一并删除;

b) 网络规模存在下界1,也就是如果在时刻  $t$  网络的节点个数为1,则在时刻  $t + 1$ ,我们以概率  $p$  加入一个节点到网络,并链接该节点与网络的老节点,或者以概率  $q$  保持不变;

c) 如果在时刻  $t$ ,网络的节点数小于  $m$ ,则在时刻  $t + 1$ ,以概率  $p$  ( $0 < p < 1/2$ ) 加入一个新节点,

并且新加入节点随机地与所有老节点链接;或者以概率  $q = 1 - p$  从网络中删除一个节点.

根据RBDN的演化规则,其网络的节点数在演化过程中是不断波动的,在任何时刻  $t$ ,网络的节点数可能大于  $m$ ,也有可能小于  $m$ ,记  $N(t)$  表示网络在时刻  $t$  的网络规模即网络的节点数,满足  $N(0) = m + 1$ ,并记  $N$  表示网络规模的稳态变量,有

$$\Pi_N(n) = P\{N = n\} = \lim_{t \rightarrow +\infty} P\{N(t) = n\}, \quad n \geq 1. \quad (1)$$

由于  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一个具有下界1的一维随机游走,从而网络规模的稳态变量  $N$  服从几何分布[15].

$$\Pi_N(n) = \frac{q-p}{q} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (2)$$

(2)式说明,当节点增加概率  $p < 1/2$  时,演化网络的稳态网络规模不再为无穷大,而是以几何分布形式取所有正整数.自然地,一类重要的问题是,当RBDN在演化过程中进入到稳态情形时,不同规模下的网络具有什么样的统计特征以及如何计算这些统计特征,目前这方面的研究尚未开始.度分布作为最重要的一个统计特征[17-29],文献[15,16]给出了网络规模衰减的RBDN的度分布精确求解结果.在此基础上,本文对稳态情形下不同规模的演化网络的平均度的性质及计算进行了研究.

## 3 不同网络规模下的平均度

### 3.1 稳态方程组

根据基于随机过程规则的Markov链方法[24],我们首先用  $(n, k)$  来描述RBDN在演化过程中节点所处的状态,其中  $n$  为网络中节点的个数即网络规模,  $k$  表示节点的度;用  $NK(t)$  表示节点在时刻  $t$  的状态,  $\{NK(t), t \geq 0\}$  为一齐次Markov链,其状态空间  $E = \{(n, k), n \geq 1, 0 \leq k \leq n - 1\}$ ,令  $\mathbf{P}$  表示  $\{NK(t), t \geq 0\}$  的一步转移概率矩阵.令  $\tilde{\mathbf{P}}(0)$  和  $\tilde{\mathbf{P}}(t)$  分别表示  $NK(0)$  和  $NK(t)$  的概率分布向量,

$$\tilde{\mathbf{P}}_{(n,k)}(t) = \mathbf{P}\{NK(t) = (n, k)\}, \quad (3)$$

有

$$\tilde{\mathbf{P}}(t + 1) = \tilde{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}(0) \cdot \mathbf{P}^{t+1}. \quad (4)$$

初始概率向量  $\tilde{P}(0)$  满足

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{(m+1,m)}(0) &= \mathbf{P}\{NK(0) = (m+1, m)\} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

当节点增加概率  $p < 1/2$  时,  $\{NK(t), t \geq 0\}$  是一非周期遍历的齐次马氏链, 每个状态  $(n, k), n = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  的稳态概率  $\Pi(n, k)$

存在且大于 0. 即

$$\begin{aligned} \Pi(n, k) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{P}_{(n,k)}(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{KV(t) = (n, k)\} > 0, \end{aligned} \quad (6)$$

对 (4) 式两边关于  $t$  求极限, 可以得到稳态概率  $\{\Pi(n, k), n \geq 1, 0 \leq k \leq n-1\}$  之间的线性方程组, 称之为稳态方程组. 详细如下:

(i) 当  $k = 0$  时

$$n\Pi(n, k) = \begin{cases} (n-k)q\Pi(n+1, k) + (k+1)q\Pi(n+1, k+1) + q\Pi(n, k), & n = 1, \\ (n-k)q\Pi(n+1, k) + (k+1)q\Pi(n+1, k+1), & 2 \leq n \leq m, \\ (n-k)q\Pi(n+1, k) + (k+1)q\Pi(n+1, k+1) \\ + (n-1-m)p\Pi(n-1, k), & n \geq m+1; \end{cases} \quad (7)$$

(ii) 当  $1 \leq k \leq m-1$  时

$$n\Pi(n, k) = \begin{cases} (n-k)q\Pi(n+1, k) + (k+1)q\Pi(n+1, k+1) \\ + (n-1)p\Pi(n-1, k-1) + p \left[ \sum_{i=0}^{n-2} \Pi(n-1, i) \right], & n = k+1, \\ (n-k)q\Pi(n+1, k) + (k+1)q\Pi(n+1, k+1) \\ + (n-1)p\Pi(n-1, k-1), & k+2 \leq n \leq m, \\ (n-k)q\Pi(n+1, k) + (k+1)q\Pi(n+1, k+1) \\ + mp\Pi(n-1, k-1) + (n-1-m)p\Pi(n-1, k), & n \geq m+1; \end{cases} \quad (8)$$

(iii) 当  $k = m$  时

$$\begin{aligned} n\Pi(n, m) &= (n-k)q\Pi(n+1, m) + (k+1)q\Pi(n+1, m+1) + mp\Pi(n-1, m-1) \\ &+ (n-1-m)p\Pi(n-1, m) + p \left[ \sum_{i=0}^{n-2} \Pi(n-1, i) \right], \quad n \geq m+1; \end{aligned} \quad (9)$$

(iv) 当  $k \geq m+1$  时

$$\begin{aligned} n\Pi(n, k) &= (n-k)q\Pi(n+1, k) + (k+1)q\Pi(n+1, k+1) + mp\Pi(n-1, k-1) \\ &+ (n-1-m)p\Pi(n-1, k), \quad n \geq m+1. \end{aligned} \quad (10)$$

在时刻  $t$ , 网络规模  $N(t)$  的概率分布与  $NK(t)$  的概率分布存在如下关系,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{N(t) = n\} &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{NK(t) = (n, k)\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{P}_{(n,k)}(t) = \tilde{P}_{(n,\bullet)}(t), \end{aligned} \quad (11)$$

从而有

$$\Pi_N(n) = \mathbf{P}\{N = n\} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{N(t) = n\}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{P}_{(n,i)}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{P}_{(n,i)}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \Pi(n, i) = \Pi(n, \bullet). \end{aligned} \quad (12)$$

记  $K(t)$  表示在时刻  $t$  节点的度分布, 其概率分布为

$$\mathbf{P}\{K(t) = k\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbf{P}\{NK(t) = (n, k)\} \\
 &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \tilde{\mathbf{P}}_{(n,k)}(t) = \tilde{\mathbf{P}}_{(\bullet,k)}(t). \quad (13)
 \end{aligned}$$

令  $K$  为稳态度分布, 有

$$\begin{aligned}
 \Pi_K(k) &= \mathbf{P}\{K = k\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{K(t) = k\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i \geq k+1} \tilde{\mathbf{P}}_{(i,k)}(t) \\
 &= \sum_{i \geq k+1} \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{P}}_{(i,k)}(t) \\
 &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \Pi(n, k) = \Pi(\bullet, k). \quad (14)
 \end{aligned}$$

### 3.2 不同网络规模下的平均度

记  $e_n$  为稳态情形下, 规模为  $n$  的演化网络的平均度, 即

$$e_n = E[K | N = n]. \quad (15)$$

注意到

$$\begin{aligned}
 e_n &= E[K | N = n] \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \mathbf{P}\{K = k | N = n\} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k \cdot \mathbf{P}\{K = k, N = n\}}{\mathbf{P}\{N = n\}} \\
 &= \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \Pi(n, k)}{\Pi_N(n)}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

记

$$\tilde{e}_n = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \Pi(n, k), \quad (17)$$

从而有

$$e_n = \frac{\tilde{e}_n}{\Pi_N(n)}. \quad (18)$$

由于

$$\begin{aligned}
 \langle k \rangle &= E[K] = \sum_{k=0}^{+\infty} k \Pi_K(k) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \sum_{n=1}^{+\infty} \Pi(n, k) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \Pi(n, k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{e}_n, \quad (19)
 \end{aligned}$$

所以  $\tilde{e}_n$  表示规模为  $n$  的网络对平均度  $\langle k \rangle$  的贡献<sup>[16]</sup>, 满足

$$\tilde{e}_1 = 0. \quad (20)$$

根据 (17) 式和状态稳态方程组 (7)–(10),  $\{\tilde{e}_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$  存在如下关系:

$$n\tilde{e}_n = \begin{cases} (n-1)[p\tilde{e}_{n-1} + q\tilde{e}_{n+1} + 2p\Pi_N(n-1)], \\ \quad 2 \leq n \leq m, \\ (n-1)[p\tilde{e}_{n-1} + q\tilde{e}_{n+1}] + 2mp\Pi_N(n-1), \\ \quad n \geq m+1. \end{cases} \quad (21)$$

由 (18) 式和 (21) 式, 可得  $e_n$  如下关系式:

$$ne_n = \begin{cases} (n-1)(qe_{n-1} + pe_{n+1} + 2q), \\ \quad 2 \leq n \leq m, \\ (n-1)(qe_{n-1} + pe_{n+1}) + 2mq, \\ \quad n \geq m+1, \end{cases} \quad (22)$$

其中

$$e_1 = 0. \quad (23)$$

### 4 $e_n$ 的计算

为了计算  $e_n$ , 我们先给出  $e_n$  的几个基本性质.

**性质 1** 对任意  $n > 1$ , 均有

$$0 < e_n < 2mq. \quad (24)$$

证明见附录 A.

**性质 2** 对任意  $n > 1$ , 均有

$$e_n > e_{n-1}, \quad (25)$$

即序列  $\{e_n\}$  单调递增. 证明见附录 B.

**性质 3**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 2mq, \quad (26)$$

证明见附录 C.

性质 1–3 说明了在稳态情形下, 随着  $n$  的逐渐增加, 不同网络规模的平均度  $\{e_n\}$  严格单调递增收敛于  $2mq$ . 利用如上性质, 我们可以采用生成函数法求解  $\{e_n\}$ . 令

$$r_n = 2mq - e_n. \quad (27)$$

对于  $\{r_n\}$ , 有如下结论.

性质 4

$$\sum_{n=2}^{+\infty} r_n = \frac{m(m-1+2q)q}{2p}, \quad (28)$$

证明见附录 D.

根据 (27) 式, (22) 式可转化为如下公式:

$$nr_n = \begin{cases} (n-1)(qr_{n-1} + pr_{n+1} - 2q) + 2mq, & 2 \leq n \leq m, \\ (n-1)(qr_{n-1} + pr_{n+1}), & n \geq m+1. \end{cases} \quad (29)$$

至此, 可以运用生成函数方法求解 (29) 式. 引入生成函数

$$G(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} r_{2+i} \cdot x^i, \quad (30)$$

由 (28) 式, 生成函数  $G(x)$  满足

$$G(1) = \frac{m(m-1+2q)q}{2p}, \quad (31)$$

由 (29) 式, 有

$$G'(x) = 2 \left[ \frac{1-qx}{(1-x)(p-qx)} G(x) - \left[ 2mq^2 + \frac{2mq}{1-x} - \frac{2q(1-x^m)}{(1-x)^2} \right] \times \frac{1}{(1-x)(p-qx)} \right]. \quad (32)$$

求解满足条件 (31) 式的 (32) 式, 得

$$G(x) = \frac{(1-x)^{\frac{2p}{q-p}}}{(p-qx)^{\frac{2q}{q-p}}} \times \int_x^{\frac{p}{q}} \left[ 2mq^2 + \frac{2mq}{1-t} - \frac{2q(1-t^m)}{(1-t)^2} \right] \times \left( \frac{p-qt}{1-t} \right)^{\frac{1}{q-p}} dt, \quad (33)$$

令

$$\frac{1}{q} \frac{p-qt}{1-t} = y, \quad (34)$$

则

$$\begin{cases} t = \frac{p-xy}{q-xy}, \\ \frac{1}{1-t} = \frac{q-xy}{q-p}, \\ dt = -\frac{q-p}{q} \frac{1}{(1-y)^2}. \end{cases} \quad (35)$$

从而

$$G(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} + q^{\frac{2q}{q-p}} \frac{(1-x)^{\frac{2p}{q-p}}}{(p-qx)^{\frac{2q}{q-p}}} \times \int_0^{\frac{p-qx}{q-qx}} \left[ \frac{2m(2q-y)}{(1-y)^2} + \frac{2q}{q-p} \left( \frac{p-xy}{q-xy} \right)^m \right] \times y^{\frac{1}{q-p}} dy. \quad (36)$$

注意到

$$(q-p) \int_0^{\frac{p-qx}{q-qx}} \frac{y^{\frac{1}{q-p}}}{(1-y)^2} dy = (q-qx) \left( \frac{p-qx}{q-qx} \right)^{\frac{2q}{q-p}} - \int_0^{\frac{p-qx}{q-qx}} \frac{y^{\frac{1}{q-p}}}{1-y} dy, \quad (37)$$

所以

$$G(x) = \frac{2mq(1-x) - 1}{(1-x)^2} + \frac{2q}{q-p} q^{\frac{2q}{q-p}} \left( \frac{q-p}{q} \right)^m \frac{(1-x)^{\frac{2p}{q-p}}}{(p-qx)^{\frac{2q}{q-p}}} \times \int_0^{\frac{p-qx}{q-qx}} \left( \frac{q}{q-p} - \frac{1}{1-y} \right)^m y^{\frac{1}{q-p}} dy. \quad (38)$$

由于

$$\left( \frac{q}{q-p} - \frac{1}{1-y} \right)^m = \left( \frac{q}{q-p} \right)^m + \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^i m!}{i!(m-i)!} \left( \frac{q}{q-p} \right)^{m-i} \times \left( \frac{1}{1-y} \right)^i, \quad (39)$$

以及

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 \dots, \quad (40)$$

从而

$$G(x) = \frac{2mq}{1-x} + \frac{2q}{q-p} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[ \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^i m!}{i!(m-i)!} \frac{(i+j-1)!}{j!(i-1)!} \left( \frac{q-p}{q} \right)^i \right] \frac{q-p}{1+(j+1)(q-p)} \left( \frac{1}{q} \right)^j \frac{(p-qx)^j}{(1-x)^{j+2}}, \quad (41)$$

其 Taylor 展式为

$$G(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} x^r 2mq + \sum_{r=0}^{+\infty} x^r \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2q}{1+(j+1)(q-p)} \left[ \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^i m!}{i!(m-i)!} \left(\frac{q-p}{q}\right)^i \frac{(i+j-1)!}{j!(i-1)!} \right] \times \left[ \sum_{l=0}^{\min(j,r)} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-l} \frac{(-1)^l j!}{l!(j-l)!} \frac{(j+1+r-l)!}{(r-l)!(j+1)!} \right], \quad (42)$$

从而有

$$e_n = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2q}{1+(j+1)(q-p)} \left[ \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^i m!}{i!(m-i)!} \left(\frac{q-p}{q}\right)^i \frac{(i+j-1)!}{j!(i-1)!} \right] \times \left[ \sum_{l=0}^{\min(j,n-2)} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-l} \frac{(-1)^l j!}{l!(j-l)!} \frac{(j+n-1-l)!}{(n-2-l)!(j+1)!} \right], \quad n \geq 2. \quad (43)$$

### 5 数值模拟

为验证文中给出结果的正确性, 针对不同链接数  $m$  和不同节点增加概率  $p < 1/2$ , 对  $e_n$  进行了数

值模拟. 每个数值仿真结果均为 1000000 次运行结果 ( $t = 1000$ ) 的平均值. 图 1 对文中给出的  $e_n$  精确求解结果与数值模拟结果进行了对比, 结果显示, 两者符合得很好, 验证了  $e_n$  精确求解结果的正确性.

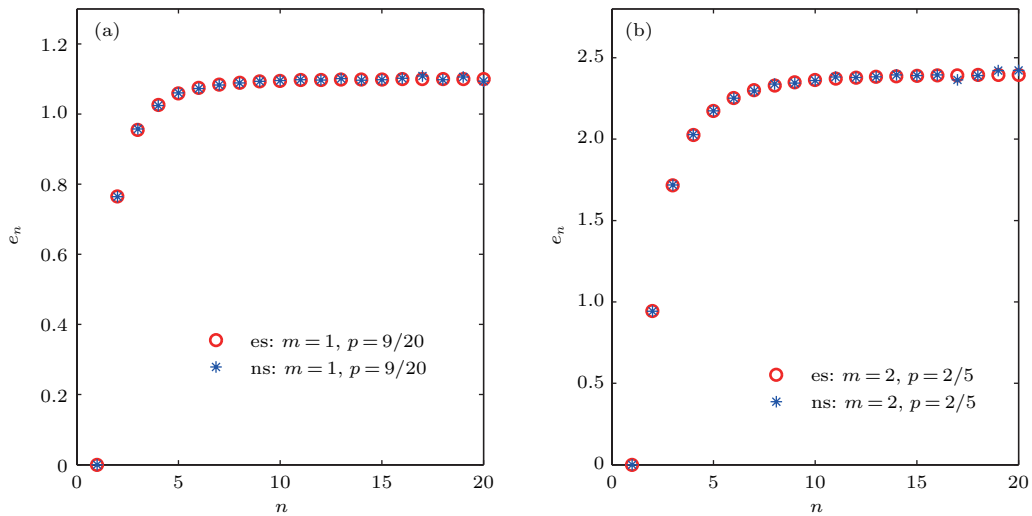


图 1  $e_n$  的精确解与数值解对比 (a)  $m = 1, p = 9/20$ ; (b)  $m = 2, p = 2/5$

Fig. 1. Exact solutions vs. numerical solutions of  $e_n$ : (a)  $m = 1, p = 9/20$ ; (b)  $m = 2, p = 2/5$ .

图 2 给出了  $m = 1, 2, 3$  时,  $e_n$  随  $n$  的变化图形, 从图 2 中可看到, 当  $0 < p < 1/2$  时,  $e_n$  严格单调递增, 且趋近于  $2mq$ . 验证了第 4 节给出的  $e_n$  的前 3 个性质.

我们对同一  $m$ , 不同节点链接概率  $p$  时的  $e_n$  也进行了对比, 如图 3 所示, 可以看到随着节点增加

概率  $p$  的逐渐增加,  $e_n$  收敛于  $2mq$  的速度也在不断增加.

图 4 给出了节点增加概率  $p = 0.4$  时, 不同节点链接数  $m$  条件下,  $e_n$  随  $n$  的变化情况, 可以看到随着  $m$  的逐渐增加,  $e_n$  收敛于  $2mq$  的速度在不断减少.

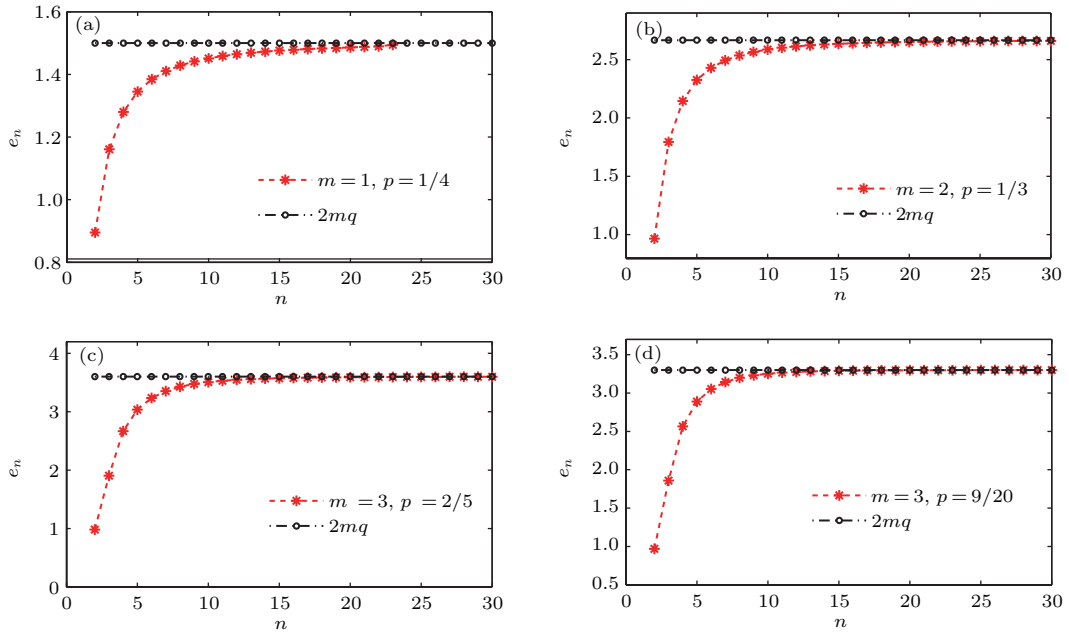


图2 不同链接参数  $m$  和节点增加概率  $p$  下的  $e_n$  随  $n$  的变化 (a)  $m = 1, p = 1/4$ ; (b)  $m = 2, p = 1/3$ ; (c)  $m = 3, p = 2/5$ ; (d)  $m = 3, p = 9/20$

Fig. 2. The  $e_n$  of different link parameters  $m$  and node increase probability  $p$ : (a)  $m = 1, p = 1/4$ ; (b)  $m = 2, p = 1/3$ ; (c)  $m = 3, p = 2/5$ ; (d)  $m = 3, p = 9/20$ .

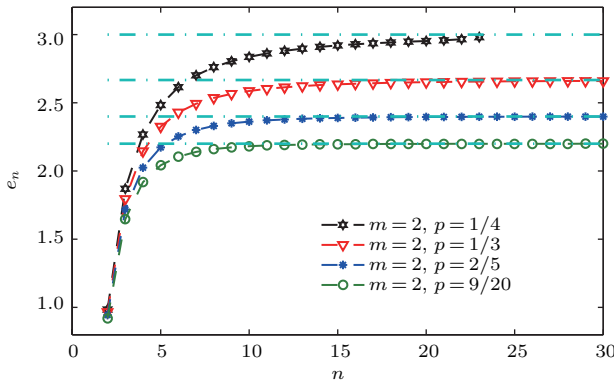


图3  $m = 2$  时,  $e_n$  随  $n$  的变化

Fig. 3. The  $e_n$  of different node increase probability  $p$  ( $m = 2$ ).

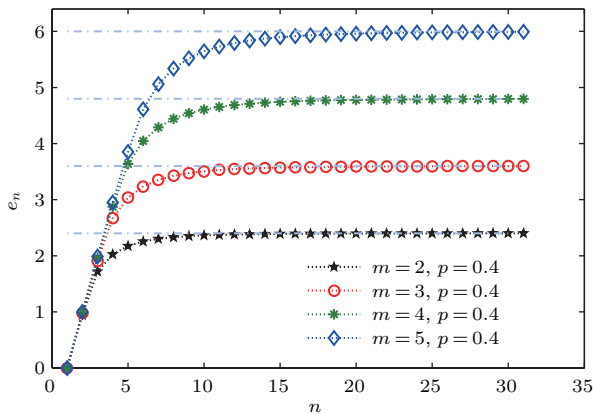


图4  $p = 0.4$  时,  $e_n$  随  $n$  的变化

Fig. 4. The  $e_n$  of different  $m$  ( $p = 0.4$ ).

## 6 结 论

本文针对节点增加概率  $p < 1/2$  时的RBDN, 研究了稳态情形下不同网络规模的平均度的基本性质, 并给出了精确求解结果. 数值仿真结果验证了我们的结论. 目前, 有关网络规模衰减的随机生灭网络这方面的研究才刚刚开始, 还有更多内容如  $e_n$  的收敛速度问题、不同规模网络的度分布的性质和特征等, 这些都需要进一步深入研究.

## 附录 A

性质 1 对任意  $n > 1$ , 均有

$$0 < e_n < 2mq. \quad (44)$$

证明 根据RBDN模型, 有

$$0 < e_n < 2m, \quad (45)$$

当  $n \leq m + 1$  时, 有

$$e_n \leq n - 1 < 2(n - 1)q \leq 2mq, \quad (46)$$

当  $n \geq m + 2$  时, 若存在某个  $e_{n_0} > 2mq$  ( $n_0 \geq m + 2$ ), 取  $i$  为满足  $e_n > 2mq$ , ( $n \geq m + 2$ ) 的最小下标. 则

$$e_i \geq 2mq > e_{i-1}. \quad (47)$$

结合(22)式, 有

$$\begin{aligned} & i(2mq - e_i) \\ &= (i - 1)[q(2mq - e_{i-1}) + p(2mq - e_{i+1})] \end{aligned}$$



$$> (i-1)p(2mq - e_{i+1}), \quad (48)$$

故

$$2mq - e_{i+1} < \frac{i}{i-1}(2mq - e_i) \leq 0, \quad (49)$$

从而

$$\begin{aligned} & (i+1)(2mq - e_{i+1}) \\ &= iq(2mq - e_i) + ip(2mq - e_{i+2}) \\ &\geq (i-1)q(2mq - e_{i+1}) + ip(2mq - e_{i+2}), \end{aligned} \quad (50)$$

整理后可得

$$2mq - e_{i+2} < \frac{i+1}{i}(2mq - e_{i+1}) \leq 0, \quad (51)$$

从而, 对充分大的  $n$ , 有

$$\begin{aligned} & |2mq - e_n| \\ &> \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdots \frac{i+2}{i+1} \frac{i+1}{i} |2mq - e_{i+1}| \\ &= \frac{n-1}{i} |2mq - e_{i+1}| \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (52)$$

这与 (45) 式矛盾, 故性质 1 成立.

### 附录 B

**性质 2** 对任意  $n > 1$ , 均有

$$e_n > e_{n-1}, \quad (53)$$

即序列  $\{e_n\}$  单调递增.

**证明** 先证明对  $n \geq m+1$  时性质 2 成立.

当  $n \geq m+1$  时, 若存在某个  $e_{n_1} \leq e_{n_1-1}$ , ( $n_1 \geq m+1$ ) 取  $j$  为满足  $e_n \leq e_{n-1}$  ( $n \geq m+1$ ) 的最小下标. 则

$$e_j \leq e_{j-1}. \quad (54)$$

由 (22) 式

$$\begin{aligned} & j(2mq - e_j) \\ &= (j-1)[q(2mq - e_{j-1}) + p(2mq - e_{j+1})] \\ &\leq (j-1)[q(2mq - e_j) + p(2mq - e_{j+1})], \end{aligned} \quad (55)$$

简化为

$$(2mq - e_{j+1}) > \frac{j}{(j-1)}(2mq - e_j) \geq 0, \quad (56)$$

从而, 对充分大的  $n$ , 有

$$\begin{aligned} & |2mq - e_n| \\ &> \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdots \frac{i+2}{i+1} \frac{i+1}{i} |2mq - e_{i+1}| \\ &= \frac{n-1}{i} |2mq - e_{i+1}| \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (57)$$

这与 (45) 式矛盾. 故对  $n \geq m+1$  时性质 2 成立. 当  $n = m$  时, 由

$$me_m = (m-1)[qe_{m-1} + pe_{m+1} + 2q], \quad (58)$$

注意到  $e_m < e_{m+1}$ , 有

$$(m-1)q(e_{m-1} + 2) < e_m + (m-1)qe_m, \quad (59)$$

由于  $e_m < 2(m-1)q$ , 从而

$$e_m > e_{m-1}. \quad (60)$$

类似的方法可以得到当  $n = m-1, m-2, \dots, 2$  时, 均有  $e_n > e_{n-1}$ . 由此, 性质 2 成立.

### 附录 C

**性质 3**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 2mq. \quad (61)$$

**证明** 对充分大的  $n$ , 由 (22) 式, 有

$$i(2mq - e_i) = \begin{cases} (i-1)[q(2mq - e_{i-1}) + p(2mq - e_{i+1})] \\ + 2(m+1-i)q, & 2 \leq i \leq m, \\ (i-1)[q(2mq - e_{i-1}) + p(2mq - e_{i+1})], \\ & m+1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (62)$$

对 (62) 式中的前  $n-1$  个方程求和, 得到

$$\begin{aligned} & nq(2mq - e_n) + 2p \sum_{i=2}^n (2mq - e_i) \\ &= (n-1)p(2mq - e_{n+1}) + m(m-1+2q)q \\ &\leq nq(2mq - e_n) + m(m-1+2q)q, \end{aligned} \quad (63)$$

从而

$$\sum_{i=2}^n (2mq - e_i) \leq \frac{m(m-1+2q)q}{2p}, \quad (64)$$

注意到  $\sum_{i=2}^n (2mq - e_i)$  单调递增, 从而必有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=2}^n (2mq - e_i) = c, \quad (65)$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2mq - e_n) = 0. \quad (66)$$

性质 3 得证.

### 附录 D

**性质 4**

$$\sum_{n=2}^{+\infty} r_n = \frac{m(m-1+2q)q}{2p}. \quad (67)$$

证明 注意到  $r_n$  单调递减, 从而对充分大的  $n$ , 有

$$nr_n = (n-1)(qr_{n-1} + pr_{n+1}) < (n-1)r_{n-1}, \quad (68)$$

即  $\{nr_n, n \geq 1\}$  也单调下降且有下界 0, 令

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nr_n = a, \quad (69)$$

若  $a > 0$ , 则有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=n}^{+\infty} (2mq - e_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=n}^{+\infty} r_i \approx \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{a}{i} \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (70)$$

与 (65) 式矛盾, 从而必有  $a = 0$ , 由 (63) 式即得性质 4.

### 参考文献

- [1] Adamic L A, Huberman B A, Barabási A L, Albert R, Jeong H, Bianconi G 2000 *Science* **287** 2115a
- [2] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [3] Guimerà R, Arenas A, Díaz-Guilera A, Giralt F 2002 *Phys. Rev. E* **66** 026704
- [4] Williams R J, Martinez N D 2000 *Nature* **404** 180
- [5] Otto S B, Rall B C, Brose U 2007 *Nature* **450** 1226
- [6] Dorogovtsev S N, Mendes J F F 2001 *Phys. Rev. E* **63** 056125
- [7] Moreno Y, Gómez J B, Pacheco A F 2002 *Europhys. Lett.* **58** 630
- [8] Sarshar N, Roychowdhury V 2004 *Phys. Rev. E* **69** 026101
- [9] Slater J L, Hughes B D, Landman K A 2006 *Phys. Rev. E* **73** 066111
- [10] Moore C, Ghoshal G, Newman M E J 2006 *Phys. Rev. E* **74** 036121
- [11] Farid N, Christensen K 2006 *New. J. Phys.* **8** 212
- [12] Saldaña J 2007 *Phys. Rev. E* **75** 027102
- [13] Ben-Naim E, Krapivsky P L 2007 *J. Phys. A* **40** 8607
- [14] Cai K Y, Dong Z, Liu K, Wu X Y 2011 *Stoch. Proc. Appl.* **121** 885
- [15] Zhang X J, He Z, Rayman-Bacchus L 2016 *J. Stat. Phys.* **162** 842
- [16] Zhang X J, Yang H L 2016 *Chin. Phys. B* **25** 060202
- [17] Barabási A L, Albert R, Jeong H 1999 *Physica A* **272** 173
- [18] Krapivsky P L, Redner S, Leyvraz F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4629
- [19] Dorogovtsev S N, Mendes J F F, Samukhin A N 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4633
- [20] Dorogovtsev S N 2003 *Phys. Rev. E* **67** 045102
- [21] Krapivsky P L, Redner S 2002 *J. Phys. A* **35** 9517
- [22] Shi D H, Chen Q H, Liu L M 2005 *Phys. Rev. E* **71** 036140
- [23] Zheng J F, Gao Z Y, Zhao H 2007 *Physica A* **376** 719
- [24] Zhang X J, He Z S, He Z, Lez R B 2012 *Physica A* **391** 3350
- [25] Tang L, Wang B 2010 *Physica A* **389** 2147
- [26] Smith D M D, Onnela J P, Jones N S 2009 *Phys. Rev. E* **79** 056101
- [27] Ferretti L, Cortelezzi M 2011 *Phys. Rev. E* **84** 016103
- [28] Wang Y Q, Wang J, Yang H B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 208902 (in Chinese) [王亚奇, 王静, 杨海滨 2014 物理学报 **63** 208902]
- [29] Yu X P, Pei T 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 208901 (in Chinese) [余晓平, 裴韬 2013 物理学报 **62** 208901]

# Average degree under different network sizes for random birth-and-death networks\*

Zhang Xiao-Jun<sup>†</sup> Zhong Shou-Ming

(School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

( Received 28 May 2016; revised manuscript received 30 June 2016 )

## Abstract

In the social and biological networks, each agent experiences a birth-and-death process. These evolving networks may exhibit some unique characteristics. Recently, the birth-and-death networks have gradually caught attention, and thus far, most of these studies on birth-and-death networks have focused on the calculations of the degree distributions and their properties. In this paper, a kind of random birth-and-death network (RBDN) with reducing network size is discussed, in which at each time step, with probability  $p$  ( $0 < p < 1/2$ ) we add a new node to the network and connect it to  $m$  existing nodes, or delete an old node from the network with probability  $q = 1 - p$ . Unlike the existing literature, this study is to calculate the average degrees of the proposed networks under different network sizes. First, for the reducing RBDN, the steady state equations for each node's degree are given by using the Markov chain method based on stochastic process rule, and then the recursive equations of average degree for different network sizes are obtained according to these steady state equations. Second, by means of the recursive equations, we explore four basic properties of average degrees as follows: 1) the average degrees are limited, 2) the average degrees are strictly monotonically increasing, 3) the average degrees are convergent to  $2mq$ , and 4) the sum of each difference between the average degree and  $2mq$  is a bounded number. Theoretical proofs for these four properties are also provided in this paper. Finally, on the basis of these properties, a generation function approach is employed to obtain the exact solutions of the average degrees for various network sizes. In addition to the theoretical derivations to the average degrees, computer simulation is also used to verify the correctness of exact solutions of the average degrees and their properties. Furthermore, we use numerical simulation to study the relationship between the average degree and node increasing probability  $p$ . Our simulation results show as follows: 1) with the increasing of  $p$ , the convergent speed of the average degree to  $2mq$  is increasing; 2) with the increasing of  $m$ , the convergent speed of the average degree to  $2mq$  is decreasing. In conclusion, for the proposed RBDN model, the main contributions of this study include 1) providing the recursive equations of the average degrees under different network sizes, 2) investigating the basic properties for the average degrees, and 3) obtaining the exact solutions of the average degrees.

**Keywords:** random birth-and-death network, network size, average degree, generating function method

**PACS:** 02.50.Ga, 02.60.Cb, 64.60.aq

**DOI:** 10.7498/aps.65.230201

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61273015).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: sczhxj@uestc.edu.cn