物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

插值小波尺度法探地雷达数值模拟及四阶 Runge Kutta 辅助微分方程吸收边界条件

冯德山 杨道学 王珣

Ground penetrating radar numerical simulation with interpolating wavelet scales method and research on fourth-order Runge-Kutta auxiliary differential equation perfectly matched layer

Feng De-Shan Yang Dao-Xue Wang Xun

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 234102 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.234102
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.234102
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I23

插值小波尺度法探地雷达数值模拟及四阶Runge Kutta辅助微分方程吸收边界条件*

冯德山† 杨道学 王珣

(中南大学地球科学与信息物理学院, 长沙 410083)

(中南大学, 有色金属成矿预测与地质环境监测教育部重点实验室, 长沙 410083)

(2016 年 5 月 28 日收到; 2016 年 8 月 30 日收到修改稿)

应用迭代插值方法构造了插值小波尺度函数, 并将该尺度函数的导数用于离散Maxwell方程组的空间微分, 使用四阶Runge Kutta(four order Runge Kutta, RK4) 算法计算时间导数, 导出了插值小波尺度法的探地雷达(ground penetrating radar, GPR)正演公式, 与常规的基于中心差分的时域有限差分算法(finite difference time domain, FDTD)相比, 插值小波尺度算法提高了GPR波动方程的空间与时间离散精度. 首先, 采用具有解析解的层状模型, 分别将FDTD算法及插值小波尺度法应用于层状模型正演, 单道雷达数据与解析解拟合表明: 相同的网格剖分方式, 插值小波尺度法比FDTD具有更高的精度. 然后, 将辅助微分方程完全匹配层(auxiliary differential equation perfecting matched layer, ADE-PML)边界条件应用到插值小波尺度法GPR正演中, 在均匀介质模型中对比了FDTD-CPML(坐标伸缩完全匹配层), FDTD-RK4ADE-PML、插值小波尺度RK4ADE-PML 的反射误差, 结果表明: 插值小波尺度RK4ADE-PML吸收效果优于另外两种条件下的吸收边界. 最后, 应用加载UPML(各向异性完全匹配层)的FDTD和RK4ADE-PML的插值小波尺度法开展了二维GPR模型的正演, 展示了RK4ADE-PML对倏逝波的良好吸收效果.

关键词: 探地雷达, 插值小波尺度法, 辅助微分法, 四阶Runge Kutta

PACS: 41.20.Jb, 02.70.Bf, 92.60.Fm, 84.40.Xb **DOI:** 10.7498/aps.65.234102

1 引 言

探地雷达正演是地球物理学的理论研究方向之一, 通过对已知地质模型的正演, 可以丰富雷达模型数据库, 熟悉并了解典型地质体的雷达图像回波特征, 反过来可以指导探地雷达(ground penetrating radar, GPR)实测剖面资料解释, 提高GPR数据解译水平[1,2]. 由于GPR正演如此重要, 许多学者应用不同方法开展了GPR数值模拟研究: Irving 和 Knight[3]、刘四新和曾昭发[4]、Diamanti 和Giannopoulos[5]、Teixeira[6]、冯德山等[7]、李静等[8]应用时域有限差分法进行了GPR数值模拟; 魏兵等[9]对数值频散、边界条件、算法改进等内容进行了深入的研究与探讨; 底青云和王妙月[10]应用有限单元法开展了二维GPR正演; 李展辉等[11]开展了错格时域伪谱法GPR正演, 解决了时域伪谱法的Gibbs现象; 颜孙旭和马西奎[12]、徐利军等[13]对色散介质的时域有限差分吸收边界进行了研究, 并使用了辅助微分方程作为吸收边界. 在所有的GPR正演算法中, 时域有限差分(finite difference time domain, FDTD)算法无疑是应用最广泛、最为成熟的算法, 但FDTD算法也有自身的缺陷: 受CFL稳定性条件的限制、不能与非结构化网格结合、时间与空间离散常采用中心差分法, 计算

* 国家自然科学基金(批准号: 41574116)、中南大学创新驱动项目(批准号: 2015CX008)、教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: NCET-12-0551)、中南大学教师研究基金(批准号: 2014JSJJ001) 和中南大学升华育英人才计划资助的课题.

† 通信作者. E-mail: fengdeshan@126.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

精度有限.

为了提高GPR的正演精度, 本文提出了一种新的GPR正演算法插值小波尺度法. 该算法利用尺度函数的导数离散Maxwell方程的空间导数, 采用四阶Runge Kutta算法计算时间导数, Vivek和Mani [14], Pedro等 [15], Marta等 [16], Bodrigo等 [17] 把插值小波尺度法应用到不同领域的数值模拟中, 由于插值小波尺度函数导数及四阶Runge Kutta算法较中心差分离散具有更高阶的精度, 因此, 该算法较常规FDTD 更为精确. 为了进一步完善插值小波尺度算法, 需要考虑边界条件的边载. 吸收近年来在弹性波(Martin等 [18]; Zhang和Shen [19])、声波(赵建国 [20])及电磁波(李建雄 [21])数值模拟中的复频移拉伸函数完全匹配层(PML)的研究成果, 本文将辅助微分法(ADE)实现的复频移PML边界条件应用到插值小波尺度法GPR正演的PML边界条件实现中, 由于ADE-PML对传播波、低频倏逝波、掠射波都有较好吸收效果; 加之迭代计算过程中只需两个辅助变量、时间偏导数采用四阶Runge Kutta离散, 可显著节省内存, 提高计算精度.

2 插值小波尺度函数算法

2.1 插值小波尺度函数构建

插值小波尺度函数也称为插值小波, 其构建方法有多种: Deslauriers和Dubuc [22,23] 通过迭代插值过程构造了插值小波尺度函数; Saito 和Beylkin [24] 指出, 插值小波尺度函数是Daubechies尺度函数的自相关函数; Sweldens证明 [25], 也可以通过提升一套双正交小波滤波器lazy小波获得插值尺度函数. 本文采用迭代插值方法构造插值小波尺度函数.

设N为正整数, 通过反复插值整数Kronecker序列$\{\delta_{n,0}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 从而构造二元有理函数. 首先给定整数$j\geqslant 0$, 假设已经得到所有$k/2^j(k\in\mathbb{Z})$点处的值, 根据$2N$个Lagrangian插值点的对称性, 就可以求得所有$(k+1/2)/2^j$点处的函数值. 至止, 序列$k/2^j$的所有值都已求得. 同理, 在下个多分辨尺度, 也可以继续得到对称的$2N$点的Lagrangian插值. 通过重复这一插值方式, 可以求得所有二元有理函数值, 如: $k/2^j(\forall k,j\in\mathbb{Z}$并且$j\geqslant 0)$, 这一过程被称为迭代插值过程. 这样就可得到一个离散函数定义在实数$\mathbb{R}$上的稠密子集. 由于该函数在整个二元有理数范围内是一致连续的, 故它可以惟一地扩展为一个定义域为$\mathbb{R}$上ϕ函数. 于是将定义在序列$k/2^j$的函数称为N阶插值基函数, 并简称$DD_N(t)$, 其中N为插值函数的阶数. 根据迭代插值的构造过程可知, $DD_N(N\in\boldsymbol{N})$是偶对称函数. 即

$$DD_N(t)=DD_N(-t),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

如果p是一个阶次小于$2N(N\in\boldsymbol{N})$的多项式, 则可以通过转化DD_N得到函数$p(t)$:

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p(n)DD_N(t-n),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

根据Saito和Beylkin [24] 的研究, DD_N是Daubechies尺度函数的自相关函数

$$DD_N(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}DS_N(x)DS_N(x-t)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

式中, DS_N为N阶Daubechies紧支撑的正交尺度函数. 因此, DD_N及DS_N遵循下列尺度方程:

$$DS_N(t)=\sum_{k=-2N+1}^{2N-1}h_kDS_N(2t-k),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

$$DD_N(t)=\sum_{k=-2N+1}^{2N-1}h_k^*DD_N(2t-k),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

根据自相关方程(3), 很容易得到两者滤波器系数之间的关系:

$$h_n^*=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h_mh_{m-n},\quad \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{6}$$

由于DD_N是插值函数, 故滤波器系数满足以下条件:

$$h_k^*=DD_N(k/2), \tag{7}$$

可以将任意函数分解成序列$\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, 即

$$f_i=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_j\delta_{i,j}, \tag{8}$$

其中δ是Kronecker符号. 如果插值f可由整个实数域$\mathbb{R}$序列$\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$和DD_N组合生成:

$$f(t)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_jDD_N(t-j),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

因为 DD_N 为插值函数, 且 $f_j = f(j)$. 将这种关系应用到数据集合 $\{DD_N(j/2)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 中, 则有

$$DD_N(t/2) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} DD_N(j/2)DD_N(t-j),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

由于 DD_N 具有紧支性, 故 (10) 式求和为有限项. DD_N 的支撑域为 $(-2N+1, 2N+1)$, 且当 $|j| \geqslant 4N-2$, $DD_N(j/2) = 0$. 则

$$DD_N(t/2) = \sum_{j=-4N+3}^{4N-3} DD_N(j/2)DD_N(t-j),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

根据插值函数性质可知, 当 j 为不为零的偶数时, $DD_N(j/2) = 0$, 因此需要计算 j 为奇数时的 $DD_N(j/2)$. 为此, 可以使用 $2N$ 个点的 Lagrangian 插值计算, 容易推得

$$DD_N\left(\frac{2j+1}{2}\right) = (-1)^{N-j}\frac{\prod_{k=0}^{2N-1}(k-N+1/2)}{(j+1/2)(N-j-1)!(N+j)!},\quad -N\leqslant j<N, \tag{12}$$

当 $N=2$ 时, 通过上式可以得到

$$DD_2(\pm 1/2) = 9/16,$$
$$DD_2(\pm 3/2) = -1/16,$$
$$DD_2(\pm(2j+1)/2) = 0\quad (j\geqslant 2).$$

计算导数之前由插值尺度函数的对称性, 可以得到 $DD'_N(t) = -DD'_N(-t)$.

在插值尺度法中, 需要获得 DD_2 二分点处的导数值, 由于 DD_N 具有紧支性, 因此对于 DD_2 只需计算 $DD'_2(1/2)$, $DD'_2(3/2)$, $DD'_2(5/2)$ 的值. 由 (12) 式可知

$$\begin{aligned}&DD_2(t/2)\\&=[-DD_2(t+3)+9\cdot DD_2(t+1)\\&\quad +9\cdot DD_2(t-1)-DD_2(t-3)]/16,\end{aligned} \tag{13}$$

等式两边同时求导可得:

$$\begin{aligned}&DD'_2(t/2)/2\\&=[-DD'_2(t+3)+9\cdot DD'_2(t+1)\\&\quad +9\cdot DD'_2(t-1)-DD'_2(t-3)]/16.\end{aligned} \tag{14}$$

为了计算 $DD'_2(1/2)$, $DD'_2(3/2)$, $DD'_2(5/2)$, 需要计算 $DD'_2(1)$, $DD'_2(2)$. 由文献 [26] 可知 $DD'_2(1) = -2/3$, $DD'_2(2) = 1/12$, 代入 (14) 式, 即可得到 $DD'_2(1/2) = -59/48$, $DD'_2(3/2) = 3/32$, $DD'_2(5/2) = -1/96$. 同理可以计算其他阶次 DD_N 二分点处的导数值, 如表 1 所列.

表 1 空间偏导数系数 $DD'_N(-j-1/2)$

Table 1. Space partial derivative coefficient $DD'_N(-j-1/2)$.

j	$N=2$	$N=3$	$N=4$
0	59/48	120707/93440	266099391/202969088
1	−3/32	−76883/560640	−189991331/1217814528
2	1/96	1075/37376	63928787/1522268160
3		−1297/373760	−1505623/173973504
4		3/373760	1011845/1217814528
5			66637/608907264
6			−5/1217814528

假设函数 u 在 Yee 网格的中心点离散, 记为 $(-i-1/2)\Delta x$ 且 $i\in\mathbb{N}$. 则根据插值尺度函数求微分的性质, 可求得 u 的空间导数为

$$u'_{\Delta x}(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} u_{i+1/2}DD'_N(x/\Delta x - i - 1/2),\quad i\in\mathbb{N}, \tag{15}$$

其中 $u_{i+1/2} = u((i+1/2)\Delta x)$. 则其空间导数为

$$\partial u/\partial x = \sum_{l=-l_0}^{l_0-1} a(l)u|_{i+l+1}/\Delta x, \tag{16}$$

其中 $a(l)$ 就是上述等式求得的插值尺度函数的导数系数.

2.2 插值小波尺度法数值稳定性条件

由 Maxwell 方程可以导出电磁场任意直角分量均满足齐次波动方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}f = 0, \tag{17}$$

考虑平面波的解, 即

$$\begin{aligned}&f(x,y,z,t)\\&=f_0\exp[-\mathrm{j}(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)].\end{aligned} \tag{18}$$

类比于时域有限差分数值稳定性推导方式 [27], 可以推导出插值小波尺度法数值稳定性条件, 即

$$\Delta t\leqslant \frac{1}{c\sum_{l=0}^{l_0-1}|a(l)|\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}}}. \tag{19}$$

对于二维 ($\Delta x=\Delta y$) 情况, 则

$$\Delta t\leqslant\frac{\delta}{c\sqrt{2}}\left(\sum_{l=0}^{l_0-1}|a(l)|\right)^{-1},\tag{20}$$

式中 δ 是网格尺度. 而同样的二维 ($\Delta x=\Delta y$) 情况下, FDTD 算法的 CFL 稳定性条件为[27]:

$$\Delta t\leqslant\delta/\sqrt{2}c.\tag{21}$$

由于 $\left(\sum_{l=0}^{l_0-1}|a(l)|\right)^{-1}<1$, 比较 (20) 式和 (21) 式可以发现: 同样时间步长情况, 插值小波尺度的空间步长可以大于 FDTD 算法的空间步长. $\left(\sum_{l=0}^{l_0-1}|a(l)|\right)^{-1}$ 为 Courant 稳定性系数, 表 2 给出 2—4 阶的插值小波尺度法的 Courant 稳定性系数.

表 2 Courant 稳定性系数
Table 2. Courant stability factor.

插值尺度阶数 N	Courant 系数
2	0.7500
3	0.6844
4	0.6585

3 ADE-PML 的四阶 Runge-Kutta 实现

GPR 数值模拟中, 采用插值小波尺度函数的导数对 Maxwell 方程离散, 除了对内部模拟区域进行插值离散外, 亦需要对截断边界进行处理. 为了减少计算机的内存占用, 程序编写时采用 PML 区域的统一离散格式, 使边界条件与内部模拟区域形式上一致, 仅仅是物性参数如: 磁导率、介电常数等参数在不同区域取值不一致, 这样可减小分区及临时存储空间, 提高模拟的计算速度. 由电磁场与电磁波的理论可知, 在 PML 介质中二维 GPR 满足的 Maxwell 方程在伸缩坐标中可表示为:

$$\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}_y+\sigma_m\boldsymbol{H}_y=(1/s_x)\cdot\partial\boldsymbol{E}_z/\partial x,\tag{22}$$

$$-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}_x-\sigma_m\boldsymbol{H}_x=(1/s_y)\cdot\partial\boldsymbol{E}_z/\partial y,\tag{23}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_z+\sigma\boldsymbol{E}_z\\&=(1/s_x)\cdot\partial\boldsymbol{H}_y/\partial x-(1/s_y)\cdot\partial\boldsymbol{H}_x/\partial y,\end{aligned}\tag{24}$$

其中 s_i 是坐标伸缩因子

$$s_i=\kappa_i+\sigma_i/\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\quad(i=x,y,z).\tag{25}$$

本文中采用 Kuzouglu 和 Mittra 提出的复频移完全 PML, 则将伸缩坐标因子修改为

$$s_i=\kappa_i+\sigma_i/(\alpha_i+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0)\quad(i=x,y,z),\tag{26}$$

式中 α_i 和 σ_i 为正实数, κ_i 为大于 1 的实数. κ_i 值的引入是为了改善 PML 对倏逝波的吸收特性, α_i 值的引入则是为了改善 PML 对低频分量的吸收特性.

而该复频移 PML 边界实现方式主要有递归卷积与辅助微分方程法 (ADE) 两种, 两者本质上一致, 只是不同的表达方式, ADE 执行更方便. 为此, 本文采用辅助微分法来实现该边界条件. 考虑 (25) 式和 (26) 式中坐标伸缩因子位于算式的分母部分, 给方程的离散变换与分解计算带来不便, 故将 $1/s_i(i=x,y,z)$ 进行变换:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_i}&=\frac{1}{\kappa_i}+\frac{-\sigma_i/(\varepsilon_0\kappa_i^2)}{\sigma_i/(\varepsilon_0\kappa_i)+\alpha_i/\varepsilon_0+\mathrm{j}\omega}\\&\quad(i=x,y,z),\end{aligned}\tag{27}$$

从而可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_x}\frac{\partial\boldsymbol{E}_z}{\partial x}&=\frac{1}{\kappa_x}\frac{\partial\boldsymbol{E}_z}{\partial x}+\frac{-\sigma_x/(\varepsilon_0\kappa_x^2)}{\sigma_x/\varepsilon_0\kappa_x+\alpha_x/\varepsilon_0+\mathrm{j}\omega}\\&\quad\times\frac{\partial\boldsymbol{E}_z}{\partial x}.\end{aligned}\tag{28}$$

将 (28) 式代入 (22) 式中, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}_y+\sigma_m\boldsymbol{H}_y\\&=\frac{1}{\kappa_x}\frac{\partial\boldsymbol{E}_z}{\partial x}+\frac{-\sigma_x/\varepsilon_0\kappa_x^2}{\sigma_x/\varepsilon_0\kappa_x+\alpha_x/\varepsilon_0+\mathrm{j}\omega}\frac{\partial\boldsymbol{E}_z}{\partial x},\end{aligned}\tag{29}$$

(29) 式可进一步改写为

$$\begin{aligned}&\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}_y+\sigma_m\boldsymbol{H}_y\\&=(1/\kappa_x)\cdot\partial\boldsymbol{E}_z/\partial x+\boldsymbol{\psi}_x^{E_z},\end{aligned}\tag{30}$$

其中, $\boldsymbol{\psi}_x^{E_z}$ 为与空间偏导数 $\partial\boldsymbol{E}_z/\partial x$ 相关的辅助变量, 定义为

$$\boldsymbol{\psi}_x^{E_z}=-\frac{\sigma_x/\varepsilon_0\kappa_x^2}{\sigma_x/\varepsilon_0\kappa_x+\alpha_x/\varepsilon_0+\mathrm{j}\omega}\frac{\partial\boldsymbol{E}_z}{\partial x}.\tag{31}$$

将 (31) 式分解为

$$\begin{aligned}&\mathrm{j}\omega\boldsymbol{\psi}_x^{E_z}+(\sigma_x/\varepsilon_0\kappa_x+\alpha_x/\varepsilon_0)\boldsymbol{\psi}_x^{E_z}\\&=-(\sigma_x/\varepsilon_0\kappa_x^2)\cdot\partial\boldsymbol{E}_z/\partial x,\end{aligned}\tag{32}$$

将 (30) 式和 (32) 式由频率域变回时间域后可得

$$\mu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}_y}{\partial t}+\sigma_m\boldsymbol{H}_y=\left(\frac{1}{\kappa_x}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}_z}{\partial x}+\boldsymbol{\psi}_x^{E_z},\tag{33}$$

$$\partial \boldsymbol{\psi}_x^{E_z}/\partial t = -\left(\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0 \kappa_x^2}\right)\frac{\partial E_z}{\partial x} - \left(\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0 \kappa_x} + \frac{\alpha_x}{\varepsilon_0}\right)\boldsymbol{\psi}_x^{E_z}. \tag{34}$$

(33)式和(34)式中引入的辅助变量, 辅助微分法直接在时间域离散微分方程, 它比卷积微分方程计算简单. 再分析(33)式中的偏微分方程, 综合考虑求解效率与求解精度, 递推方程中的时间偏导数采用四阶Runge-Kutta格式求解, 四阶Runge-Kutta对微分方程求解的精度高于中心差分格式. 四阶Runge-Kutta格式如下:

$$\begin{aligned}
&h^{(1)} = \Delta t L(\boldsymbol{w}^n),\\
&h^{(2)} = \Delta t L(\boldsymbol{w}^n + 0.5h^{(1)}),\\
&h^{(3)} = \Delta t L(\boldsymbol{w}^n + 0.5h^{(2)}),\\
&h^{(4)} = \Delta t L(\boldsymbol{w}^n + h^{(3)}),\\
&\boldsymbol{w}^{n+1} = \boldsymbol{w}^n + \frac{h^{(1)} + 2h^{(2)} + 2h^{(3)} + h^{(4)}}{6},
\end{aligned} \tag{35}$$

其中, $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{E}_z, \boldsymbol{H}_x, \boldsymbol{H}_y)$, $h^{(i)}(i = 1, 2, 3, 4)$表示四阶Runge-Kutta法的每一步函数值, 算子$\boldsymbol{L}$是(22)式中等式的右端项, n表示时刻. 应用Yee网格将(22)式进行离散, 可得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{H}_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right)\\
&= \boldsymbol{CP}(m)\cdot \boldsymbol{H}_y^{n-1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + \boldsymbol{CQ}(m)\cdot \boldsymbol{\psi}_x^{H_y}\\
&\quad + \boldsymbol{CQ}(m)\cdot \sum_{l=-l_0}^{l_0-1} a(l)\boldsymbol{E}_z^n(i + l + 1, j)/\kappa_x \Delta x,
\end{aligned} \tag{36}$$

采取(36)式相同的推导过程, (23)式和(24)式同理可变换为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{H}_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right)\\
&= \boldsymbol{CP}(m)\cdot \boldsymbol{H}_y^{n-1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - \boldsymbol{CQ}(m)\cdot \boldsymbol{\psi}_y^{H_x}\\
&\quad - \boldsymbol{CQ}(m)\cdot \sum_{l=-l_0}^{l_0-1} a(l)\boldsymbol{E}_z^n(i, j + l + 1)/\kappa_y \cdot \Delta y,
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
&E_z^{n+1}(i, j)\\
&= \boldsymbol{CA}(m)\cdot \boldsymbol{E}_z^n(i, j) + \boldsymbol{CB}(m)\cdot (\boldsymbol{\psi}_x^{H_y} - \boldsymbol{\psi}_y^{H_x})\\
&\quad + \boldsymbol{CB}(m)\cdot \sum_{l=-l_0}^{l_0-1} a(l)\\
&\quad \times [\boldsymbol{H}_y^{n+1/2}(i + l + 1/2, j)/\kappa_x \Delta x\\
&\quad - \boldsymbol{H}_x^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2} + l)/\kappa_y \Delta y].
\end{aligned} \tag{38}$$

(36)式—(38)式中:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{CA}(m) &= \frac{1 - \sigma(m)\Delta t/2\varepsilon(m)}{1 + \sigma(m)\Delta t/2\varepsilon(m)},\\
\boldsymbol{CB}(m) &= \frac{\Delta t/\varepsilon(m)}{1 + \sigma(m)\Delta t/2\varepsilon(m)},\\
\boldsymbol{CP}(m) &= \frac{1 - \sigma_m(m)\Delta t/2\mu(m)}{1 + \sigma_m(m)\Delta t/2\mu(m)},\\
\boldsymbol{CQ}(m) &= \frac{\Delta t/\mu(m)}{1 + \sigma_m(m)\Delta t/2\mu(m)},
\end{aligned}$$

其中(36)式—(38)式中$\boldsymbol{CA}(m), \boldsymbol{CB}(m), \boldsymbol{CP}(m), \boldsymbol{CQ}(m)$中标号$m$的节点空间位置取值分别为$(i + 1/2, j)$, $(i, j + 1/2)$与(i, j). 分析(36)式—(38)式可知, 任一网格节点上的场值及辅助变量的值, 仅与上一步时间步及周围的场值有关, 因此, 应用RK4ADE插值尺度小波法迭代计算吸收层中场分量时, 只需要1—2个辅助变量, 实现起来不仅方便, 而且节省内存.

在完全匹配层内部, 参数σ_i, κ_i和α_i可以定义如下[24]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_i = \sigma_{\max}|z - z_0|^m/d^m,\\
&\kappa_i = 1 + (\kappa_{\max} - 1)\cdot |z - z_0|^m/d^m,\\
&\alpha_i = \alpha_{\max}|z - z_0|/d,
\end{aligned} \tag{39}$$

其中z_0为吸收层靠近模拟区域的界面位置, m为整数. 研究表明, 当$m = 4$时为最佳, δ是网格尺度.

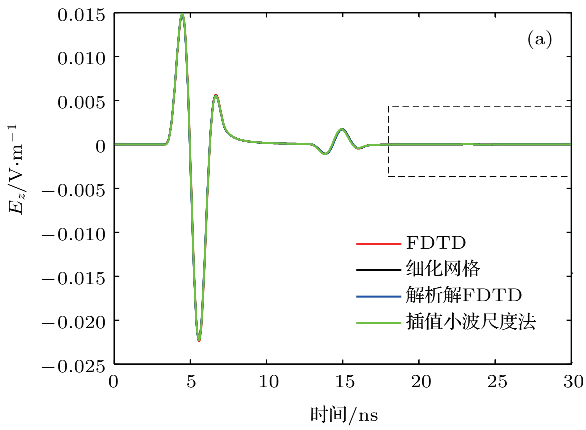
在GPR的数值模拟中可通过参数调试获得较好的PML吸收效果. 作者通过多次GPR数值模拟实验, 发现: 当$\kappa_{\max} = 5$, $\alpha_{\max} = 0.008$时RK4ADE-PML中心差分法反射误差最大值最小; 当$\kappa_{\max} = 5$, $\alpha_{\max} = 0.024$时RK4ADE-PML插值小波尺度法的反射误差值最小.

4 ADE-PML的四阶Runge-Kutta二阶插值小波尺度法探地雷达应用实例

4.1 插值小波尺度算法计算精度与效率分析

为了体现插值小波尺度法的优点, 将二阶插值小波尺度法与FDTD算法的精度和效率进行比较, 为了更纯粹地比较算法特性, 计算中时间域离

散都采用二阶精度, 不添加任何吸收边界. 设置一个9.0 m × 8.0 m的矩形模拟区域, 采用900 × 800个网格, 空间步长为0.01 m, 时间步长为0.025 ns, 时窗为30 ns. 模拟区域共分为三层, 第一层厚度为5.5 m, 介质的相对介电常数为4.0, 电导率为0.005 S/m; 第二层厚度为0.5 m, 介质的相对介电常数为8.0, 电导率为0.0001 S/m; 第三层厚度为2 m, 介质的相对介电常数为12.0, 电导率为0.005 S/m. 激励源为主频900 MHz的Blackman-harris脉冲. 激发源位于(4.5 m, 5.0 m)处, 接收点位于(4.5 m, 5.5 m)处, 用FDTD和二阶插值小波尺度法分别计算接收点处单道雷达波, 并与层状模型的解析解相比较, 结果如图1所示.



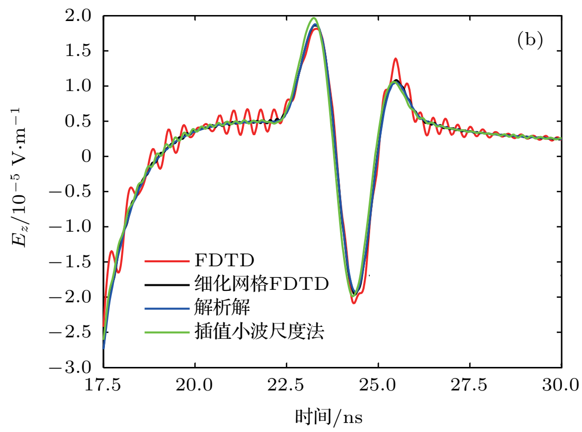


图1　(网刊彩色) 层状模型单道雷达波形数据对比 (a) 0— 30 ns; (b) 17.5—30 ns

Fig. 1. (color online) The single-channel radar waveform data comparison of layered model: (a) 0–30 ns; (b) 17.5–30 ns

分析图1 (a), FDTD与插值小波尺度法的直达波与解析解波形完全拟合, 但通过图1 (b)可知分层界面反射波幅有明显的差异: FDTD与二阶插值小波尺度法模拟结果存在偏差, 二阶插值小波尺度法模拟结果更接近解析解, 二阶插值小波尺度法曲线较FDTD更加平稳与光滑; 细化网格后FDTD也可以达到二阶插值小波尺度法的精度, 但是细化网格FDTD所需运行时间远大于插值小波尺度法(见表3). 则可以说明插值小波尺度法的精度和效率都优于FDTD.

表3　不同网格尺度FDTD与二阶插值小波尺度法运行时间

Table 3. Different grid scale FDTD method with second order interpolation wavelet scale running time.

算法类型	空间步长/m	时间步长/ns	运行时间/s
FDTD	0.01	0.025	128.725
细化网格FDTD	0.005	0.0125	1022.158
插值小波尺度法	0.01	0.025	230.749

4.2　不同吸收边界反射误差分析

为了研究不同边界吸收情况, 设置1.0 m × 1.0 m的正方形区域, 采用200 × 200个网格, 吸收层为10个网格, 空间步长为0.005 m, 时间步长为0.01 ns, 时窗为9 ns, 激励源为主频900 MHz的Blackman-harris脉冲. 激发源位于(0.5 m, 0.5 m)处, 接收点位于(1 m, 1 m)处. 在检测点记录下900个时间步内的电场值, 记为$\boldsymbol{E}_z^n$. 接下来, 设置一个扩大5倍网格数量为1000 × 1000的参考空间, 其激励源点与接收点距离不变, 由于模型的扩大, 此时激发点与接收点近似处于模拟区域中心, 由于空间足够大, 在观察时间内, 边界的反射尚未到达, 因此可将该模型中观测点处接收到的信号设为参考模型信号$\boldsymbol{E}_{z,\mathrm{ref}}^n$, 并求取参考模型信号中900个时间步内振幅最大的值为$\boldsymbol{E}_{z,\mathrm{refmax}}^n$, 通过以下计算公式获得反射误差:

$$\mathrm{Error_{dB}} = 20\lg\frac{|\boldsymbol{E}_z^n - \boldsymbol{E}_{z,\mathrm{ref}}^n|}{|\boldsymbol{E}_{z,\mathrm{refmax}}^n|}, \tag{40}$$

应用(40)式计算3种吸收边界在点(1 m, 1 m)处反射误差如图2所示, 其中CPML中参数$\alpha_{\max} = 0.006$, $\kappa_{\max} = 5$, 计算时采用FDTD算法; RK4ADE-F的参数$\alpha_{\max} = 0.008$, $\kappa_{\max} = 5$, 计算时采用FDTD算法; RK4ADE-A的参数是$\kappa_{\max} = 5$, $\alpha_{\max} = 0.024$, 计算时采用插值小波尺度法. 通过对比发现插值小波尺度法RK4ADE吸收效果最好, 反射误差最大值为−93 dB, 而CPML吸收边界反射误差最大值只有−73 dB, 降低了−20 dB, FDTD-RK4ADE反射误差最大值为−83 dB; FDTD-RK4ADE的吸收效果也优于

FDTD-CPML, 实验证明插值小波尺度RK4ADE-PML吸收边界的吸收效果最优. 显然, 这是由于插值小波尺度法求取空间导数、RK4ADE算法求取时间导数具有较高的精度, 有效地提高了PML吸收性能.

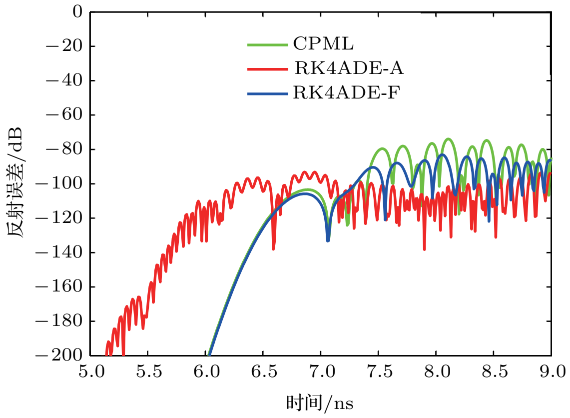


图2 (网刊彩色) 3种吸收边界反射误差对比图

Fig. 2. (color online) Map of reflection error comparison in three kinds absorbing boundary.

4.3 四阶Runge Kutta辅助微分方程匹配层对倏逝波吸收效果及模拟实例

设置3.0 m × 1.5 m模型, 为了突显RK4ADE-PML对倏逝波、低频波以及掠角波等干扰波的吸收效果, 将模型分成三部分, 如图3所示, 上部为倒“V”字形, 深度为0.5 m, 相对介电常数为2.0, 电导率为0.005 S/m; 模型下部有1个异常圆, 半径为0.25 m, 相对介电常数为11.0, 电导率为0.05 S/m; 其他介质的相对介电常数为6.0, 电导率为0.001 S/m. 在(0.005 m, 0.005 m)处加入900 MHz的Blackman-harris脉冲, 分别应用UPML的FDTD算法和RK4ADE-PML的插值小波尺度法对该模型进行正演, 模拟空间步长为0.005 m, 时间步长为0.001 ns, PML厚度都设为0.05 m, PML指数参数设置为$m = 4$. 激励源的位置均距上侧PML内表面1个网格. 图4为采用FDTD-UPML边界条件正演所得的10, 12, 14, 16 ns的波场快照; 图5为插值小波尺度RK4ADE-PML边界条件正演所得的同时刻的波场快照. 通过调节色标, 图4的UPML波场快照中可以清晰地发现虚框中圈定的倏逝波, 而RK4ADE-PML插值小波尺度法中却没有发现, 说明了RK4ADE-PML对倏逝波能良好吸收.

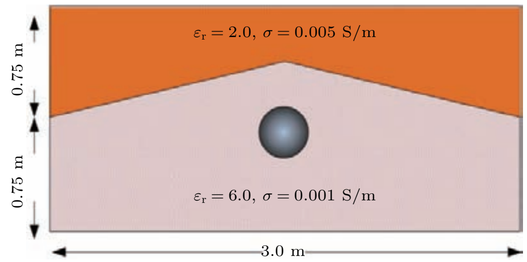


图3 (网刊彩色) 雷达模型图

Fig. 3. (color online) The map of GPR mode.

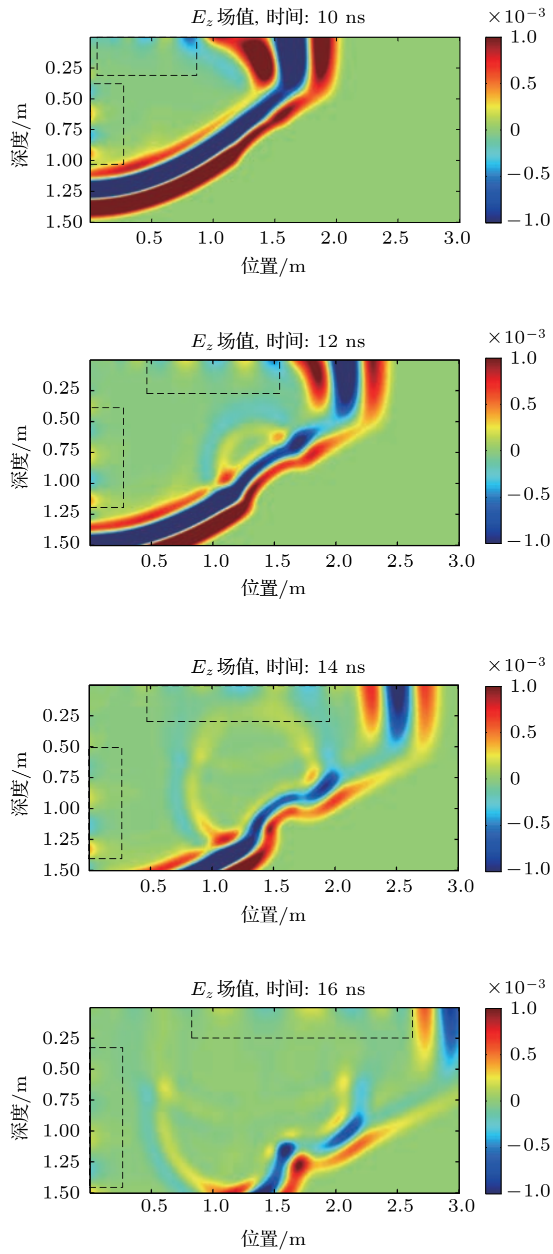


图4 (网刊彩色) FDTD- UPML波场快照

Fig. 4. (color online) Wave field snapshots of UPML.

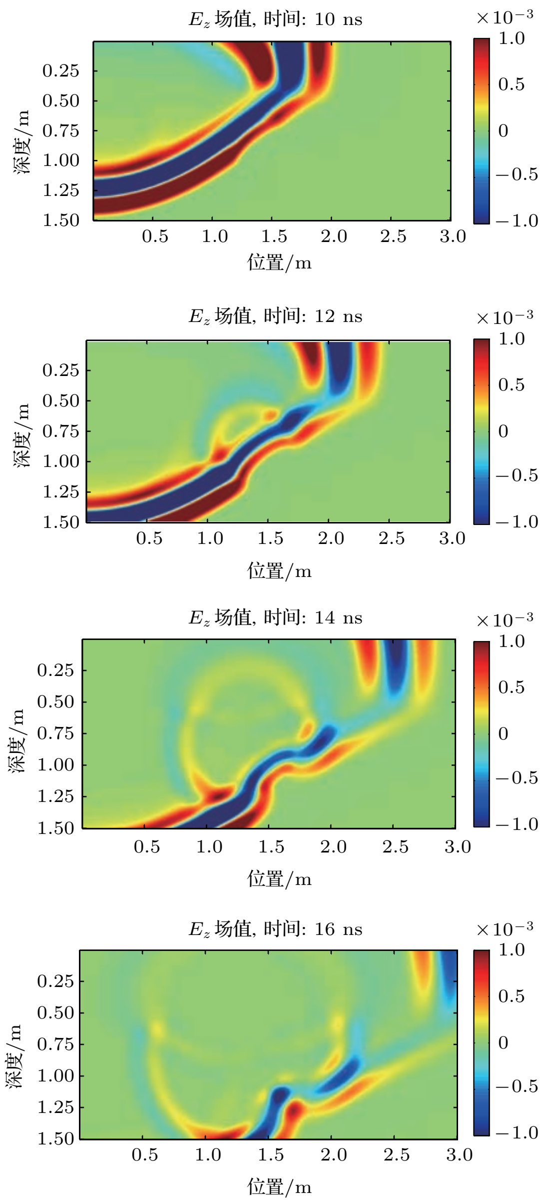


图5 (网刊彩色) 插值小波尺度RK4ADE-PML波场快照

Fig. 5. (color online) Wave field snapshots of RK4ADE-PML.

分析图4和图5可知, UPML边界条件以掠角波入射的雷达波在模型边界上产生一系列的虚假反射, 作为有效波的干扰回到计算模型区域内. 而RK4ADE-PML边界却没有产生虚假反射, 对倏逝波吸收效果很好. 倏逝波的反射开始出现的位置是在PML内表面附近且距离激励源约1个波长处, 故在剖面法中, 自激自收时, 雷达剖面上会存在着明显的倏逝波反射. 再采用宽角法模拟上面模型, 激励源加载在(1.5 m, 0.005 m)处. 对比图6与图7可知, UPML正演图中存在明显的倏逝波, 且直接影响到下部异常的雷达波形, 而RK4ADE-PML正演图中却没有发现倏逝波, 下部的异常体波形也比UPML的更加清晰准确. 从而说明RK4ADE-PML算法精度高于UPML, 更适合雷达数据解译, 也验证了算法的正确性.

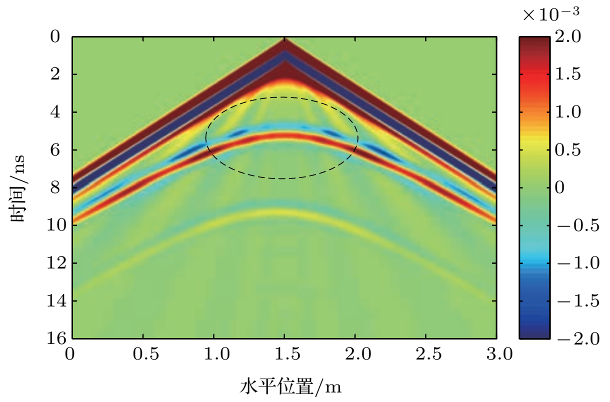


图6 (网刊彩色) UPML正演图

Fig. 6. (color online) UPML forward figure.

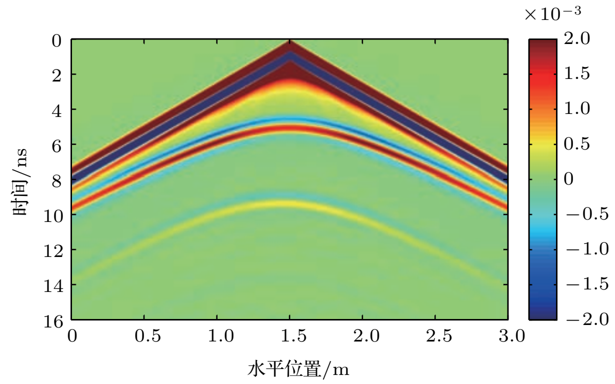


图7 (网刊彩色) RK4ADE-PML正演图

Fig. 7. (color online) RK4ADE-PML forward figure.

最后, 对该模型分别采用FDTD-UPML与插值小波尺度RK4ADE-PML进行剖面法正演, 为了节约运算时间, 本文将模型的网格数保持不变, 提高时空步长, 时间步长为0.0025 ns, 空间步长为0.01 m, 时窗为40 ns, 采集了120道雷达波形.

对比图8与图9可知: 两图中都清晰可见异常体的双曲绕射波, 双曲线弧顶准确地指示了异常体的位置与埋深, 插值小波尺度RK4ADE-PML图中异常体的幅值稍大于FDTD-UPML算法. 剖面法的模拟结果进一步验证了本文提出的插值小波尺度算法的正确性.

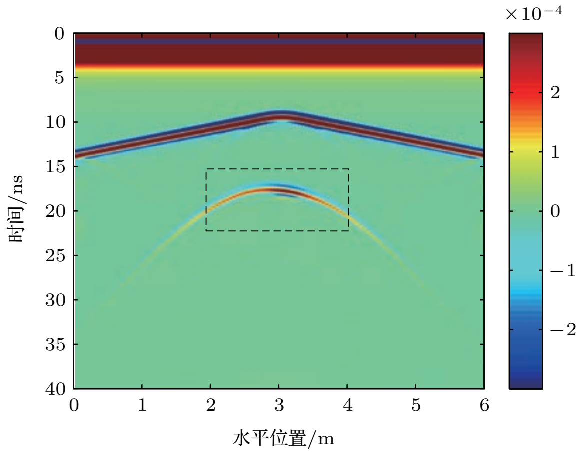


图8 (网刊彩色) FDTD-UPML 正演剖面图

Fig. 8. (color online) FDTD-UPML forward figure.

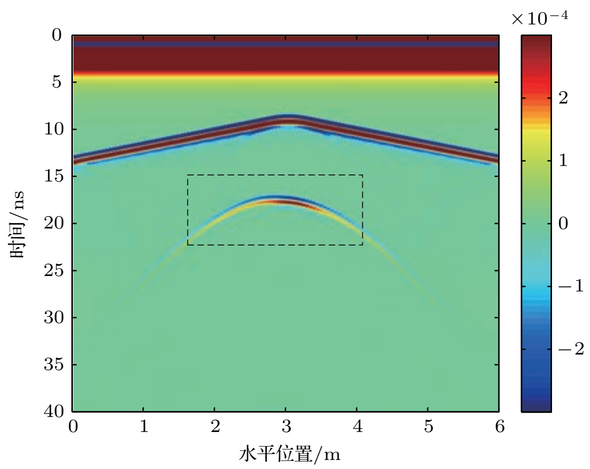


图9 (网刊彩色) 插值小波尺度法RK4ADE-PML正演剖面图

Fig. 9. (color online) Section of GPR simulation using interpolating wavelet scales method RK4ADE-PML.

5 结 论

1) 将插值小波尺度函数的导数代替中心差分格式来离散Maxwell方程组的空间导数, 并采用四阶Runge Kutta算法计算时间导数, 由于插值小波尺度函数及四阶Runge Kutta算法有效提高了GPR波动方程的空间和时间离散精度, 因此, 插值小波尺度算法较常规FDTD算法具有更高的精度.

2) 插值小波尺度RK4ADE-PML最佳吸收层参数选取为$k_{\max} = 5$, $\alpha_{\max} = 0.024$, 此时反射误差的最大值最小. 插值小波尺度法RK4ADE-PML引起的最大反射误差可低至−93 dB, 与FDTD算法中的CPML边界条件相比, 其吸收性能提高了20 dB. 通过对单道雷达波计算也验证了插值小波尺度法的模拟精度高于FDTD算法.

3) 通过比较FDTD-UPML与插值小波尺度RK4ADE-PML两种算法GPR正演波场快照、宽角法及剖面法的雷达图, 结果表明: 插值小波尺度RA4ADE-PML降低了吸收边界的反射误差, 提高了空间和时间精度, 比UPML边界更能有效地消除大角度入射的虚假反射, 对倏逝波、低频波吸收效果更佳.

参考文献

[1] Li J 2014 *Ph. D. Dissertation* (Changchun: Jilin University) (in Chinese) [李静 2014 博士学位论文 (长春: 吉林大学)]

[2] Feng D S, Chen J W, Wu Q 2014 *Chin. J. Geophys.* **57** 1322 (in Chinese) [冯德山, 陈佳维, 吴奇 2014 地球物理学报 **57** 1322]

[3] Irving J, Knight R 2006 *Comput. Geosci.* **32** 1247

[4] Liu S X, Zeng Z F 2007 *Chin. J. Geophys.* **50** 320 (in Chinese) [刘四新, 曾昭发 2007 地球物理学报 **50** 320]

[5] Diamanti N, Giannopoulos A 2009 *J. Appl. Geophys.* **67** 309

[6] Teixeira F L 2008 *IEEE Trans. Antennas and Propag.* **56** 2150

[7] Feng D S, Chen C S, Dai Q W 2010 *Chin. J. Geophys.* **53** 2484 (in Chinese) [冯德山, 陈承申, 戴前伟 2010 地球物理学报 **53** 2484]

[8] Li J, Zeng Z F, Liu S X 2012 *Comput. Geosci.* **49** 121

[9] Wei B, Li X Y, Wang F, Ge D B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6174 (in Chinese) [魏兵, 李小勇, 王飞, 葛德彪 2009 物理学报 **58** 6174]

[10] Di Q Y, Wang M Y 1999 *Chin. J. Geophys.* **42** 818 (in Chinese) [底青云, 王妙月 1999 地球物理学报 **42** 818]

[11] Li Z H, Huang Q H, Wang Y B 2009 *Chin. J. Geophys.* **52** 1915 (in Chinese) [李展辉, 黄清华, 王彦宾 2009 地球物理学报 **52** 1915]

[12] Zhuan S X, Ma X K 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110206 (in Chinese) [颛孙旭, 马西奎 2012 物理学报 **61** 110206]

[13] Xu L J, Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3470 (in Chinese) [徐利军, 刘少斌, 莫锦军, 袁乃昌 2006 物理学报 **55** 3470]

[14] Vivek K, Mani M 2006 *J. Comput. Appl. Math.* **230** 803

[15] Pedro P, Margarete O D, Paulo J S G F, Sônia M G, Anamaria G, José R P 2007 *IEEE Trans. Magn.* **43** 1013

[16] Marta D L L P, Stewart C, Robert P 2012 *J. Comput. Phys.* **231** 6754

[17] Rodrigo B B, Marco A C S, Raul R E S 2013 *Finite Elem. Anal. Des.* **75** 71

[18] Martin R, Komatitsch D, Gedney S D, Bruthiaux E 2010 *CMES* **56** 17

[19] Zhang W, Shen Y 2010 *Geophysics* **75** 141

[20] Zhao J G 2014 *Jilin University* **44** 675 (in Chinese) [赵建国 2014 吉林大学学报 **44** 675]
[21] Li J X 2007 *Ph. D. Dissertation* (Tianjin: Tianjin University) (in Chinese) [李建雄 2007 博士学位论文 (天津: 天津大学)]
[22] Deslauriers G, Dubuc S 1989 *Constr. Approx.* **5** 49
[23] Dubuc 1986 *Math. Anal. Appl.* **114** 185
[24] Satio N, Beylkin G 1993 *IEEE Trans. Signal Process.* **41** 319
[25] Sweldens W 1996 *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **3** 186
[26] M Sc Hao J L 2011 *Ph. D. Dissertation* (Zur Erlangung des akademischen Grades eines)
[27] Ge D B, Yan Y B 2005 *Finite-Differeence Time-Domain Method for Electromagnetic Waves* (Xi'an: Xidian University Press) p31 (in Chinese) [葛德彪, 闫玉波 2005 电磁波时域有限差分方法 (西安: 西安电子科技大学出版社) 第 31 页]

Ground penetrating radar numerical simulation with interpolating wavelet scales method and research on fourth-order Runge-Kutta auxiliary differential equation perfectly matched layer*

Feng De-Shan† Yang Dao-Xue Wang Xun

1) (*School of Geoscience and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China*)

2) (*Key Laboratory of Metallogenic Prediction of Non-ferrous Metals and Geological Environment Monitor, Central South University, Ministry of Education, Changsha 410083, China*)

(Received 28 May 2016; revised manuscript received 30 August 2016)

Abstract

Ground penetrating radar (GPR) forward is one of the geophysical research directions. Through the forward of geological model, the database of radar model can be enriched and the characteristics of typical geological radar echo images can be understood, which in turn can guide the data interpretation of GPR measured profile, thereby improving the GPR data interpretation level. In this article, the interpolating wavelet scale function by using iterative interpolation method is presented, and the derivative of scale function is used in spatial differentiation of discrete Maxwell equations. The forward modeling formula of GPR based on the interpolation wavelet scale method is derived by using fourth-order Runge-Kutta method (RK4) for calculating the higher time derivative. Compared with the conventional finite difference time domain (FDTD) algorithm based on the central difference method, the interpolation wavelet scale algorithm improves the accuracy of GPR wave equation in both space and time discretization. Firstly, the FDTD algorithm and the interpolation wavelet scale method are applied to the forward modeling of a layered model with analytic solution. Single channel radar data and analytical solution fitting indicate that the interpolation wavelet scale method has higher accuracy than FDTD, with the same mesh generation used. Therefore, auxiliary differential equation perfectly matching layer (ADE-PML) boundary condition is used on an interpolation wavelet scale, and the comparisons between reflection errors obtained using CPML(FDTD), RK4ADE-PML(FDTD), and RK4ADE-PML(interpolating wavelet scales) in a homogeneous medium model show that the absorption effect of RK4ADE-PML(interpolating wavelet scales) is better than the other two absorbing boundaries. Finally, interpolation wavelet scale method, with both UPML, FDTD and

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 41574116), the Innovation Driven of Central South University, China (Grant No. 2015CX008), the Program for New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education of China (Grant No. NCET-12-0551), the Research Foundation of Central South University, China (Grant No. 2014JSJJ001), and the Shenghua Yuying project of Central South University, China.

† Corresponding author. E-mail: fengdeshan@126.com

RK4ADE-PML loaded, is used for two-dimensional GPR forward modeling, showing good absorption effect for evanescent wave. From all the experimental results, the following conclusions are obtained. 1) Using the derivative of the interpolating wavelet scale function instead of central difference schemes for the spatial derivative discretization of Maxwell equations and time derivative calculated using the fourth-order Runge Kutta algorithm, the interpolating wavelet scale algorithm has higher accuracy than regular FDTD algorithm due to the improvement in the spatial and time accuracy of GPR wave equation. 2) The best absorption layer parameters of interpolating wavelet scale RK4ADE-PML are selected, when the maximum value of the reflection error is the minimum. The maximum reflection error can reach -93 dB, which increases 20 dB compared with that of UMPL boundary in FDTD algorithm. And the higher simulation accuracy of interpolating wavelet scale algorithm than FDTD algorithm is confirmed after calculating single channel radar data. 3) Comparing wave field snapshots of GPR forward modeling, radar pictures from wide-angle method and section method indicates that interpolating wavelet scale RK4ADE-PML reduces reflection error of absorption boundary, improves both spatial and time accuracy, is more effective than UPML boundary in eliminating false reflection of large angle incidence, and has better absorption effect for evanescent wave and low-frequency wave.

Keywords: ground penetrating radar, interpolating wavelet scales method, auxiliary differentiation, fourth-order Runge-Kutta

PACS: 41.20.Jb, 02.70.Bf, 92.60.Fm, 84.40.Xb **DOI:** 10.7498/aps.65.234102