

气泡线性振动对含气泡水饱和多孔介质声传播的影响

郑广赢 黄益旺

Effect of linear bubble vibration on wave propagation in unsaturated porous medium containing air bubbles

Zheng Guang-Ying Huang Yi-Wang

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 65, 234301 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.234301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.234301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I23>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

量子热声微循环的优化性能

[Optimization of the performance of quantum thermoacoustic micro-cycle](#)

物理学报.2016, 65(16): 164303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.164303>

超声场下刚性界面附近溃灭空化气泡的速度分析

[Velocity analysis for collapsing cavitation bubble near a rigid wall under an ultrasound field](#)

物理学报.2016, 65(4): 044304 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.044304>

基于温度梯度分布的宽频带声聚焦效应

[Broadband acoustic focusing effect based on temperature gradient distribution](#)

物理学报.2016, 65(4): 044303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.044303>

基于自适应加权约束最小二乘法的麦克风阵列稳健频率不变波束形成算法

[Adaptive weighted constrained least squares algorithm based microphone array robustness beamforming algorithm](#)

物理学报.2015, 64(17): 174303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.174303>

匀强磁场对水中气泡运动的影响

[Effect of magnetic field on single-bubble in water](#)

物理学报.2015, 64(12): 124301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.124301>

气泡线性振动对含气泡水饱和多孔介质声传播的影响*

郑广赢 黄益旺†

(哈尔滨工程大学, 水声技术重点实验室, 哈尔滨 150001)

(哈尔滨工程大学水声工程学院, 哈尔滨 150001)

(2016年6月20日收到; 2016年9月7日收到修改稿)

为了研究孔隙水含少量气泡时多孔介质中波的传播, 本文在 Biot 模型的基础上, 将孔隙水中气泡的体积振动融合到多孔介质的孔隙流体渗流连续性方程中, 从而得到了考虑气泡体积振动的孔隙流体渗流连续性方程. 在此基础上, 根据气泡线性振动下气泡瞬时半径和介质背景压力的关系, 以及多孔介质运动方程和流体介质运动方程, 导出了受气泡影响下多孔介质位移矢量波动方程, 建立了非水饱和多孔介质声速频散和衰减预报模型. 气泡的存在增大了孔隙水的压缩率, 导致含气泡水饱和多孔介质声速的降低. 当声波频率等于气泡的共振频率时, 在声波激励下, 介质呈现高频散, 且孔隙水中的气泡产生共振, 吸收截面达到最大, 使得多孔介质的声衰减也达到最大. 文中数值分析验证了上述结论, 表明了气泡含量、大小和驱动声场频率是影响声波在含少量气泡的水饱和多孔介质中传播的主要因素.

关键词: 气泡线性振动, 声速频散, 衰减, Biot 理论

PACS: 43.35.+d, 91.60.Lj

DOI: 10.7498/aps.65.234301

1 引言

自从 Biot^[1,2] 理论提出以来, Biot 理论被广泛应用于地球物理、石油工程、土木工程、海洋工程中, 使得饱和多孔介质中波传播的研究得到了长足的发展. 自然界中完全饱和多孔介质却是很少的, 几乎所有的岩石或者土壤中均包含两种流体, 例如气体和石油. 因此国内外的大量学者对非饱和多孔介质中的传播做了大量的研究.

其中应用最广泛的是 Domenico^[3-5] 在 Gassman^[6] 理论上提出的等效流体模型, 并且 Domenico 将其引入 BGG^[1,6,7] 理论, 建立了 BGGD 模型.

但上述模型仍为双相介质模型, Santos 等^[8,9] 考虑了毛细作用力影响, 采用理想试验方法, 推导了孔隙中含有两种不同流体的三相多孔介质的波动方程. Santos 的研究预测了 Biot 三相介质中存

在三种压缩波和一种剪切波. Ravazzoli 等^[10] 和 Carcione 等^[11] 分别在 Santos 模型的基础上研究了三相多孔介质中弹性波的性质. 李保忠^[12] 则推导了不同饱和态下非饱和多孔介质中波的传播模型, 并给出了不同饱和态下声速和品质因数的变化规律.

然而对于孔隙水含少量气泡的沙质沉积物这种非饱和状态, 现存的 Biot 三相介质理论均不适用, 可以使用等效流体模型简单地描述. 然而等效流体模型过于简单, 不能确切地描述气泡在孔隙水中振动的过程.

对于声波在含气泡液体中的传播, 国内外已有较多学者取得了大量的研究成果. Commander 和 Prosperetti^[13] 以及 Prosperetti 等^[14] 给出了考虑气泡线性振动的声波传播模型; 王勇等^[15,16] 利用 Kerry 的气泡振动模型并综合考虑气泡之间的声相互作用等对线性声波在含气泡液体中的传播做

* 国家自然科学基金 (批准号: 11274078) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: huangyiwang@hrbeu.edu.cn

了进一步的研究, 并在此基础上对非线性声波在含气泡水中的传播进行了研究. Bedford 和 Stem^[17] 利用变分法推导了含少量气泡的沉积层的声学模型, 并给出了气泡共振频率附近声速和衰减的变化规律. Anderson 和 Hampton^[18,19] 基于液体中的气泡响应, 提出了预测含气泡沉积物中声速频散和衰减模型, 但此模型仍相当于将沉积物考虑为两相介质, 忽略了水饱和多孔介质自身的频散特性.

为了考虑孔隙水中气泡的振动对波传播的影响, 在 Biot 模型的基础上, 本文将气泡体积分数的时间微分引入到多孔介质的孔隙流体渗流连续性方程中, 以此表示气泡的体积振动. 根据 Commander 给出的气泡线性振动下气泡瞬时半径与介质背景压力的关系, 以及多孔介质运动方程和流体介质运动方程, 最终得到了受气泡影响的多孔介质位移矢量波动方程. 由于 Commander 给出的气泡振动模型考虑了切变黏滞以及热传导效应, 因此本文得到的波动方程考虑了气泡受迫振动时引起的切变黏滞和热传导衰减, 实现了气泡含量、大小以及驱动频率对含气泡水饱和多孔介质波传播的影响规律分析.

2 孔隙水含气泡时多孔介质声传播建模

2.1 Biot 运动方程

第一个 Biot 运动方程是多孔介质混合物的运动方程

$$\tau_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i - \rho_f \ddot{v}_i, \quad (1)$$

其中, $v_i = \beta(u_i - V_i)$ 表示孔隙流体相对于固体框架的相对位移矢量 \mathbf{v} 在 i 方向的分量, β 是孔隙率, u_i 和 V_i 分别为骨架和孔隙流体的绝对位移矢量 \mathbf{u} , \mathbf{V} 在 i 方向的分量; ρ 是多孔介质混合物的密度; ρ_f 是孔隙流体密度; $\tau_{ij,j}$ 是多孔介质应力.

第二个 Biot 运动方程是考虑流体压力梯度的运动方程

$$-\partial_i p = \rho_f \ddot{u}_i - \frac{\alpha \rho_f}{\beta} \ddot{v}_i + \frac{\eta}{\kappa} \dot{v}_i, \quad (2)$$

其中, p 是孔隙流体声压, η 是孔隙流体黏滞系数, α 为弯曲度, κ 为渗透率.

2.2 有效应力原理

多孔介质的应力应变关系

$$\tau_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma \delta_{ij} p, \quad (3)$$

其中, λ 和 μ 为拉梅常数, e 为固体骨架的体积应变, ε 为固体骨架的剪应变.

孔隙水的体积应变表示为

$$-d\varepsilon_w = \frac{d\rho_w}{\rho_w} = \frac{dp}{K_w}, \quad (4)$$

其中, ρ_w 为孔隙水密度, K_w 为孔隙水体积模量.

设固体骨架承受的平均有效应力 (effective mean pressure) 为 p' , 则固体骨架和颗粒的体积应变分别表示为

$$-d\varepsilon_v = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{d\rho_d}{\rho_d} = \frac{dp'}{K_b} + \frac{dp}{K_s}, \quad (5a)$$

$$-d\varepsilon_s = \frac{d\rho_s}{\rho_s} = \frac{dp}{K_s} + \frac{dp'}{(1-\beta)K_s}, \quad (5b)$$

其中, $\rho_d = (1-\beta)\rho_s$, $d\rho_d = (1-\beta)d\rho_s - \rho_s d\beta$, K_b 为固体骨架的体积模量, K_s 为固体颗粒的体积模量, ρ_s 为固体颗粒密度.

2.3 孔隙流体渗流连续性方程

不同饱和状态下, 孔隙水和孔隙气体的存在形式不同, 使得声波激励下孔隙水和孔隙气体的渗流方式不同. 对于孔隙水中含少量气泡这种情形, 假设所有的气泡具有相同的大小, 并且在单位质量的混合物中有相同的气泡个数. 在声波的激励下, 气泡在孔隙水中振动, 并随着孔隙水在孔隙中流动. 本节通过将孔隙流体密度写成孔隙流体等效密度的形式, 引入了气泡体积分数的微分, 以此来表示气泡的体积振动, 从而得到了考虑气泡体积振动时孔隙流体渗流连续性方程.

本文采用欧拉观点来描述多孔介质的渗流问题^[12]. 在多孔介质中任取一个控制体 Θ , 孔隙度为 β , 被气液两相流体饱和. 包围控制体 Θ 的外表面为 Ω . 在外表面任取一个面元 $d\Omega$, 其外法线方向为 \mathbf{n} . Δt 时间内, 液体通过面元的位移为 \mathbf{V} . 故 Δt 时间内液体通过面元的质量为 $\beta \rho_f \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Omega$, 故通过整个外表面 Ω 逸出的流体总质量为

$$\oint_{\Omega} \beta \rho_f \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Omega.$$

另一方面, 在控制体中任取一个体元 $d\Theta$, 由于非稳态引起孔隙流体密度随时间变化. Δt 时间内, 由于密度变化引起流体的质量增量为 $d(\beta \rho_f) d\Theta$, 因而整个控制体内各相质量增量为

$$\iiint_{\Theta} d(\beta \rho_f) d\Theta.$$

由弹性波动引起的孔隙流体流动属于非稳态无源流动, 根据质量守恒定律, 控制体内流体质量增量应该等于通过表面积流出的质量, 即

$$\iiint_{\Theta} d(\beta\rho_f) d\Theta + \iint_{\Omega} \beta\rho_f \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Omega = 0, \quad (6)$$

其中, $\rho_f = (1 - \beta_g)\rho_w + \beta_g\rho_g \approx (1 - \beta_g)\rho_w$, β_g 表示气体相对于孔隙流体的体积分数.

利用高斯公式, 面积分可化为体积分:

$$\iiint_{\Theta} [d(\beta\rho_f) + \nabla \cdot (\beta\rho_f \mathbf{V})] d\Theta = 0. \quad (7)$$

由于控制体是连续的, 只要被积函数连续, 当整个体积分等于零必然导致其被积函数为零, 又考虑介质各向同性, 于是得到微分形式的连续方程:

$$d\beta + \beta \frac{d\rho_f}{\rho_f} - \nabla \cdot \mathbf{v} + \beta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (8)$$

考虑流体中含体积分数为 β_g 的气体 $\rho_f = (1 - \beta_g)\rho_w + \beta_g\rho_g \approx (1 - \beta_g)\rho_w$, 代入连续性方程(8)整理得

$$d\beta + \beta \frac{d\rho_w}{\rho_w} - \beta d\beta_g - \nabla \cdot \mathbf{v} + \beta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (9)$$

式中等号左端第一项 $d\beta$ 为孔隙度的时间微分, 表示在声波的激励下, 孔隙度发生变化, 并且固体骨架和颗粒的变化通过(5)式与孔隙度变化联系在一起, 可见孔隙度的变化中隐含了固体颗粒的应变以及固体骨架的应变, 因此(9)式同时考虑了流体和固体在声波激励下的变化.

将(4)式和(5)式代入(9)式得到受气泡影响的修正的微分形式的孔隙流体渗流连续性方程

$$-\dot{p} = C \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} - M \operatorname{div} \dot{\mathbf{v}} - M\beta \cdot \dot{\beta}_g, \quad (10)$$

其中, C 和 M 为 Stoll^[20] 给出的 Biot 弹性模量, $\dot{\beta}_g$ 表示气泡体积分数的时间导数, 代表气泡体积振动的影响.

2.4 修正的含气泡水饱和多孔介质 Biot 方程

联立方程(1), (2), (3), (10), 得到修正的波动方程

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + [H - 2\mu] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - C \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ - \beta C \nabla \beta_g = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho \mathbf{u} - \rho_w \mathbf{v}), \quad (11) \\ C \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - M \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \beta M \nabla \beta_g \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_w \mathbf{u} - \frac{\alpha \rho_w}{\beta} \mathbf{v} \right) - \frac{\eta F}{\kappa} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (12)$$

为处理(11)式和(12)式中的气泡体积分数梯度 $\nabla \beta_g$, 引入水饱和沙中等效流体密度模型中的等效声压 p_{eff} , 等效质点位移 $\mathbf{u}_{\text{eff}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, 有等效流体介质的运动方程

$$\nabla p_{\text{eff}} = \rho_{\text{eff}} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{eff}} = \rho_{\text{eff}} (\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{v}}), \quad (13)$$

其中等效流体密度

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{\rho \tilde{\rho}_0 - \rho_w^2}{\tilde{\rho} + \rho - 2\rho_w}, \quad (14)$$

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{\alpha \rho_w}{\beta} - \frac{iF\eta}{\kappa\omega}. \quad (15)$$

在这里引入 Commander 在 $(\omega R_0)/c \ll 1$ 的情况下, 给出的气泡线性振动时气泡瞬时半径 R 和背景介质压力的关系式, 且认为等效流体压力为背景压力, 进一步可得到气泡体积分数 β 和等效声压 p_{eff} 的关系(16)式, 附录中简要地介绍了(16)式的参数.

$$\nabla \beta_g = -\frac{4\pi N R_0}{\rho_w (\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega)} \nabla p_{\text{eff}}, \quad (16)$$

将(16)式代入(11)式和(12)式, 并结合(13)式得

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + [H - 2\mu] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - C \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ = \frac{\partial^2}{\partial t^2} ((\rho + \gamma \tilde{\rho}) \mathbf{u} - (\rho_w + \gamma \tilde{\rho}) \mathbf{v}), \quad (17) \\ C \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - M \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left((\tilde{\rho} + \rho_w) \mathbf{u} - \left(\frac{\alpha \rho_w}{\beta} + \tilde{\rho} \right) \mathbf{v} \right) - \frac{\eta F}{\kappa} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (18) \end{aligned}$$

其中,

$$\tilde{\rho} = \frac{4\pi N R_0 M \beta}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega)} \frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_w}, \quad \gamma = 1 - \frac{K_b}{K_s}.$$

整理可得

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\text{ratio}_2} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{[H - 2\mu]}{\text{ratio}_2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\ - \frac{C}{\text{ratio}_2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{(\rho + \gamma \tilde{\rho})}{(\rho_w + \gamma \tilde{\rho})} \rho_w \mathbf{u} - \rho_w \mathbf{v} \right), \quad (19) \\ \frac{C}{\text{ratio}_1} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{M}{\text{ratio}_1} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_w \mathbf{u} - \left(\frac{\alpha \rho_w}{\beta} + \tilde{\rho} \right) \frac{1}{\text{ratio}_1} \mathbf{v} \right) \\ - \frac{\eta F}{\text{ratio}_1 \kappa} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (20) \end{aligned}$$

选用 $\text{ratio}_1 = \frac{\rho_w + \tilde{\rho}}{\rho_w}$, $\text{ratio}_2 = \frac{\rho_w + \gamma\tilde{\rho}}{\rho_w}$, 当气泡体积分不为零时, 其为模值大于1的复数. 观察 (19) 式和 (20) 式可以发现, 气泡的存在会改变多孔介质的弹性模量, 即改变了多孔介质混合物的压缩性, 然而气泡的存在几乎不改变多孔介质混合物的等效密度, 因此气泡的存在会导致多孔介质声速显著降低. 其次由于气泡振动过程中与孔隙水之间的切变黏滞和热传导效应引起了附加的能量损耗, 这部分损耗隐含在方程 (17), (18) 中 $\tilde{\rho}$ 的虚部. 因此本文给出的孔隙水含气泡的多孔介质声波的衰减机理包括气泡与孔隙水的黏滞和热传导效应以及孔隙水和骨架相对运动的黏滞效应, 后者为 Biot 提出的经典的多孔介质衰减机理.

值得注意的是, 当气泡的体积分 β_g 为零时, 单位体积气泡个数 N 为零, 使得 $\tilde{\rho}$ 为零, 方程 (17), (18) 还原为水饱和多孔介质的 Biot 方程.

3 声速和衰减数值仿真

在气泡线性振动 $(\omega R_0)/c \ll 1$, 且频率低于气泡共振频率的情况下, 分别仿真计算不同气泡体积分下声速和衰减随频率的变化, 以及气泡体分为零时, 退化为 Biot 模型的情况. 仿真所用到的模型参数见表 1, 仿真的声速和衰减随频率的变化曲线见图 1 和图 2. 可以发现, 当气泡含量很高时, 声速受气泡影响很大, 几乎没有频散特性; 驱动频率接近气泡共振频率时, 气泡含量越高, 衰减越大; 气泡体积分低于 10^{-6} 时, 曲线与气泡含量为零时几乎一致, 可以认为此时气泡对水饱和多孔介质的声速频散和衰减特性无影响.

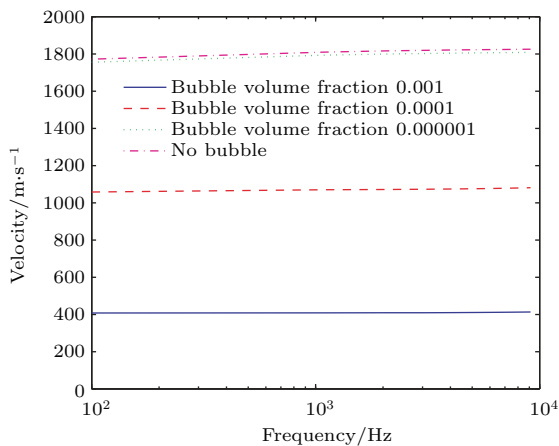


图 1 (网刊彩色) 不同气泡体积分下声速随频率的变化
Fig. 1. (color online) Dispersion curve with different bubble volume fraction.

表 1 模型参数
Table 1. Model parameters.

模型参数	单位	值
Biot 模型参数		
颗粒粒径 d	mm	0.781
颗粒密度 ρ_s	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	2465
颗粒体积弹性模量 K_s	Pa	3.6×10^{10}
孔隙水密度 ρ_w	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	998.2
孔隙水体积弹性模量 K_w	Pa	2.193×10^9
孔隙水黏滞系数 η	Pa·s	1.002×10^{-3}
孔隙度 β		0.370
渗透率 κ	m^2	2.54×10^{-10}
孔隙尺寸 a_p	m	1.53×10^{-4}
弯曲度 α		1.25
框架体积弹性模量 K_b	Pa	5.31×10^7
框架剪切模量 μ	Pa	5.58×10^6
气泡参数		
气体密度 ρ_g	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	1.1691
气体声速 c_g	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	340
多孔介质环境压强 P_∞	Pa	1.01×10^5
气体热扩散系数 D	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	2.4×10^{-5}
表面张力 σ	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	72.75×10^3
比热 γ_g		1.4
平均气泡半径 R_0	mm	0.5

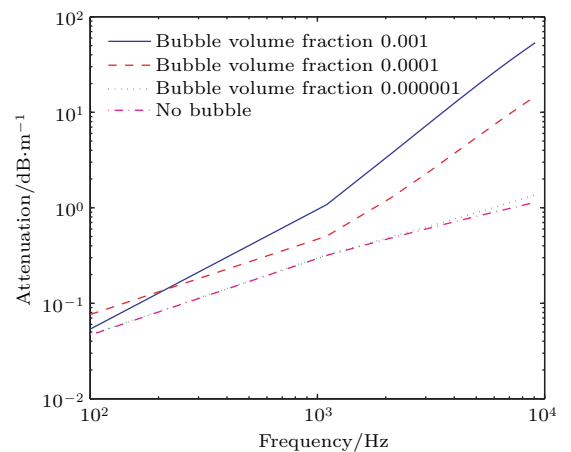


图 2 (网刊彩色) 不同气泡体积分下衰减随频率的变化
Fig. 2. (color online) Attenuation curve with different bubble volume fraction.

图 3 和图 4 给出了气泡体分为 0.001 时, 全频带下声速和衰减随频率的变化. 根据 Kerry 的气泡振动模型, 气泡的共振频率与声场驱动频率、气泡半径以及静压力有关, 当前驱动频率下, 半径

0.5 mm 的气泡的共振频率分布在 5.5—6.5 kHz. 在响应频率附近时, 由于气泡的影响, 介质呈现高频散, 模型预测的声速可能很高, 这与 Anderson 和 Hampton 模型预测的结果类似, 但迄今为止还未在实验中观测到. 衰减则是在共振频率附近达到极大值, 由于在声波激励下, 孔隙水中的气泡产生共振, 吸收截面达到最大, 使得多孔介质的声衰减也达到最大. 声场驱动频率高于气泡谐振频率时, 气泡散射声信号, 并且声响本质上在介质周围, 因此声速保持为常数与不含气泡时相同, 衰减高于不含气泡的水饱和和多孔介质, 并随频率增加而增大.

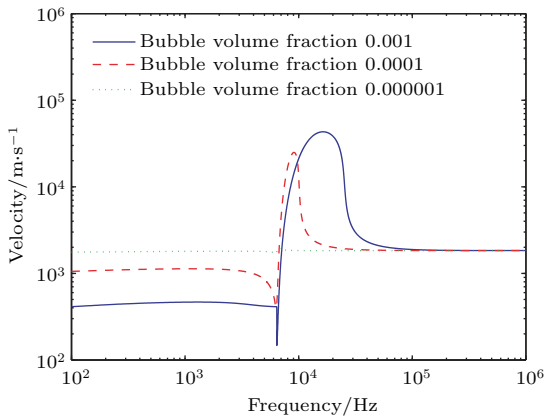


图 3 (网刊彩色) 气泡共振频率附近时声速随频率的变化
Fig. 3. (color online) Dispersion curve of the whole frequency band.

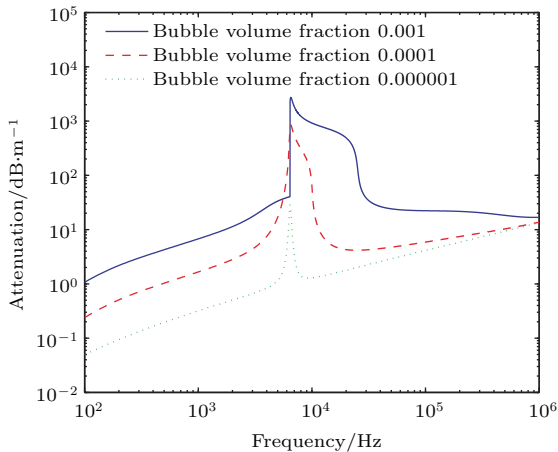


图 4 (网刊彩色) 气泡共振频率附近时衰减随频率的变化
Fig. 4. (color online) Attenuation curve of the whole frequency band.

此外通过比较不同气泡体积分数下声速和衰减的变化, 发现气泡含量越高, 声速频散和衰减的共振区间越大, 这与含气泡水的声速和衰减的变化类似 [13].

在控制气泡的大小和驱动声场频率一定的情况下, 驱动频率接近气泡共振频率, 仿真计算声速频散和衰减随气泡体积分数的变化, 见图 5 和图 6. 对于孔隙流体含有气泡的多孔介质, 不管气泡大小如何, 气泡体积分数的增加均会导致多孔介质的声传播速度显著减小, 衰减显著增加. 而对于图 5 和图 6 中相同体积分数的情况, 气泡越大, 衰减系数越大, 声速越低. 原因是气泡越大, 气泡共振频率越低, 当前声场的驱动频率越接近气泡的共振频率, 会出现声速降低, 衰减增大的情况. 控制气泡体积分数和气泡大小不变, 驱动频率越靠近气泡共振频率, 衰减系数越大. 并且在气泡含量低的情况下, 声速也随驱动声场频率的增加而增大; 然而在气泡含量较高的情况下, 气泡含量成了影响声速大小的主要因素, 频散特性很难体现.

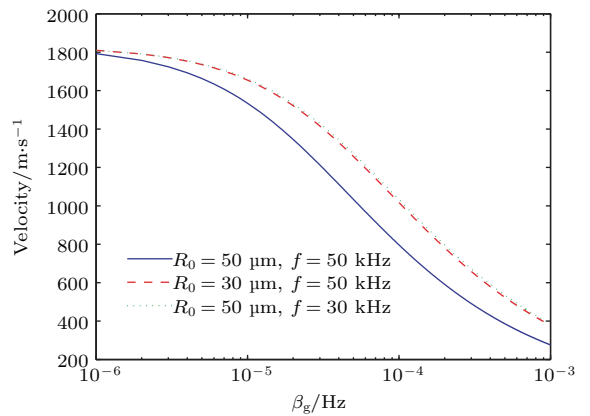


图 5 (网刊彩色) 气泡体积分数对声速的影响
Fig. 5. (color online) The effect of bubble volume fraction on the sound speed.

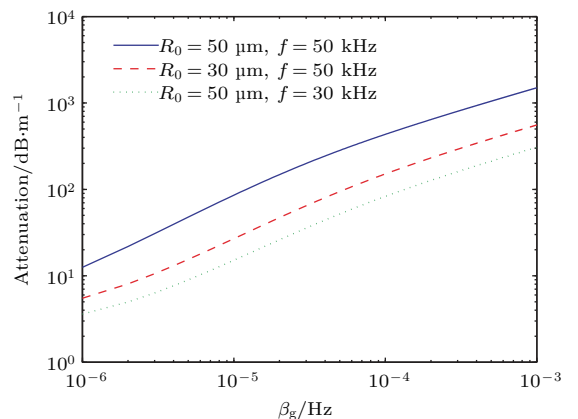


图 6 (网刊彩色) 衰减随气泡体积分数的变化
Fig. 6. (color online) The effect of bubble volume fraction on the attenuation coefficient.

4 结 论

对于声波在孔隙水分布少量气泡的水饱和多孔介质中的线性传播, 本文推导了考虑气泡线性振动情况下的波动方程. 在满足 $\omega R_0/c \ll 1$ 的前提下, 得到了多孔介质中第一纵波声速和衰减的表示. 由于气泡在孔隙流体中的振动, 使得修正的波动方程相比 Biot 方程, 其中的等效 Biot 弹性模量减小, 导致声速减小; 方程右端引入的 $\tilde{\rho}$ 的虚部引入了气泡振动附加的衰减机理, 即气泡与孔隙水的切变黏滞和热传导效应. 通过数值计算可以验证气泡的存在使得多孔介质的声速明显减小, 衰减增大. 而对于相同体积分数且驱动频率在气泡共振频率附近的情况, 改变气泡半径使得当前计算频率越接近气泡共振频率, 衰减系数越大. 驱动频率在远小于气泡共振频率的情况下, 当气泡含量低时, 声速和衰减均随驱动频率的增大而增大; 当气泡含量高时, 声速几乎不受驱动频率变化影响, 衰减随驱动频率增大而增大. 所以, 可以认为气泡含量、大小和驱动声场频率是影响声波在孔隙水分布少量气泡的水饱和多孔介质中的线性传播的主要因素.

附录 A 声波在含气泡液体中的线性传播

对于单个气泡的物理模型, 做以下几点假设: 气泡保持球形; 泡内气体是理想气体; 泡内的压强空间分布均匀; 忽略泡内包含的水汽; 气泡的中心相对流体静止不动. 考虑液体的黏滞作用和气液界面的热传导, 忽略气泡的形成、破裂与合并等. 在这些前提下气泡做径向的受迫振动. 它的控制方程可以从气泡边界的压力连续方程中得到

$$P_{in} - P_B = \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\mu\dot{R}}{R}, \quad (A1)$$

式中的圆点表示时间微分, P_B 表示气液边界液体侧的压强, 常数 μ 表示周围液体的动态黏滞系数, P_∞ 表示液体的环境压强, 常数 σ 是气液界面的表面张力系数, $P_{in,0}$ 表示气泡内部的压强. 从 (A1) 式可以得到:

$$P_{in,0} = P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0}. \quad (A2)$$

用 Commander 给出的在考虑液体压缩性时气泡的振动方程来描述气泡的振动, R 为气泡的瞬时半径, c 为液体中声速.

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R\ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) \dot{R}^2 \\ & = \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{\dot{R}}{c} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt}\right) (P_B - P), \end{aligned} \quad (A3)$$

Commander 在 $\frac{\omega R_0}{c} \ll 1$ 的情况下, 线性化 (A3) 式求解得到气泡瞬时半径和声压的关系

$$R = R_0(1 + X), \quad (A4)$$

$$X = -(\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega)^{-1} \frac{P_w}{\rho R_0^2}, \quad (A5)$$

其中,

$$\omega_0^2 = \frac{P_{in,0}}{\rho R_0^2} \left(\text{Re}\phi - \frac{2\sigma}{R_0 P_{in,0}} \right), \quad (A6)$$

$$b = \frac{2\mu}{\rho R_0^2} + \frac{\omega^2 R_0}{2c} + \frac{1}{\rho R_0^2} \frac{1}{2\omega} \text{Im}(P_{in,0}\phi), \quad (A7)$$

$$\phi = \frac{3\gamma_g}{1 - 3(\gamma_g - 1)i\chi[(i/\chi)^{1/2} \coth(i/\chi)^{1/2} - 1]}, \quad (A8)$$

其中, $\chi = D/\omega R_0^2$, D 为气体的热扩散系数, γ_g 为气体的比热.

参考文献

- [1] Biot M A 1956 *J. Acoust. Soc. Am.* **28** 168
- [2] Biot M A 1956 *J. Acoust. Soc. Am.* **28** 179
- [3] Domenico S N 1974 *Geophysics* **39** 759
- [4] Domenico S N 1976 *Geophysics* **41** 882
- [5] Domenico S N 1977 *Geophysics* **42** 1339
- [6] Gassmann F 1951 *Geophysics* **16** 673
- [7] Geertsma J 1961 *Geophysics* **26** 169
- [8] Santos J E, Corbero J M, Jim D J 1990 *J. Acoust. Soc. Am.* **87** 1428
- [9] Santos J E, Jim D J, Corbero J M, Lovera O M 1990 *J. Acoust. Soc. Am.* **87** 1439
- [10] Ravazzoli C L, Santos J E, Carcione J M 2003 *J. Acoust. Soc. Am.* **113** 1801
- [11] Carcione J M, Cavallini F, Santos J E, et al. 2004 *Wave Motion* **39** 227
- [12] Li B Z 2007 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [李保忠 2007 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]
- [13] Commander K W, Prosperetti A 1989 *J. Acoust. Soc. Am.* **85** 732
- [14] Prosperetti A, Crum L A, Commander K W 1988 *J. Acoust. Soc. Am.* **83** 502
- [15] Wang Y, Lin S Y, Zhang X L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 064304 (in Chinese) [王勇, 林书玉, 张小丽 2013 物理学报 **62** 064304]
- [16] Wang Y, Lin S Y, Zhang X L 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 034301 (in Chinese) [王勇, 林书玉, 张小丽 2014 物理学报 **63** 034301]
- [17] Bedford A, Stem M 1983 *J. Acoust. Soc. Am.* **73** 409
- [18] Anderson A L, Hampton L D 1980 *J. Acoust. Soc. Am.* **67** 1865
- [19] Anderson A L, Hampton L D 1980 *J. Acoust. Soc. Am.* **67** 1890
- [20] Stoll R D 1974 *Acoustic Waves in Saturated Sediments* (New York: Plenum Press) pp19–39

Effect of linear bubble vibration on wave propagation in unsaturated porous medium containing air bubbles*

Zheng Guang-Ying Huang Yi-Wang[†]

(Acoustic Science and Technology Laboratory, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

(College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

(Received 20 June 2016; revised manuscript received 7 September 2016)

Abstract

Biot model has widely been used in geophysics, petroleum engineering, civil engineering, and ocean engineering since it was presented, and thus the research on the wave propagation in saturated porous medium has made much progress. However, fully saturated porous medium is rarely found in nature. Almost all the rocks or soils contain two kinds of fluids, such as gas and petroleum. Many researches have been done on the wave propagation in unsaturated porous medium. As is well known, a small volume of gas bubbles existing in a liquid can greatly change the velocity and attenuation of acoustic wave in the liquid. Evidences are beginning to be accumulated that the velocity and attenuation of acoustic wave in a saturated marine sediment can be affected by the gas bubbles existing in the saturated liquid. To investigate the sound propagation in a porous medium when the pore water contains a small number of air bubbles, in this paper we integrate the volume vibrations of bubbles in pore water into the continuity equation of pore-fluid filtration in porous medium based on Biot theory, so as to obtain the continuity equation of pore-fluid filtration with bubble volume vibration. On this basis, according to the relationship between the instantaneous radius of bubble and the background pressure of the medium under the linear vibration of bubble, as well as the equations of motion of the fluid medium and porous medium, a new displacement vector wave equation of porous medium under the influence of bubble is derived, which establishes the model for the sound velocity dispersion and attenuation prediction under the unsaturated porous medium. The presence of air bubbles increases the compressibility of pore fluid, which leads to the decrease in the sound velocity of the bubbly saturated porous medium. When the wave frequency equals the resonance frequency of the bubbles, the bubbles in pore water will produce resonance; the medium will present high dispersion and the velocity can greatly exceed the gas-free velocity. However, these have not been measured in field data. The absorption cross section of the air bubble can reach a maximum value, which leads to the maximum attenuation of the porous medium. It should be noted that the attenuation coefficient calculated with this model is related to the damping of the bubble motion due to radiation, thermal and internal friction, and the dissipation of the relative motion between the pore water and porous solid frame. The obtained numerical analysis is consistent with the above conclusion, which indicates that the volume concentration, the bubble size and the excitation frequency of the sound field are important parameters affecting the sound wave propagation in the saturated porous medium containing few bubbles.

Keywords: linear vibration of bubbles, sound velocity dispersion, attenuation, Biot theory

PACS: 43.35.+d, 91.60.Lj

DOI: [10.7498/aps.65.234301](https://doi.org/10.7498/aps.65.234301)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11274078).

† Corresponding author. E-mail: huangyiwang@hrbeu.edu.cn