基于亥姆霍兹定理计算动力学系统的哈密顿能量函数

王春妮 王亚 马军

Calculation of Hamilton energy function of dynamical system by using Helmholtz theorem

Wang Chun-Ni Wang Ya Ma Jun

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 240501 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.240501
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.240501
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I24

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 65, No. 24 (2016) 240501

基于亥姆霍兹定理计算动力学系统的哈密顿能量函数*

王春妮 王亚 马军†

(兰州理工大学理学院物理系, 兰州 730050)

(2016 年 6 月 11 日收到; 2016 年 8 月 24 日收到修改稿)

亥姆霍兹定理表明任意空间矢量场可以分解为涡旋场和梯度场的叠加. 由于电磁场变化和电磁波传播则导致电磁场能量的迁移, 动力学振子和神经元处于复杂电磁环境下必然伴随能量的吸收和释放. 在非线性混沌电路、电容器充电放电以及电感线圈感应过程中都伴随着能量的转换和迁移. 包含量纲的非线性振荡电路可利用标度变换方法转换为无量纲的动力学方程. 利用平均场理论, 电场能量和磁场能量的转换可用若干非线性振荡电路的动力学方程来刻画. 基于亥姆霍兹定理来研究一类无量纲非线性动力学系统的哈密顿能量计算问题, 对于实际的非线性振荡电路, 通过标度变换可快速计算其能量函数. 该结果对于动力学系统自适应控制有重要的参考价值.

关键词: 亥姆霍兹定理, 能量函数, 振荡电路, 混沌系统

PACS: 05.45.–a **DOI:** 10.7498/aps.65.240501

1 引 言

从生物个体的新陈代谢[1]、信号传播、动力系统以及多体系统协作, 能量供给是非常关键的因素. 对于工程和动力学系统的控制问题, 不可避免地要考虑控制代价, 这都可以通过控制器能耗[2]来评估. 非线性振荡电路在混沌态下可以产生宽频信号, 对混沌系统的优化控制使得受控系统可达到目标轨道或输出期望的信号. 进一步, 对多个非线性振荡电路的同步控制则可获得更大功率的宽频信号. 非线性振荡电路通常包含必要的非线性电子元件, 如负电阻 (伏安曲线非线性)、负电感、负电容、忆阻器[3,4]、忆感器[5,6]、约瑟夫森结等[7], 对这些元件组合的电子线路根据基尔霍夫定律可给出电路的动力学方程, 通过非线性分析可以确定参数范围如设计混沌电路, 或者使得电路输出呈现尖峰放电 (spiking)、簇放电 (bursting) 甚至混沌放电, 即设计神经元电路[8−10]来研究神经元电活动迁移特性. 对这些非线性振荡电路控制可使得系统输出达到期望的目标信号. 电磁场能量通常存储在电容或者电感元件中, 电子线路中电流改变与电容器的充电、放电以及电感线圈的感应有关. 对于变量比较少 (低维) 的非线性振荡电路, 其电磁场能量容易计算; 对于多变量的非线性振荡电路以及耦合振荡电路网络则需考虑量纲问题, 这导致计算难度增加. 因此, 对于多变量的实际振荡电路可通过无量纲变换将电磁场方程转换为无量纲的动力学方程组来简化计算.

另一方面, 对于无量纲的动力学系统, 非线性分析和优化控制可以为实际复杂系统的控制提供必要的参考. 以神经系统为例, 神经元和胶质细胞作为神经系统的基本单元, 神经元电活动可以呈现丰富的动力学行为, 如静息态、尖峰放电、簇放电、混沌放电甚至多种模式交替混合放电[11,12]. 实际的神经元结构比较复杂, 如细胞膜上的离子通

* 国家自然科学基金 (批准号: 11365014, 11372122) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hyperchaos@163.com

道、通道随机开关导致的离子通道噪声、自突触连接对神经元电活动和神经元网络群体电活动的调制[13,14], 其电活动过程必然离不开能量供给. 生物系统新陈代谢能量的供给目前主要集中于实验研究, 量化计算方面还需要进一步探索. 在不考虑细胞离子通道结构时, Hindmarsh 和 Rose[15] 提出了一类数学模型——Hindmarsh-Rose 神经元模型来刻画神经元电活动的基本特征, 这种无量纲的神经元模型比传统的包含量纲的生物神经元模型 (Hodgkin-Huxley 方程组) 更便于动力学分岔分析和神经元电活动、神经元网络群体电活动行为的操控. 如文献 [16] 计算了 Hindmarsh-Rose 神经元模型在不同放电态下的能量特征, 研究结果表明神经元在簇放电和混沌放电下能量值变得更低, 该结果可解释癫痫症状的猝发性和阵发性机制, 即神经元簇放电可快速释放能量, 随后使得神经元恢复正常的放电行为. 文献 [17, 18] 在考虑细胞膜内外离子浓度涨落导致细胞内外电磁场分布改变的电磁效应后, 提出用磁通量来刻画这种电磁效应, 并用忆阻器来实现磁通和膜电位的耦合, 研究了神经元多种放电模式交替出现的机制和神经元磁记忆机理.

本文基于亥姆霍兹定理[19] 讨论了一类无量纲微分动力学系统的哈密顿能量计算问题, 并通过实际的振荡电路来验证.

2 理论和方法

亥姆霍兹定理将任意电磁场分解为梯度场和涡旋场的叠加, 场方程满足

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r}) \\ &= -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) + \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}),\end{aligned} \tag{1}$$

即, 任意场可分解为标量势的负梯度和矢量函数的旋度之和, (1) 式可以利用狄拉克-δ 和矢量的运算规则来证明, 证明过程如下:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(x,y,z) = \int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3r'$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}^3r',$$
$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_V \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r',$$
$$\nabla\times\nabla\times = \nabla\nabla\cdot - \nabla^2,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int_V \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi}\nabla\nabla\cdot\int_V \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \\ &= \nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_V \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right) \\ &\quad - \nabla\left(\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\int_V \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right) \\ &= \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) - \nabla\phi(\boldsymbol{r});\end{aligned} \tag{2a}$$

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\int_V \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_V -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_V \Bigg[-\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) \\ &\quad + \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\Bigg]\mathrm{d}^3r' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}^3r' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}^2r' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r';\end{aligned} \tag{2b}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_V \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\times\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_V \Bigg[\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\ &\quad - \nabla'\times\left(\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\Bigg]\mathrm{d}^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3r' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\oint_s \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\times\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}^2r'.\end{aligned} \tag{2c}$$

其中纵向场或无涡旋场项满足以下条件:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{r}) &= -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\nabla\int_V \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\bar{r}'|}\mathrm{d}^3r'\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4\pi}\nabla\oint_{S}\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\bar{r}'|}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}^2r',\\
&\nabla\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{r})=0.
\end{aligned}\tag{3}
$$

横向场或者涡旋场项则满足:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r})&=\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\\
&=\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\int_V\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\bar{r}'|}\mathrm{d}^3r'\\
&=\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_V\frac{\nabla'\times F(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\bar{r}'|}\mathrm{d}^3r'\\
&\quad+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\oint_{S}\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\bar{r}'|}\times\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}^2r',\\
\nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r})&=0.
\end{aligned}\tag{4}
$$

空间电荷分布密度的变化引起空间电场的变化, 进一步诱发磁场的产生, 磁场的变化反过来影响空间电荷、电场的分布. 即场的诱发或者产生来自于某变量的改变,

$$
\dot{\boldsymbol{X}}=\mathrm{d}\boldsymbol{X}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{r}),\tag{5}
$$

其中 $\boldsymbol{X}=\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ 为系统变量. 对于一个简单的RLC振荡电路, 其能量主要存储在电容器和电感线圈内, 其能量可表示为

$$
H=\frac{1}{2}LI^2+\frac{1}{2}CV^2,\tag{6}
$$

其中 L 为线圈的电感值, C 为电容器的电容值, I 为电感线圈的电流, V 为电容器两端的电压 (此电路中只有一个电容器, 一个电感线圈). 对于RLC振荡电路, 根据基尔霍夫定律可以写出振荡电路的方程, 进一步采用标度变换可以得到无量纲的动力学方程组. 因此, 下面以广义的动力学系统来讨论一般连续动力学系统的哈密顿能量求解问题.

基于平均场理论, n 维动力学系统的变量演化可以用 n 个变量的动力学方程组来表示:

$$
\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n(X)}{\partial x_n}\\ \frac{\partial F_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2(X)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n(X)}{\partial x_n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X}).\tag{7}
$$

设无量纲的动力学系统 (7) 的哈密顿能量函数为 H, 能量的改变来自于力场的做功, 能量函数 H 满足如下条件:

$$
\begin{cases}\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}(X)=0,\\ \nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(X)=\dot{H}=\mathrm{d}H/\mathrm{d}t.\end{cases}\tag{8}
$$

其中梯度场和涡旋场分别为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}(X)&=\begin{pmatrix}0 & \frac{\partial F_1(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n(X)}{\partial x_n}\\ \frac{\partial F_2(X)}{\partial x_1} & 0 & \cdots & \frac{\partial F_2(X)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(X)}{\partial x_2} & \cdots & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(X)&=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1(X)}{\partial x_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{\partial F_2(X)}{\partial x_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & & \frac{\partial F_n(X)}{\partial x_n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{9}
$$

为简单起见, 以一个三变量系统为例来验证 (8) 式, 其动力学系统方程为

$$
\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2,x_3),\\ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2,x_3),\\ \dot{x}_3=f_3(x_1,x_2,x_3)\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\dot{x}=f_1(x,y,z),\\ \dot{y}=f_2(x,y,z),\\ \dot{z}=f_3(x,y,z).\end{cases}\tag{10}
$$

其对应的矩阵方程为

$$
\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial x} & * & **\\ *** & \frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial y} & ****\\ ****** & ******* & \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial z}\end{pmatrix}
$$

$$\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}. \tag{11}$$

若把此三变量动力学方程对应的力场和做功对应, 则无量纲的能量函数满足

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H&=\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z\\&=\nabla\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\left(\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial H}{\partial y},\frac{\partial H}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}y\\\mathrm{d}z\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\dot{H}=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial H}{\partial y},\frac{\partial H}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t\\\mathrm{d}y/\mathrm{d}t\\\mathrm{d}z/\mathrm{d}t\end{pmatrix}\\&=\left(\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial H}{\partial y},\frac{\partial H}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix}\\&=\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}+\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}\\&=\nabla\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}+\nabla\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}\\&=\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}=\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}.\end{aligned} \tag{13}$$

因为 $\nabla\boldsymbol{H}$ 的方向和涡旋场方向 (切线) 垂直, 所以 $\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}=0$ 成立. 即对于任意的连续的微分动力学系统, 都可以基于 (8) 式来获得对应的哈密顿能量函数. 这种方法可用来求解包含离子通道效应的生物神经元——Hodgkin-Huxely 模型神经元活动动作电位产生过程的能量迁移, 也可以验证常见的混沌动力学系统[20−22] 在无量纲下的哈密顿能量函数, 如 Lorenz 系统的动力学方程为

$$\begin{cases}\dot{x}=\delta y-\delta x,\\\dot{y}=\rho x-y-xz,\\\dot{z}=xy-\beta z,\end{cases} \tag{14}$$

其中 δ,ρ,β 为系统参数, 选择恰当的参数, 系统 (14) 可出现混沌态. 利用以上方法, 该系统可写成矩阵方程如下:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&\delta&0\\\rho&0&-x\\0&x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\delta&0&0\\0&-1&0\\0&0&-\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\delta y\\\rho x-xz\\xy\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\delta x\\-y\\-\beta z\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{15}$$

根据 (8) 和 (9) 式, 其哈密顿能量函数 $H(x,y,z)$ 满足

$$\frac{\partial H}{\partial x}(\delta y)+\frac{\partial H}{\partial y}(\rho x-xz)+\frac{\partial H}{\partial z}(xy)=0. \tag{16}$$

求解 (16) 式, 可得到能量函数 H 表达式为

$$H=\frac{1}{2}\Big(-\frac{\rho}{\delta}x^2+y^2+z^2\Big). \tag{17}$$

对比 (17) 式的哈密顿能量函数和 (6) 式的振荡电路的电磁场能量函数有相似性. 若将 Lorenz 混沌系统以 RLC 电路来模拟, 变量 x,y,z 可以用电容器两端输出的电压或者电感线圈中的电流来刻画, 那么选定恰当的电感和电容值, (17) 和 (6) 式将完全一致. 需要注意的是, 通过 (16) 式求出 H 的全函数, 还需要利用 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t=\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$ 来验证, 否则难以保证哈密顿能量函数 H 的惟一性, 因为满足 (16) 式的全函数可能包含了不确定的常数项, 因此需要利用 (8) 式的第二个条件 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t=\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$ 来判定和约束, 即场对应的哈密顿能量随时间分布也满足一定的条件, 如能量守恒和转化. 对于 (15) 式中梯度场和涡旋场的划分, 根据 (1) 式来看, 矢量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的旋度则可能产生不同变量乘积的非线性项或常数项, 因而包含在涡旋场项内.

对于包含物理量纲的振荡电路, 一般需要进行无量纲变换, 对于包含电感和电容的 LC 振荡电路, 利用 LC 谐振电路的周期公式 $T=2\pi(\mathrm{LC})^{1/2}$, 通常可以做如下无量纲变换:

$$\begin{cases}C\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=f_1(V,I,R),\\L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=f_2(V,I,R),\end{cases}\ \xrightarrow{\ x=V/V_0,\quad y=I/I_0,\quad \tau=t/\sqrt{LC},\ }\ \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=f_1(x,y,a,b),\\\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=f_2(x,y,c,d),\end{cases} \tag{18}$$

其中 R, L, C 为实际振荡电路的电阻、电感和电容; I_0, V_0 为电流和电压基本单位; τ 为无量纲时间; a, b, c, d 为转换后无量纲动力学系统的参数.

以上介绍了振子模型的动力学系统哈密顿能量函数的计算, 发现系统的能量依赖于变量和系统参数. 对于实际的振荡电路系统, 电容器存储电场能量, 电感线圈存储磁场能量, 其对应的电容器值, 电感线圈的电感值对应于系统的参数, 而电容器两端的电压和电感线圈的电流对应于系统的变量. 因此, 对系统参数值的改变一方面改变了系统的输出状态, 另一方面必然改变系统能量的存储和释放. 对于动力学系统同步, 动力学系统的优化控制以及耦合振子网络的同步问题, 也可以采用如上方法定义耦合系统或者网络的哈密顿能量函数, 一方面可以计算动力学系统控制器的能耗, 另一方面也可以识别系统状态变化过程中的能量迁移. 在混沌控制和反控制中, 研究人员利用分段非线性函数对低维混沌系统进行控制, 使得系统出现多涡卷的混沌吸引子或者多翼, 以便使得动力学系统产生更复杂的动力学行为. 我们利用以上方法也计算了多涡卷混沌系统的能量存储和转移问题, 发现多涡卷混沌系统的哈密顿能量随着涡卷数的增加而减小[23]. 从能量守恒的角度看, 多涡卷系统使得系统的动力学行为更复杂, 但随着涡卷数的增加, 哈密顿能量降低意味着更复杂的动力学行为消耗了更多的能量, 另一方面, 由于能量的降低, 电路系统元件存储的能量也必然降低, 从生产工艺角度看, 可以降低电子元件的要求和成本, 这也为从事混沌多涡卷系统的研究提供了重要的佐证.

3 结 论

基于亥姆霍兹定理, 对无量纲动力学系统以及非线性振荡电路的哈密顿能量函数计算进行了细致介绍, 并从力场做功角度对哈密顿能量函数的物理意义进行了解释. 该方法把电磁场理论中的亥姆霍兹定理推广应用到无量纲动力学系统的优化控制中, 通过探测系统能量的迁移可以设计恰当的控制器, 使得控制器消耗最低的能量而达到控制目标. 根据能量最小原理, 该结果可对认知神经系统和生物系统的群体行为的选择有重要参考作用. 另一方面, 对于非线性振动系统也可以按照如上方法分析振动模态转移过程中能量的迁移问题.

参考文献

[1] Wang H Q, Yu L C, Chen Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5070 (in Chinese) [王慧巧, 俞连春, 陈勇 2009 物理学报 **58** 5070]

[2] Wang C N, Chu R T, Ma J, Huang L 2015 *Complexity* **21** 370

[3] Wu H G, Bao B C, Liu Z, Xu, Q, Jiang P 2016 *Nonlinear Dyn.* **83** 893

[4] Li Q D, Zeng H Z, Li J 2015 *Nonlinear Dyn.* **79** 2295

[5] Liang Y, Yu D S, Chen H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 158501 (in Chinese) [梁燕, 于东升, 陈昊 2013 物理学报 **62** 158501]

[6] Li Z J, Zeng Y C, Tang Z P 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 098510 (in Chinese) [李志军, 曾以成, 谭志平 2014 物理学报 **63** 098501]

[7] Neumann E, Pikovsky A 2003 *Eur. Phys. J. B* **34** 293

[8] Ren G D, Tang J, Ma J, Xu Y 2015 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **29** 170

[9] Wu X Y, Ma J, Yuan L H, Liu Y 2014 *Nonlinear Dyn.* **75** 113

[10] Babacan Y, Kaçar F, Gürkan K 2016 *Neurocomputing* **203** 86

[11] Li J J, Tang J, Ma J, Du M M, Wang R, Wu Y 2016 *Sci. Rep.* **6** 32343

[12] Lv M, Ma J 2016 *Neurocomputing* **205** 375

[13] Ma J, Qin H X, Song X L, Chu R T 2015 *Int. J. Mod. Phys. B* **29** 1450239

[14] Song X L, Wang C N, Ma J, Tang J 2015 *Sci. China: Technol. Sci.* **58** 1007

[15] Hindmarsh J L, Rose R M 1982 *Nature* **296** 162

[16] Song X L, Jin W Y, Ma J 2015 *Chin. Phys. B* **24** 128710

[17] Ma J, Tang J 2015 *Sci. China: Technol. Sci.* **58** 2038

[18] Lv M, Ma J 2016 *Nonlinear Dyn.* **85** 1479

[19] Kobe D H 1986 *Am. J. Phys.* **54** 552

[20] Sarasola C, Torrealdea F J, d'Anjou A, Moujahid A, Graña M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 011606

[21] Pinto R D, Varona P, Volkovskii A R, Szücs A, Abarbanel H D I, Rabinovich M I 2000 *Phys. Rev. E* **62** 2644

[22] Torrealdea F J, d'Anjou A, Graña M, Sarasola C 2006 *Phys. Rev. E* **74** 011905

[23] Li F, Yao C G 2016 *Nonlinear Dyn.* **84** 2305

Calculation of Hamilton energy function of dynamical system by using Helmholtz theorem*

Wang Chun-Ni Wang Ya Ma Jun†

(Department of Physics, School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

(Received 11 June 2016; revised manuscript received 24 August 2016)

Abstract

The Helmholtz theorem confirms that any vector field can be decomposed into gradient and rotational field. The supply and transmission of energy occur during the propagation of electromagnetic wave accompanied by the variation of electromagnetic field, thus the dynamical oscillators and neurons can absorb and release energy in the presence of complex electromagnetic condition. Indeed, the energy in nonlinear circuit is often time-varying when the capacitor is charged or discharged, and the occurrence of electromagnetic induction is available. Those nonlinear oscillating circuits can be mapped into dynamical systems by using scale transformation. Based on mean field theory, the energy exchange and transmission between electronic field and magnetic field can be estimated by appropriate nonlinear dynamical equations for oscillating circuits. In this paper, we investigate the calculation of Hamilton energy for a class of dimensionless dynamical systems based on Helmholtz's theorem. Furthermore, the scale transformation can be used to develop dynamical equations for the realistic nonlinear oscillating circuit, so the Hamilton energy function could be obtained effectively. These results can be greatly useful for self-adaptively controlling dynamical systems.

Keywords: Helmholtz theorem, energy function, oscillating system, chaotic system

PACS: 05.45.–a **DOI:** 10.7498/aps.65.240501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11365014, 11372122).

† Corresponding author. E-mail: hyperchaos@163.com