Breit夸克势的不同次正规化与η_c-J/ψ等的质量劈裂

吉日木图　敖登　包特木尔巴根

Different time regularization of the Breit quark potential and the mass splittings of η_c-J/ψ and other mesons

Jirimutu　Aodeng　Bao tmurbagan

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 041201 (2016)　DOI: 10.7498/aps.65.041201

在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.041201

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I4

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 65, No. 4 (2016) 041201

Breit夸克势的不同次正规化与η_c-J/ψ等的质量劈裂*

吉日木图[1)†] 敖登[1)] 包特木尔巴根[2)]

1) (内蒙古医科大学计算机信息学院, 呼和浩特 010110)

2) (内蒙古民族大学物理与电子信息学院, 通辽 028043)

(2015 年 8 月 18 日收到; 2015 年 11 月 23 日收到修改稿)

用夸克势模型研究结构相同而自旋和轨道量子数不同的介子之间质量劈裂是检验势模型有效性的重要手段之一. 在以往的用各种夸克势模型计算质量劈裂工作中, 当轻介子和重介子一起计算时, π-ρ 很容易劈裂, 而 η_c-J/ψ 等的劈裂都很难达到实验值. 这里首先用正规化形状因子 $\mu^2/(\boldsymbol{q}^2+\mu^2)$, 对完整的动量空间中的 Breit 夸克势的第三项实施二次正规化, 除了第一项库仑势和第七项常数项势, 对其余的项实施一次正规化, 然后用来计算质量劈裂. 研究计算发现, 只有当屏蔽质量 μ 取为关于折合质量 $\mu_{\rm r}=m_im_j/(m_i+m_j)$ 的三阶多项式时, 轻介子 π-ρ 和重介子 η_c-J/ψ, η_b-Υ(1s), 还有 χ_{c0}-χ_{c1}-χ_{c2} 等的劈裂精确达到实验值, 同时其他介子质量也都比以往得到较大的改善. 因此, 本文给出了一个有效的夸克势模型.

关键词: 非相对论夸克势模型, 介子束缚态, 正规化, 质量劈裂

PACS: 12.39.Jh, 12.39.–x, 14.40.–n, 02.90.+p **DOI:** 10.7498/aps.65.041201

1 引 言

在诸多描述强子内夸克运动的理论中, 非相对论性夸克势模型是一种简单而又非常有效的唯象模型. 这种夸克势模型认为强子中夸克的运动是非相对论的, 它可以用非相对论薛定谔方程很好地描述. 尽管这种假定对轻夸克来说未尽合理, 但非相对论性的夸克势模型在对强子束缚态、精细结构和散射研究方面都取得了较大的成功, 其理论计算结果与实验数据符合得比较好[1−11]. 尤其强子束缚态的计算中, 用夸克势模型更优越于其他方法[12]. 这些成功促使人们对非相对论性的夸克势模型进行更为广泛、深入的研究, 使之变得更完善精确[2,13−15].

完整的准确到光速二阶的单胶子交换势是 Fermi-Breit 势 (简称 Breit 势)[7−10,16], 又称散射道势或 t-道势. 以前, 人们用 Breit 势研究强子束缚态和散射问题时, 为了简化计算, 总是通过先删去后简单改变 Breit 势中的一些项的方式对散射道势进行改进. 特别是在这些改进中, 都删去了 Breit 势中与动量有关的轨道-轨道耦合的第三项[2−6,11,13]. 对势函数进行不恰当的删改不但破坏了其应有的完整性和厄米性, 而且还会导致原来非定域 (势函数是两变量坐标和动量的函数) 的势函数被定域化. 而在微观的强相互作用中, 厄米性和非定域性是一个不可忽视的重要特征. 因而,研究完整的包含有非定域项的 Breit 夸克势模型, 对于人们更深入地了解和更加完善夸克势模型有重要的意义[14,15], 也是进一步研究强子散射等相关理论和实验现象的基础.

众所周知, Breit 势中包含 r^{-3} 的奇异项[15,16], 直接用来计算介子束缚态时解出的介子质量不但精度不高, 而且对波函数所含参量的依赖性较大,

* 内蒙古自然科学基金 (批准号: 2011MS0116) 和内蒙古高校科学研究项目 (批准号: NJZY11116) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jrmt2003@aliyun.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

当这些参量(如π介子宽度参量β_π或基函数维数N)略有变动时, 计算结果波动较大, 这就是势函数不稳定所致[15]. 为了得到比较稳定的介子质量解, 首先要消除Breit势的奇异性. 以前只有少数文献[2,11,13]在坐标空间中通过简单的删改Breit势中的一些项来消除奇异. 鉴于上述, 本文用动量空间中的正规化形状因子$\mu^2/(\boldsymbol{q}^2+\mu^2)$, 对完整的动量空间中的Breit势进行不同次正规化处理. 这样得到的势函数在坐标空间中不再含r^{-3}的奇异项. 计算结果表明, 用本文的不同次正规化方案可以消除Breit势的奇异性, 得到比以往更具稳定和高精度的介子质量谱, 从而给出一个有效的夸克势模型.

2 Breit势的正规化

我们对Breit势的正规化从动量空间开始. Breit势在动量空间中的形式是[7–10,15]

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) =\ & V_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})+V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})+V_3(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\\&+V_4(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})+V_5(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})+V_6(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\\&+V_7(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}),\end{aligned}\tag{1}$$

各项的具体表达式如下:

$$\begin{aligned}V_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= C_{ij}^{\rm s}\frac{4\pi\alpha_{\rm s}}{\boldsymbol{q}^2},\\
V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= -C_{ij}^{\rm s}(4\pi\alpha_{\rm s})\frac{(m_i^2+m_j^2)}{8m_i^2m_j^2},\\
V_3(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= C_{ij}^{\rm s}\frac{4\pi\alpha_{\rm s}}{m_im_j}\Big[\frac{\boldsymbol{p}^2}{\boldsymbol{q}^2}-\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2}{\boldsymbol{q}^4}\Big],\\
V_4(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= -C_{ij}^{\rm s}\frac{4\pi\alpha_{\rm s}}{4m_im_j}\Big(\frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j\Big),\\
V_5(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= C_{ij}^{\rm s}\frac{4\pi\alpha_{\rm s}}{4m_im_j}\Big[\frac{{\rm i}(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{q}^2}\Big],\\
V_6(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= C_{ij}^{\rm s}\frac{4\pi\alpha_{\rm s}}{4m_im_j}\Big[\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}_i)(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)}{\boldsymbol{q}^2}\\&\quad-\frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)\Big],\\
V_7(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= C_{ij}^{\rm s}(2\pi)^3(-V_0)\delta(\boldsymbol{q}),\end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}=(2+m_j/m_i)\boldsymbol{\sigma}_i+(2+m_i/m_j)\boldsymbol{\sigma}_j$; $C_{ij}^{\rm s}$是散射道色矩阵[2]; $\alpha_{\rm s}$是QCD 耦合常数; m_i和m_j是夸克i和夸克j的组分质量; $\boldsymbol{\sigma}_i$是夸克i的Pauli矩阵; 最后一项$V_7(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$是常数项势, 用以求解薛定谔方程时调整介子质量而增加的项[2,15]; $\boldsymbol{p}$ 和$\boldsymbol{q}$的意义与文献[15]相同.

为了兼顾计算精度和稳定度, 并结合文献[15]的方法, 除了势函数(1)式的第一项库仑势$V_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$和第七项常数项势$V_7(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$外, 对其余的项进行不同次地逐项正规化, 把$V_i$进行一次和二次正规化后分别记作$V_i'$, V_i'', 则有正规化一般公式如下:

$$V_i'(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = V_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\frac{\mu^2}{\boldsymbol{q}^2+\mu^2}\quad(i=2,4,5,6),\tag{2}$$

$$V_i''(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = V_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\Big(\frac{\mu^2}{\boldsymbol{q}^2+\mu^2}\Big)^2\quad(i=3),\tag{3}$$

其中, $\mu^2/(\boldsymbol{q}^2+\mu^2)$是正规化形状因子[15]; μ 是可调参量, 称屏蔽质量. μ应该是折合质量$\mu_{\rm r}=m_im_j/(m_i+m_j)$的函数, 这在结论中详细讨论.

然后我们用傅里叶变换公式

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int{\rm d}^3q\ {\rm e}^{{\rm i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}V(\boldsymbol{q}),\tag{4}$$

把势函数(1)的第一项$V_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$和第七项$V_7(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$以及(2), (3)式变换到坐标空间中去, 就得到坐标空间中新的势函数的各项如下:

$$\begin{aligned}V_1'(\boldsymbol{r}) &= V_1(\boldsymbol{r}) = C_{ij}^{\rm s}\alpha_{\rm s}\frac{1}{r},\\
V_7'(\boldsymbol{r}) &= V_7(\boldsymbol{r}) = C_{ij}^{\rm s}(-V_0),\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}V_2'(\boldsymbol{r}) =\ & -C_{ij}^{\rm s}(4\pi\alpha_{\rm s})\frac{(m_i^2+m_j^2)}{8m_i^2m_j^2}\\&\times\Big(\frac{\mu^2}{4\pi}\frac{{\rm e}^{-\mu r}}{r}\Big),\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}V_3''(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) =\ & 2V_3'(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})-(1-{\rm e}^{-\mu r})V_3(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\\&-\Big(\frac{C_{ij}^{\rm s}\alpha_{\rm s}}{2m_im_j}\mu\Big)r\,{\rm e}^{-\mu r}\\&\times\Big[\frac{\boldsymbol{p}^2}{r}-\frac{\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}}{r^3}\Big],\end{aligned}\tag{7}$$

(7)式中的$V_3(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})$, $V_3'(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})$分别是(1)式的第三项$V_3(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$和第三项$V_3(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$经过一次正规化后在坐标空间中的形式,

$$V_3(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) = \frac{C_{ij}^{\rm s}\alpha_{\rm s}}{2m_im_j}\Big[\frac{\boldsymbol{p}^2}{r}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}}{r^3}\Big],\tag{8}$$

$$\begin{aligned}V_3'(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) =\ & V_3(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})+\frac{C_{ij}^{\rm s}\alpha_{\rm s}}{m_im_j}\Big\{-{\rm e}^{-\mu r}\\&\times\Big[\frac{\boldsymbol{p}^2}{r}-\frac{\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}}{r^3}\Big]\\&+\mu^{-2}r^{-2}\Big[\frac{\boldsymbol{p}^2}{r}-3\frac{\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}}{r^3}\Big]\\&-\mu^{-2}(\mu+r^{-1})\frac{{\rm e}^{-\mu r}}{r}\\&\times\Big[\frac{\boldsymbol{p}^2}{r}-3\frac{\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}}{r^3}\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{9}$$

$$V_4'(\boldsymbol{r}) = -C_{ij}^{\rm s}\frac{2\pi\alpha_{\rm s}}{3m_im_j}(\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)\Big(\frac{\mu^2}{4\pi}\frac{{\rm e}^{-\mu r}}{r}\Big),\tag{10}$$

$$V'_5(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) = -\frac{C^{\mathrm{s}}_{ij}\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_i m_j r^3}\left[1-(1+\mu r)\,\mathrm{e}^{-\mu r}\right] \times (\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \tag{11}$$

$$V'_6(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) = -\frac{3C^{\mathrm{s}}_{ij}\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_i m_j r^3}\left[1-\left(1+\mu r + \frac{1}{3}\mu^2 r^2\right)\mathrm{e}^{-\mu r}\right] S^{r}_{ij}, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 轨道角动量算符, $S^{r}_{ij}=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}_i)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)/r^2-(\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)/3$ 是张量力算符.

我们把 (5), (6), (7), (10), (11), (12) 式进行相加, 就得到一个重新组合的有效的、稳定的夸克势模型在坐标空间中的形式:

$$V' = V'_1 + V'_2 + V''_3 + V'_4 + V'_5 + V'_6 + V'_7. \tag{13}$$

禁闭势采用线性禁闭势 [2,15], 并且不正规化:

$$V'_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r}) = V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r}) = -C^{\mathrm{s}}_{ij}\left(\frac{3}{4}b\right)r. \tag{14}$$

把 (13) 和 (14) 式进行相加就得到总势函数:

$$U(\boldsymbol{r}) = V'(\boldsymbol{r}) + V'_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r}). \tag{15}$$

3 束缚态薛定谔本征方程和介子波函数

对于一个介子的束缚态薛定谔本征方程, 在坐标空间中的形式如下 [2]:

$$\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu_{\mathrm{r}}}\varPhi(\boldsymbol{r}) + U(\boldsymbol{r})\varPhi(\boldsymbol{r}) = E\varPhi(\boldsymbol{r}), \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{p}=(m_j\boldsymbol{p}_i-m_i\boldsymbol{p}_j)/(m_i+m_j)$ 和 $\mu_{\mathrm{r}}=m_i m_j/(m_i+m_j)$ 是相对动量和折合质量, $\varPhi(\boldsymbol{r})$ 是介子波函数. 对于介子, 有质量公式:

$$M = m_i + m_j + E, \tag{17}$$

用基函数 $\phi_{nl}(\boldsymbol{r})$ 来展开 $\varPhi(\boldsymbol{r})$, 即

$$\varPhi(\boldsymbol{r}) = \sum_n a_{nl}\phi_{nl}(\boldsymbol{r}), \tag{18}$$

其中 $\phi_{nl}(\boldsymbol{r})$ 已含有空间、自旋、色波函数. 我们通过求解薛定谔方程 (16), 确定介子质量 M, 那么必须先给出基函数 $\phi_{nl}(\boldsymbol{r})$ 在坐标空间中的解析表达式. 它应该满足介子角动量平方的本征态这一要求.

在不同的文献上所采用的形式不同, 但一般都取谐振子波函数或稍加修改而得到. 在这里我们采用文献 [2] 所采取的形式, 在动量空间中给出:

$$\phi_{nl}(\boldsymbol{p}) = N_{nl}(2p)^l\sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)!!}}\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\boldsymbol{p}}) \times \exp\left[-\frac{(2\boldsymbol{p})^2}{8n\beta^2}\right]\chi_{sm_s}c(i,j). \tag{19}$$

本文拟讨论的介子总角动量为 $J=0$ 和 $J=1$, 所以 (19) 式中轨道角动量量子数取值为: $l=0$, 1, 2. 脚标 $n=1,2,3,\cdots,N$, N 是基函数维数, 在本文的计算中取 $N=6$. χ_{sm_s}, $c(i,j)$ 是介子自旋、色波函数. N_{nl} 是归一化常数, 由归一化条件

$$\int \mathrm{d}^3p|\phi_{nl}(\boldsymbol{p})|^2 = 1$$

得到

$$N_{nl} = \left(\frac{1}{\pi n\beta^2}\right)^{3/4}\frac{1}{(2n\beta^2)^{l/2}}. \tag{20}$$

求解坐标空间中的薛定谔方程 (16) 时, 需要坐标空间中的基函数 $\phi_{nl}(\boldsymbol{r})$. 因此用傅里叶变换 (4) 式, 把 (19) 式变换到坐标空间中去, 得到

$$\begin{aligned}\phi_{nl}(\boldsymbol{r}) &= R_{nl}(r)\mathrm{Y}_{lm_l}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{sm_s}c(i,j)\\ &= D_{nl}\,r^l\exp\left(-\frac{n\beta^2}{2}r^2\right)\\ &\quad\times\mathrm{Y}_{lm_l}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{sm_s}c(i,j),\end{aligned} \tag{21}$$

其中系数

$$D_{nl} = \frac{(\sqrt{2}\mathrm{i})^l}{4\pi}\sqrt{\frac{(2/\sqrt{\pi})^3}{(2l+1)!!}}(n\beta^2)^{\frac{1}{2}(l+\frac{3}{2})}. \tag{22}$$

把 (18) 式代入到薛定谔方程 (16) 中, 然后左乘 $(2\pi)^3\phi^{\dagger}_{ml'}(\boldsymbol{r})$ 之后, 对全空间积分:

$$\begin{aligned}&\sum_n a_{nl}\left[(2\pi)^3\int \mathrm{d}^3x\phi^*_{ml'}(\boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu_{\mathrm{r}}}\phi_{nl}(\boldsymbol{r}) + (2\pi)^3\int \mathrm{d}^3x\phi^*_{ml'}(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})\phi_{nl}(\boldsymbol{r})\right]\\ &= E\sum_n a_{nl}(2\pi)^3\int \mathrm{d}^3x\phi^*_{ml'}(\boldsymbol{r})\phi_{nl}(\boldsymbol{r}).\end{aligned} \tag{23}$$

在 (23) 式中定义:

$$\begin{aligned}T_{mn} &= \langle ml'|\hat{T}|nl\rangle = \langle ml'|\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu_{\mathrm{r}}}|nl\rangle\\ &= (2\pi)^3\int \mathrm{d}^3x\phi^*_{ml'}(\boldsymbol{r})\hat{T}\phi_{nl}(\boldsymbol{r}),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}B_{mn} &= \langle ml'|nl\rangle\\ &= (2\pi)^3\int \mathrm{d}^3x\phi^*_{ml'}(\boldsymbol{r})\phi_{nl}(\boldsymbol{r}),\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}U_{mn} &= \langle ml'|U|nl\rangle\\ &= (2\pi)^3\int \mathrm{d}^3x\phi^*_{ml'}(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})\phi_{nl}(\boldsymbol{r}).\end{aligned} \tag{26}$$

当势函数中有自旋和轨道耦合项时, 计算矩阵元必须考虑耦合系数问题 (C-G 系数). 此时有普遍

公式:

$$U_{mn} = \sum_{m_l m_s}\sum_{m_l' m_s'}\langle l\, m_l\, s\, m_s|Jm_J\rangle\langle l'\, m_l'\, s'\, m_s'|Jm_J'\rangle \times(2\pi)^3\int \mathrm{d}^3x\,\phi^\dagger_{ml'}(\boldsymbol{r})\,\chi^\dagger_{sm_s'}\,c^\dagger(ij) \times U(\boldsymbol{r})\phi_{nl}(\boldsymbol{r})\,\chi_{sm_s}\,c(ij). \quad (27)$$

当势函数中无自旋和轨道耦合项时, (27) 式简化为 (26) 式, 后面主要计算 (26) 和 (27) 式两个矩阵元.

把 (24), (25), (26) 式一起代入到 (23) 式中, 并当 $l' = l$ 时薛定谔方程 (23) 化为

$$\sum_n a_{nl}\Big[T_{mn} + U_{mn}\Big] = E\sum_n a_{nl}B_{mn}, \quad (28)$$

把它写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{Ha} = E\boldsymbol{Ba}, \quad (29)$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是由展开系数 $a_{nl}(a_{nl} = a_n)$ 构成的 6×1 的列矩阵, 称展开系数矩阵. 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的阶数为 $N = 6$.

$$\boldsymbol{a} = \big(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\big)^\dagger. \quad (30)$$

4 正规化后的矩阵元

在计算由 (26) 和 (27) 式给出的矩阵元时我们用到如下积分:

$$w_n = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x x^n\,\mathrm{e}^{(-\nu x^2 - \mu x)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \quad (31)$$

当 $n = 0$ 时 (31) 式化简为

$$w_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mu^2}{4\nu}}\Big[1 - \mathrm{erf}\Big(\frac{\mu}{2\sqrt{\nu}}\Big)\Big], \quad (32)$$

其中 $\mathrm{erf}(x)$ 是误差函数. 根据势函数 (13) 式, (32) 式中的 ν 取为 $\nu = \beta^2(m+n)/2$, μ 应该是屏蔽质量, 当 $n > 0$ 时, 经过计算 w_n 可以用 w_0 表达, 这里不一一列出, 直接用文献 [15] 中的结果.

因为我们拟计算的介子处于 l=0,1 状态, 所以下面只给出 $l = 0,\ 1$, 并且 $l' = l$ 时的矩阵元, 其中出现的参量 A_l 有如下定义:

$$A_l = \frac{2^{(l+2)}}{(2l+1)!!\sqrt{\pi}}\beta^{(2l+3)}(mn)^{\frac{1}{4}(2l+3)}. \quad (33)$$

势函数 (13) 式的各项矩阵元经过计算得到.

$$(V_1')_{mn} = (V_1)_{mn} = C_f\frac{4\pi\alpha_{\mathrm{s}}}{(2\pi)^{3/2}}\beta\frac{2^l l!}{(2l+1)!!}\sqrt{m+n}B_{mn}; \quad (34)$$

$$(V_2')_{mn} = -C_f\alpha_{\mathrm{s}}\frac{(m_i^2+m_j^2)}{8m_i^2m_j^2}\mu^2A_l\big[(1-l)w_1 + lw_3\big]; \quad (35)$$

第三项 V_3'' 是轨道与轨道耦合项,

$$(V_3'')_{mn} = 2(V_3')_{mn} - (V_3)_{mn} - C_f\frac{\alpha_{\mathrm{s}}}{2m_im_j}A_l \times\Big\{(2n^2\beta^4)[(1-l)w_3 + lw_5] -(4n\beta^2)[(1-l)w_1 + 2lw_3]\Big\} +\Big(-C_f\frac{\alpha_{\mathrm{s}}}{m_im_j}\frac{1}{2}\mu\Big) \times(2n\beta^2)A_l[(1-l)w_2 + lw_4]; \quad (36)$$

第四项 V_4' 是自旋与自旋耦合项,

$$(V_4')_{mn} = -C_f\frac{\alpha_{\mathrm{s}}}{6m_im_j}2[S(S+1) - 3/2] \times\mu^2A_l[(1-l)w_1 + lw_3]; \quad (37)$$

第五项 V_5' 是自旋与轨道耦合项,

$$(V_5')_{mn} = C_f\frac{\sqrt{6}\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_im_j}\Big(4+\frac{m_i}{m_j}+\frac{m_j}{m_i}\Big)(\hat{S})^2\hat{l}\sqrt{l(l+1)}(-1)^l \times\Big\{(2\pi)^3\int\mathrm{d}^3x\,\phi^*_{ml}(\boldsymbol{r})r^{-3}\phi_{nl}(\boldsymbol{r}) - A_l\Big[w_1 + \mu w_2\Big]\Big\} \times(-1)^{1+J}\begin{Bmatrix} S & S & 1\\ l & l & J\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} S & S & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{Bmatrix}; \quad (38)$$

第六项 V_6' 是张量力项,

$$(V_6')_{mn} = C_f\frac{3\alpha_{\mathrm{s}}}{m_im_j}\sqrt{\frac{5}{6}}\delta_{S,1}(\hat{l})^2 \times(-1)^J\begin{pmatrix} l & l & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} S & l & J\\ l & S & 2\end{Bmatrix} \times\Big[(2\pi)^3\int\mathrm{d}^3x\,\phi^*_{ml}(\boldsymbol{r})r^{-3}\phi_{nl}(\boldsymbol{r}) -A_l\Big(w_1 + \mu w_2 + \frac{1}{3}\mu^2w_3\Big)\Big]; \quad (39)$$

第七项 V_7' 是常数项势,

$$(V_7)_{mn} = C_f(-V_0)B_{mn}. \quad (40)$$

禁闭势由方程 (14) 给出:

$$(V_{\mathrm{c}})_{mn} = C_f(-\frac{3}{4})\frac{b}{\beta}\frac{8\pi}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2^l(l+1)!}{(2l+1)!!}\frac{B_{mn}}{\sqrt{m+n}}. \quad (41)$$

(36) 式中出现的 $(V_3)_{mn}$,$(V_3')_{mn}$ 分别是 (8) 和 (9) 式的矩阵元, 由下式给出:

$$(V_3)_{mn}$$

$$
= C_f \frac{4\pi\alpha_s}{m_i m_j}\beta^3 \frac{2mn}{\sqrt{m+n}}\frac{B_{mn}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2^l(l+1)!}{(2l+1)!!}, \tag{42}
$$

$$
\begin{aligned}
&(V_3')_{mn} \\
&= (V_3)_{mn} + \Big(-C_f\frac{\alpha_s}{4m_i m_j}4\mu^{-2}\Big)A_l \\
&\quad\times\Big[-(n^2\beta^4)\frac{l!}{\mu_1^{(l+1)}}+(2n\beta^2)l\frac{l!}{\mu_1^l}\Big] \\
&\quad+\Big(-C_f\frac{\alpha_s}{m_i m_j}\Big)(2n\beta^2)A_l\Big[(1-l)w_1+lw_3\Big] \\
&\quad+\Big(C_f\frac{\alpha_s}{2m_i m_j}2\mu^{-1}\Big)\Big\{-(2n^2\beta^4)A_l\Big[(1-l)w_2 \\
&\quad+lw_4\Big]+(4n\beta^2)A_l l w_2\Big\}+\Big(C_f\frac{\alpha_s}{4m_i m_j}4\mu^{-2}\Big) \\
&\quad\times\Big\{-2n^2\beta^4 A_l\Big[(1-l)w_1+lw_3\Big] \\
&\quad+(4n\beta^2)A_l l w_1\Big\}.
\end{aligned}\tag{43}
$$

(38) 和 (39) 式中出现的积分由下式给出:

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^3\int \mathrm{d}^3x\,\phi_{ml}^*(\boldsymbol{r})r^{-3}\phi_{nl}(\boldsymbol{r}) \\
&= A_l\frac{1}{2}(l-1)!\,\nu^{-l}\quad(l>0).
\end{aligned}\tag{44}
$$

至此把势函数 (13) 的每一项矩阵元一一计算完毕.

5 结 论

最后求解一个介子束缚态薛定谔方程 (29) 式 $\boldsymbol{Ha}=E\boldsymbol{Ba}$, 通过运算程序调节其中的可调参量值来确定尽可能逼近实验值的介子质量数值解, 从而检验势函数 (13) 式的有效性. 此时调节出的夸克质量等参量值应该是更精确的值.

通过直接计算验证, 对于势函数 (1) 和 (13) 式, 耦合常数 α_s 不再是可调参量, 而是适合采用文献 [2, 15] 所用耦合常数 $\alpha_s(Q^2) = 12\pi/[(33-2n_f)\ln(A+Q^2/B^2)]$, 其中 $A = 10$, $B = 0.31$ GeV. 波函数中的宽度系数 β 的取值, 仍采用文献 [2] 中的 β 值.

直接用 Breit 势 (1) 式, 此时可调节的自由参量有弦张力系数 b, 常数项势 V_0 和五种夸克质量 $m_u (m_u = m_d)$, m_s, m_c, m_b, 此时只有 π-ρ 劈裂, 而 η_c-J/ψ,η_b-ϒ(1s), 还有 χ_{c0}-χ_{c1}-χ_{c2} 等永远无法劈裂.

直接用正规化后的 Breit 势 (13) 式, 此时除了势函数改变, 还多了一个可调参量 μ, 在 μ 为常数的情况下, 经过计算 π-ρ 劈裂时所需的 μ 值为 0.938 GeV 左右, 此时 η_c-J/ψ,η_b-ϒ(1s), 还有 χ_{c0}-χ_{c1}-χ_{c2} 等不劈裂. 而 η_c-J/ψ 等精确劈裂时所需的 μ 值必须提高到 4.943 GeV 左右, 如此之大, 是前者的五倍多, 远超出 π-ρ 劈裂时所需 μ 的极限值, 此时 π-ρ 等多个轻介子彻底发散. 由此得到对各介子不能使用统一的常数 μ, 轻介子 π-ρ 和重介子 η_c-J/ψ 等所需要的 μ 值不同, μ 应该是变量.

由上面的分析结果可知, π-ρ 的劈裂是很容易实现, 主要是 η_c-J/ψ 等的劈裂难度大. 要实现 η_c-J/ψ 等的劈裂, 首先必须对 Breit 势实施修改或正规化.

对于夸克势模型 (尤其是 Breit 势), 当轻介子、轻重介子和重介子一起计算时, 因为要兼顾众多介子, 在所有的可调参量都不能任意自由调节的情况下使 η_c-J/ψ 等质量劈裂 (结构相同的介子之间质量劈裂) 是个难题. 文献 [17,18] 分别采用不同的夸克势模型和不同的方法, 计算了几个结构为 $c\bar{c}$ 和 $b\bar{b}$ 的重介子质量, 此时能够任意自由调节两夸克质量 m_c, m_b. 因为计算中无需兼顾轻介子和轻重介子问题, 因此其他参量的任意调节自由度也很大, 从而较容易实现劈裂或提高计算精度.

根据上面的 μ 应该是变量和参考文献 [15,19], 以折合质量 $\mu_r = m_i m_j/(m_i+m_j)$ 作为变量, 把 μ 展开成多项式, 用逐级近似的方法, 取到三阶多项式, 就能够实现这些介子的劈裂, 从而给出了一个有效的、稳定的夸克势函数 (13) 式, 其中参量 μ 应取如下表达式:

$$
\mu = c_0 + c_1\mu_r + c_2\mu_r^2 + c_3\mu_r^3, \tag{45}
$$

4 个展开系数 c_0, c_1, c_2, c_3 是可调参量, 在数值计算程序中进行调节.

为便于对比, 在表 1 中列举了一些计算结果, 从中很容易看到, 只有第 4 列 $M^{\rm th2}$ 的计算结果更精确, 那些重要介子之间实现精确劈裂, 这恰是本文之精髓. 其中第 1 列数据 M(exp) 是取自文献 [2] 的实验质量, 第 2 列 $M^{\rm th1}$ 和第 3 列 $\mu^{\rm th1}$ 是本文用势函数 (13) 式对各介子使用统一常数 μ 的情况下计算的介子质量和相应的 μ 值. 第 4 列 $M^{\rm th2}$ 和第 5 列 $\mu^{\rm th2}$ 是本文用势函数 (13) 式和 μ 取 (45) 式的情况下计算的介子质量和相应的 μ 值. 第 6 列 M 是文献 [15] 计算的理论质量.

表 1 本文计算结果与实验值的比较
Table 1. Results of meson masses.

Meson	$M^{\rm exp}$/GeV	$M^{\rm th1}$/GeV	$\mu^{\rm th1}$/GeV	$M^{\rm th2}$/GeV	$\mu^{\rm th2}$/GeV	M [15]/GeV
$\pi(1^1S_0)$	0.140	0.140	0.918	0.140	0.938	0.140
$K(1^1S_0)$	0.494	0.498	0.918	0.490	0.944	0.510
$K^*(1^3S_1)$	0.892	0.881	0.918	0.880	0.944	0.888
$\rho(1^3S_1)$	0.770	0.771	0.918	0.764	0.938	0.777
$\phi(1^3S_1)$	1.020	0.970	0.918	0.983	1.024	1.000
$b_1(1^1P_1)$	1.235	1.253	0.918	1.309	0.938	1.351
$a_1(1^3P_1)$	1.260	1.199	0.918	1.254	0.938	1.318
$\phi(2^3S_1)$	1.686	1.811	0.918	1.896	1.024	1.908
$D(1^1S_0)$	1.869	1.983	0.918	1.998	1.073	2.017
$D^*(1^3S_1)$	2.010	2.043	0.918	2.071	1.073	2.088
$D_s(1^1S_0)$	1.969	2.028	0.918	2.028	1.536	2.046
$D_s^*(1^3S_1)$	2.112	2.084	0.918	2.121	1.536	2.140
$D_1(1^1P_1)$	2.422	2.522	0.918	2.600	1.073	2.628
$D_2(1^3P_2)$	2.460	2.497	0.918	2.571	1.073	2.604
$\eta_c(1^1S_0)$	2.979	3.022	0.918	2.977	4.943	2.978
$J/\psi(1^3S_1)$	3.097	3.051	0.918	3.095	4.943	3.096
$h_c(1^1P_1)$	3.570	3.461	0.918	3.540	4.943	3.550
$\chi_{c0}(1^3P_0)$	3.417	3.437	0.918	3.418	4.943	3.413
$\chi_{c1}(1^3P_1)$	3.511	3.457	0.918	3.518	4.943	3.517
$\chi_{c2}(1^3P_2)$	3.556	3.475	0.918	3.569	4.943	3.548
$\psi'(2^3S_1)$	3.686	3.687	0.918	3.777	4.943	3.771
$B(1^1S_0)$	5.279	5.385	0.918	5.377	1.188	5.409
$B^*(1^3S_1)$	5.324	5.399	0.918	5.394	1.188	5.426
$B_s(1^1S_0)$	5.369	5.411	0.918	5.409	1.992	5.442
$B_s^*(1^3S_1)$	5.416	5.424	0.918	5.433	1.992	5.465
$\eta_b(1^1S_0)$	9.393	9.457	0.918	9.409	1.264	9.398
$\Upsilon(1^3S_1)$	9.460	9.462	0.918	9.418	1.264	9.426
$\chi_b(1^3P_1)$	9.899	9.811	0.918	9.810	1.264	9.811
$\Upsilon(2^3S_1)$	10.020	9.933	0.918	9.956	1.264	9.959
$\chi_b(2^3P_1)$	10.260	10.161	0.918	10.209	1.264	10.207
$\Upsilon(3^3S_1)$	10.350	10.331	0.918	10.372	1.264	10.372

注: $M^{\rm th1}$: $b=0.197$ GeV^2, $V_0=-0.597$ GeV, $m_u=0.358$ GeV, $m_s=0.541$ GeV, $m_c=1.739$ GeV, $m_b=5.061$ GeV, $\mu=0.918$ GeV. $M^{\rm th2}$: $b=0.255$ GeV^2, $V_0=-0.750$ GeV, $m_u=0.389$ GeV, $m_s=0.596$ GeV, $m_c=1.819$ GeV, $m_b=5.111$ GeV, $\mu=c_0+c_1\mu_{\rm r}+c_2\mu_{\rm r}^2+c_3\mu_{\rm r}^3$, $c_0=1.489$ GeV, $c_1=-5.510$, $c_2=14.715$ GeV^{-1}, $c_3=-4.928$ GeV^{-2}.

参考文献

[1] Lucha W, Schoberl F F, Gromes D 1991 *Phys. Rep.* **200** 127

[2] Wong C Y, Swanson E S, Barnes T 2001 *Phys. Rev. C* **65** 014903

[3] Godfrey S, Kokoski R 1991 *Phys. Rev. D* **43** 1679

[4] Godfrey S, Isgur N 1985 *Phys. Rev. D* **32** 189

[5] Godfrey S 1985 *Phys. Rev. D* **31** 2375

[6] Capstick S, Isgur N 1986 *Phys. Rev. D* **34** 2809

[7] Barnes T, Black N 1999 *Phys. Rev. C* **60** 045202

[8] Chen J X, Su J C 2001 *Phys. Rev. C* **64** 065201

[9] Wang H J, Yang H, Su J C 2003 *Phys. Rev. C* **68** 055204

[10] Zhao G Q, Jing X G, Su J C 1998 *Phys. Rev. D* **58** 117503

[11] Wong C Y, Swanson E S, Barnes T 2000 *Phys. Rev. C* **62** 045201

[12] Crater H, Vanalstine P 2004 *Phys. Rev. D* **70** 034026

[13] Wong C Y 2004 *Phys. Rev. C* **69** 055202

[14] Jirimutu, Wang H J, Zhang W N, Wong C Y 2009 *Int. J. Mod. Phys. E* **18** 729

[15] Jirimutu, Zhang W N 2009 *Eur. Phys. J. A* **42** 63

[16] Rujula A D, Georgi H, Glashow S L 1975 *Phys. Rev. D* **12** 147

[17] Ebert D, Faustov R N 2000 *Phys. Rev. D* **62** 034014

[18] Chen Y Q, Kuang Y P 1992 *Phys. Rev. D* **46** 1165

[19] Vijande J, Fernandez F, Valcarce A 2005 *J. Phys. G* **31** 481

Different time regularization of the Breit quark potential and the mass splittings of η_c-J/ψ and other mesons*

Jirimutu[1)†] Aodeng[1)] Bao tmurbagan[2)]

1) (*College of Computer and Information, Inner Mongolia Medical University, Hohehot 010110, China*)

2) (*College of Physics and Electronic Information, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao 028043, China*)

(Received 18 August 2015; revised manuscript received 23 November 2015)

Abstract

The study on the mass splittings of the mesons with the same structure but different spin- and orbit-quantum numbers is one of the important methods for checking the efficiency of potential models. In previous calculations for quark potential models, the splitting between π-ρ is easily obtained while that of the η_c-J/ψ is however too small to meet the experimental results. In this paper, the third term of the complete Breit quark potential in the momentum space is regularized twice by applying the form factor $\mu^2/(\boldsymbol{q}^2+\mu^2)$, and the other terms except the first term of the Coulombic potential and the seventh term of the constant potential are regularized once. The mass splittings are calculated by using these values. Our results indicate that the mass splittings of light mesons π-ρ, heavy mesons η_c-J/ψ, η_b-$\Upsilon(1s)$, and χ_{c0}-χ_{c1}-χ_{c2} can meet the experimental results with high accuracy only when the screen mass μ is expanded to the third-order polynomial with respect to the meson reduced mass $\mu_r = m_i m_j/(m_i+m_j)$, while the masses of other mesons are improved greatly. An efficient quark potential model is thus described in this paper.

Keywords: nonrelativistic quark potential model, meson bound states, regularization, mass splitting

PACS: 12.39.Jh, 12.39.–x, 14.40.–n, 02.90.+p **DOI:** 10.7498/aps.65.041201

* Project supported by the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. 2011MS0116) and Science and Technology Research Project of the Higher Education Institution of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZY11116).

† Corresponding author. E-mail: jrmt2003@aliyun.com