

一维相位缺陷量子行走的共振传输

王丹丹 李志坚

Resonance transmission of one-dimensional quantum walk with phase defects

Wang Dan-Dan Li Zhi-Jian

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 060301 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.060301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.060301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I6>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

Ising 耦合体系中量子傅里叶变换的优化

Time-optimized quantum QFT gate in an Ising coupling system

物理学报.2015, 64(17): 170301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.170301>

光子两自由度超并行量子计算与超纠缠态操控

Hyper-parallel photonic quantum computation and manipulation on hyperentangled states

物理学报.2015, 64(16): 160303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160303>

三维传输子量子比特的退相干参数表征

Decoherence characterization of three-dimensional transmon

物理学报.2014, 63(22): 220305 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220305>

表面离子阱的衬底效应模型研究及新型离子阱设计

Substrate effect on surface-electrode ion trap and hybrid design for ion trap

物理学报.2014, 63(6): 060303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.060303>

初态对光波导阵列中连续量子行走影响的研究

Effects of initial states on continuous-time quantum walk in the optical waveguide array

物理学报.2013, 62(9): 090301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.090301>

一维相位缺陷量子行走的共振传输*

王丹丹 李志坚†

(山西大学理论物理研究所, 太原 030006)

(2015年11月8日收到; 2015年12月27日收到修改稿)

从分立时间量子行走理论出发, 分别在包含两个格点相位缺陷和一段格点相位缺陷(方相位势)的一维格点线上研究量子行走的静态共振传输. 利用系统独特的色散关系和边界点上的能量守恒条件, 获得量子行走通过缺陷区域的透射率, 讨论了相位缺陷的强度和宽度不同时透射率随入射动量的变化行为. 在相位缺陷强度 $\pi/2$ 两侧, 透射率表现出不同的共振特性, 并给出了强缺陷强度下共振峰和缺陷宽度的关系.

关键词: 量子行走, 相位缺陷, 散射特性

PACS: 03.67.Lx, 03.65.Ge, 05.40.FB

DOI: 10.7498/aps.65.060301

1 引言

量子行走是经典随机行走的量子力学推广^[1,2], 其与经典随机行走的不同之处在于量子行走中的粒子可以处于相干叠加态, 而且粒子可以同时到达所有最近邻格点, 这就导致了量子行走具有更快的扩散速度, 因此人们基于量子行走提出了诸如Shor因子分解、Grover搜索等量子算法^[3,4], 并可进行普适的量子计算^[5]. 量子行走也是仿真许多动力学过程的有效平台, 自旋链上量子态的转移^[6]、光合作用中的能量传输等^[7]都可以用量子行走进行模拟. 实验上, 人们已经利用囚禁离子^[8]、核磁共振^[9]、光格子中的冷原子^[10]以及波导阵列等^[11,12]许多物理系统实现了单粒子的一维量子行走, 最近两粒子或高维量子行走的实验也有报道^[13,14].

与经典随机行走类似, 量子行走也有连续时间量子行走^[15]和分立时间量子行走^[16]两种形式. 虽然二者在数学形式上不同, 但它们之间存在着一定的内在关联, 物理意义却是相通的^[17]. 本文主要研究分立时间量子行走, 它在位置空间移动的方向

由内部硬币态决定, 直接通过么正算符来定义, 但其生成元可等效为狄拉克粒子的有效哈密顿量形式^[18]. 均匀空间上的量子行走人们已经做了大量研究, 但一般情况下位置空间中的格点缺陷无法避免, 因此量子行走中的退相干和无序效应受到了人们的广泛关注^[19–23]. 虽然分立时间量子行走中没有势能的概念, 但文献^[24]通过对比分立时间量子行走和连续时间量子行走在单点缺陷和两点缺陷下的相似行为, 说明了可以由分立时间量子行走硬币算符中的参数来等效连续时间量子行走中的格点势能. 退相干和无序效应除了会导致量子行走从弹道传输到扩散传输过渡外, 有时还会引起一些反直觉的结果, 如选取适当的无序噪声参数可以使得量子态转移得更好^[25,26]. 弹道扩展行为是均匀空间量子行走的本质特征, 但与其相反的局域化效应却引起人们更大的兴趣. 量子行走的局域化从起因上来讲有三种类型. 一种是由无序引起的安德森局域化^[27–31], 它源于无序的随机性, 与系统的初态无关, 分布概率随距初始位置的距离指数衰减; 第二种是拓扑局域化^[32,33], 这是当前的热点问题. 分立时间量子行走可以同时具有时间反演对称性、粒子-空穴对称性和手征对称性, 其具有与拓扑绝缘

* 国家自然科学基金(批准号: 10974124, 11274208)和山西省回国留学人员科研资助项目(批准号: 2015-012)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zjli@sxu.edu.cn

体类似的能带结构, 而且其能隙的开闭可以通过硬币算符中的参数进行调节, 这样量子行走被认为是一种简单的拓扑绝缘体理论模型. 体表对应原理预言在两种不同拓扑材料分解面上存在局域化的边缘态^[34], 而且这种局域化现象被人们用分裂步量子行走的方法进行了验证. 第三种是本征局域化^[24], 这种局域化与系统的初态选取有关, 近来人们解析地给出了单点缺陷下量子行走的本征束缚态^[35-38], 局域化的强度恰好就是系统初态在本征束缚态上的投影.

位置空间上的缺陷除了破坏量子行走的平移不变性并引起动力学局域化外, 其静态散射效应也值得研究. 相关的研究报道较少, 最近文献^[39]和^[40]分别研究了分立时间量子行走中的相位缺陷和连续时间量子行走中的格点势能缺陷对它们静态散射特性的影响, 并给出一维单点缺陷下透射率的解析表达式. 本文进一步以包含两个对称格点相位缺陷和一段连续相位缺陷的一维格点为模型, 研究分立时间量子行走的静态散射特性, 讨论量子行走的共振传输行为.

2 分立时间量子行走及其本征问题

分立时间量子行走定义在硬币空间与位置空间的直积空间中, 如果硬币空间和位置空间分别由硬币态 $|c\rangle$ ($c = 0, 1$) 和表征格点位置的态函数 $|n\rangle$, $n \in Z$ 张开, 则决定量子行走动力学演化的一步演化算符可表示为

$$U = \left(\sum_c (|c\rangle\langle c| \otimes S_c) \right) (C \otimes I), \quad (1)$$

其中 $S_c = |n + (-1)^{c+1}\rangle\langle n|$ 是量子行走依赖于硬币态 $|c\rangle$ 的条件平移算符, C 表示硬币算符, I 表示作用在位置空间的单位算符. t 时刻也就是行走 t 步后, 系统的波函数 $|\psi(t)\rangle$ 由演化算符 U 对初态连续作用 t 次得到, 即有 $|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(0)\rangle$. 若选取单参数的硬币算符

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

把方程(1)做傅里叶变换, 其在动量空间可表示为

$$U_k = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{-ik} & \sin \theta e^{-ik} \\ \sin \theta e^{ik} & -\cos \theta e^{ik} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

U_k 的本征值为 $\lambda = e^{-iE}$, 其中 E 与动量 k 满足关系

$$\sin E = \cos \theta \sin k, \quad (3)$$

相应的本征矢为

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos \theta \cos(k - E)}} \times \begin{pmatrix} e^{-ik} \sin \theta \\ e^{-iE} - \cos \theta e^{-ik} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

值得注意的是, 对于任何一个 k 都可以由方程(3) 得到两个不同的 E , 因此 λ 和 ξ_k 实际上各包含两组本征值和本征矢. 幺正算符 U 可以表示为 $U = e^{-iH}$ 的形式, 其中 H 为其生成元, 相当于系统的哈密顿量算符, 这样 E 就相当于系统的准能量, 方程(3) 即为系统的色散关系. 从方程(3) 可知, k 与 E 都以 2π 为周期, 且每个能量 E 同时对应两个动量 $k_1 = \arcsin(\sin E / \cos \theta)$ 和 $k_2 = \pi - \arcsin(\sin E / \cos \theta)$. 因此具有能量 E 的量子行走在一维均匀格点线上的波函数可表示为一般形式

$$|\psi(n)\rangle = X_1 e^{ik_1 n} \xi_{k_1} + X_2 e^{ik_2 n} \xi_{k_2}, \quad (5)$$

其中 X_1 和 X_2 为任意常数.

由色散关系得, 波速 $v_p = dE/dk = \cos \theta \cos k / \cos E$, 本文中我们选取硬币参数 $\theta = \pi/4$, 也就是

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

为Hadamard硬币算符. 图1(a) 给出了当 $k = k_1$ 时, k_1 (实线) 和 v_p (虚线) 分别随能量 E 的变化曲线; 图1(b) 给出了 $k = k_2$ 时相应的情况. 如图1所示, 当 $E \in (-\pi/4, \pi/4)$ 或 $E \in (3\pi/4, 5\pi/4)$ 时, 波矢 k 的值为实数; 而在一个 2π 周期的其他区域, k 的值为虚数, 量子行走将无法传播. 波速为正和波速为负时对应的 k 和 E 的取值范围如表1所列. k 要为实数, 相应 E 的取值范围依赖于硬币参数 θ 的取值大小.

表1 正波速和负波速对应的 k 与 E 的取值范围
Table 1. The value ranges of k and E for positive or negative wave velocity.

	①	②	③	④
v_p	$v_p > 0$	$v_p > 0$	$v_p < 0$	$v_p < 0$
E	$E \in (-\pi/4, \pi/4)$	$E \in (3\pi/4, 5\pi/4)$	$E \in (-\pi/4, \pi/4)$	$E \in (3\pi/4, 5\pi/4)$
k	$k = k_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$	$k = k_2 \in (\pi/2, 3\pi/2)$	$k = k_2 \in (\pi/2, 3\pi/2)$	$k = k_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$

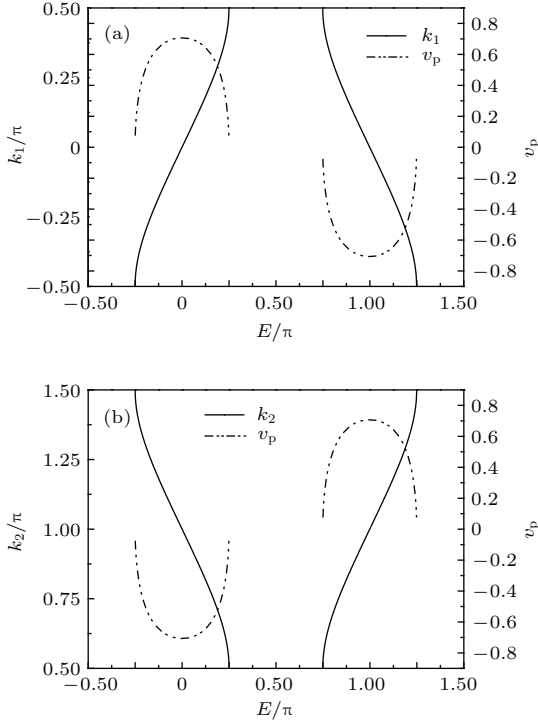


图1 动量(实线)和波速(虚线)随能量 E 的变化
(a) $k = k_1$; (b) $k = k_2$
Fig. 1. Shown are the variations of momentum (solid line) and velocity (dashed line) with the incident energy: (a) $k = k_1$; (b) $k = k_2$.

3 两个对称相位缺陷下量子行走的散射特性

把一维分立时间量子行走的标准模型进行拓展, 在无限长格点线上任选两个格点, 假定在这两点处具有相同的相位缺陷 $\omega = e^{i\phi}, \phi \in (0, 2\pi)$, 也就是说, 量子行走在每次经过这两点时都会得到一个 ϕ 相位, 为了方便计算, 我们选取两个点关于原点对称 $n = N, -N$, 量子行走的条件平移算符可改写为 $S_c^\phi = e^{i\phi(\delta_{n,N} + \delta_{n,-N})} S_c$. 相位缺陷的出现会破坏系统的平移不变性, 缺陷点会对量子行走产生散射, 改变其分布概率. 下面我们对静态散射特性进行研究, 讨论量子行走通过缺陷点的透射概率.

设 $n = N, -N$ 处的波函数分别为 $\chi_1 = (x_1 \ y_1)^T$ 和 $\chi_2 = (x_2 \ y_2)^T$, 整个系统的波函数可分为五段, 即

$$\psi(n) = \begin{cases} A e^{ik_1 n} \xi_{k_1} + B e^{ik_2 n} \xi_{k_2}, & n < -N, \\ \chi_1, & n = -N, \\ C e^{ik_1 n} \xi_{k_1} + D e^{ik_2 n} \xi_{k_2}, & -N < n < N, \\ \chi_2, & n = N, \\ G e^{ik_1 n} \xi_{k_1} + F e^{ik_2 n} \xi_{k_2}, & n > N. \end{cases} \quad (6)$$

如果我们假定粒子从缺陷点的左侧入射, 沿着正方向传播, 并选取表1中 $v_p > 0$ 的第①组为入射波的参数取值, 则第③组就是反射波的参数取值. 也就是此时 $E \in (-\pi/4, \pi/4)$, 入射波的波矢为 $k = k_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$, 则相应的反射波的波矢为 $k = k_2 = \pi - k_1 \in (\pi/2, 3\pi/2)$. 因此可令 $A = 1, F = 0$, 其他参数 B, C, D, G 和 x_1, x_2, y_1, y_2 可通过在边界点 $n = -N - 1, -N, -N + 1, N - 1, N, N + 1$ 处的边界方程求得. 给定入射粒子能量, 则粒子在每一点处的能量都守恒, 也就是有

$$\frac{\langle n|U|\psi\rangle}{\langle n|\psi\rangle} = e^{-iE}. \quad (7)$$

将波函数(5)式代入系统的边界方程(7), 得到12个线性方程, 但其中8个方程是相互独立的, 对其求解即获得系统的反射系数 $R = |B|^2$ 和透射系数 $T = |G|^2$.

当相位缺陷 $\phi = \pi$ 时, 图2给出量子行走通过两个相位缺陷格点区域的透射率随着入射动量的变化曲线. 从图中可以看出, 透射率表现出振荡特性, 在某些 k 值下, 透射率达到1, 即量子行走能够完全通过缺陷势垒. 随着两个相位缺陷格点间的距离 $2N + 1$ 增大, 完全透射所对应的波矢个数也随之增加, 共振峰的个数恰好是 $2(N - 1)$ 个. 这种现象可以类比于量子力学中的再绍尔效应, 当电子的动能处于某个特定值时, 电子与原子碰撞后的散射概

率达到极小值, 即电子可以完全隧穿. 我们将格点上出现的相位缺陷当作势垒, 量子行走隧穿势垒的过程也就相当于电子与原子的碰撞, 由于入射波与反射波的干涉效应, 就会存在多个这样的波矢使之完全透射. 当两个相位缺陷格点间的距离不变时, 图3给出 $N = 3$ 时, 不同相位缺陷强度 ϕ 下透射率随入射动量 k 的变化情况. 透射峰的共振宽度随着相位缺陷 $\omega = e^{i\phi}$, $\phi \in (0, \pi)$ 中 ϕ 的增大逐渐变窄,

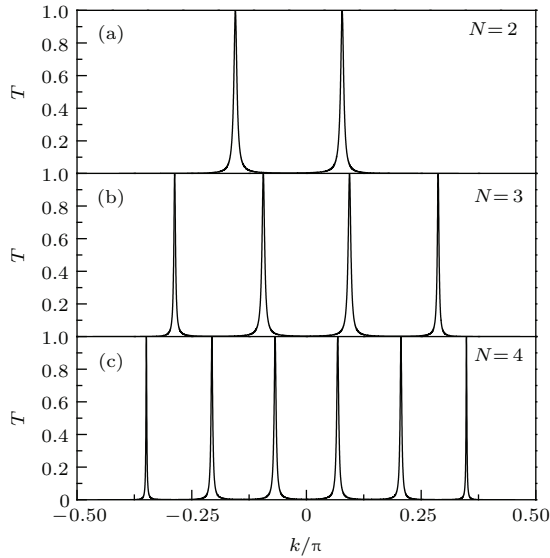


图2 $\phi = \pi$ 时波的透射率随动量的变化 (a) $N = 2$; (b) $N = 3$; (c) $N = 4$

Fig. 2. Curves of the transmission probability versus incident momentum for $\phi = \pi$: (a) $N = 2$; (b) $N = 3$; (c) $N = 4$.

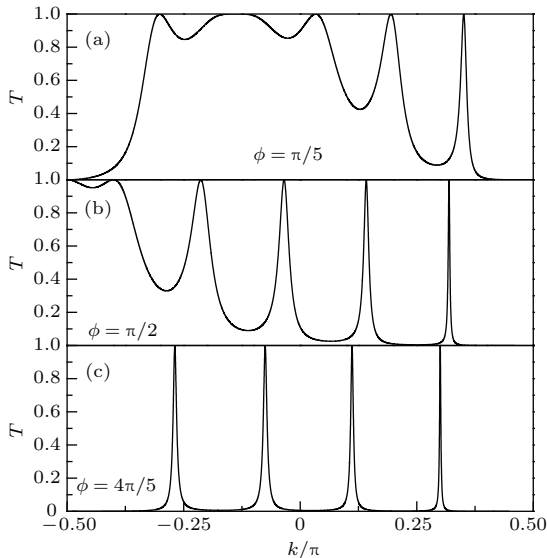


图3 $N = 3$ 时波的透射率随动量的变化 (a) $\phi = \pi/5$; (b) $\phi = \pi/2$; (c) $\phi = 4\pi/5$

Fig. 3. Curves of the transmission probability versus incident momentum for $N = 3$: (a) $\phi = \pi/5$; (b) $\phi = \pi/2$; (c) $\phi = 4\pi/5$.

且振荡幅度越来越大, 这一现象在 $k < 0$ 区间尤为明显. 特别是如图3(b)所示, 透射幅度在 $\phi = \pi/2$, $k = -\pi/2$ 处无解, 此时入射能量 E 恰好接近于 $-\phi/2$, 但稍微偏离该值, 量子行走的透射率就变为1, 与图3(a)和(c)中的情况完全不同.

4 方相位势垒下量子行走的散射特性

进一步我们考虑从第 $-N$ 格点到第 N 格点的 $2N + 1$ 个格点上都存在相同相位缺陷 $\omega = e^{i\phi}$, 建立方相位势垒模型, 即条件平移算符为 $S_c^{\phi} = \exp\left(i\phi \sum_{m=-N}^N \delta_{n,m}\right) |n + (-1)^{c+1}\rangle \langle n|$. 类似于方程(2), 在方相位势垒区域, 演化算符在动量空间可表示为 $U_\kappa = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} U_k$, 其本征值为 $\lambda' = e^{i\phi} e^{-iE'}$, 其中 κ, E' 分别表示粒子处于相位势垒区域时的准动量和准能量, 它们满足的色散关系形同于方程(3); 本征矢的形式与方程(4)相同, 与相位 ϕ 无关, 只需用 E' 代替 E , κ 代替 k 即可, 我们将其记为 ξ_κ . 粒子的能量在整个系统中保持守恒, 如果入射粒子的能量为 E , 则 E' 满足 $E' = E + \phi$, 相应的两个波矢为 $\kappa_1 = \arcsin(\sin E' / \cos \theta)$ 和 $\kappa_2 = \pi - \arcsin(\sin E' / \cos \theta)$.

一维无限长格点上存在一段连续的相位缺陷, 由(5)式可知, 整个系统的分段波函数可表示为

$$|\psi(n)\rangle = \begin{cases} a e^{i\kappa_1 n} \xi_{\kappa_1} + b e^{i\kappa_2 n} \xi_{\kappa_2}, & n < -N, \\ c e^{i\kappa_1 n} \xi_{\kappa_1} + d e^{i\kappa_2 n} \xi_{\kappa_2}, & -N \leq n \leq N, \\ g e^{i\kappa_1 n} \xi_{\kappa_1} + f e^{i\kappa_2 n} \xi_{\kappa_2}, & n > N. \end{cases} \quad (8)$$

如果我们仍选取表1中 $v_p > 0$ 的第①组为入射波参数取值, 也就是 $k \in (-\pi/2, \pi/2)$, 则 $a = 1, f = 0$. 在格点 $n = -N - 1, -N, N, N + 1$ 处量子行走的总能量相同, 波函数满足方程(7), 可获得4个相互独立的方程, 求解得到反射系数 $R = |b|^2$ 和透射系数 $T = |g|^2$.

图4给出了 $N = 3$ 时透射系数随入射动量 k 和缺陷强度 ϕ 变化的密度图. 图中透射率在 $k \in (-\pi/2, \pi/2)$ 和 $\phi \in (0, 2\pi)$ 区域关于点 $(k = 0, \phi = \pi)$ 反演对称, 深色表示透射率大, 浅色表示透射率小. 中间两段浅色带状区域, 透射率几乎为零, 因为此时在方相位势垒区域量子行走是隧穿通过的, 而在其他区域是振荡传播的. 图5给出

了波矢 κ_1 是实数还是复数所对应的 k, ϕ 取值区域示意图, 图中深色区域 κ_1 为复数, 浅色区域 κ_1 为实数. 两图相比可以明显看出, 当 κ 为复数时, 量子行走几乎全部被反射, 此时 $-N$ 到 N 这段方相位缺陷可视为一段势垒; 当 κ 为实数时, 则该段方相位缺陷被视为一段势阱, 入射波与反射波相互干涉, 量子行走的透射率出现振荡行为.

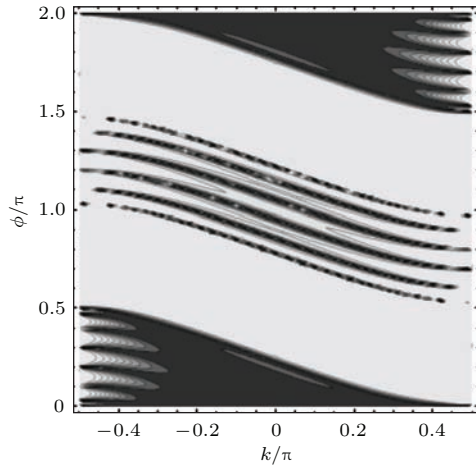


图4 透射率 T 随入射动量 k 和缺陷相位 ϕ 变化的轮廓图, 深色区域透射率大, 浅色区域透射率小
Fig. 4. Contour plot of the transmission probability versus incident momentum k and defect phase ϕ .

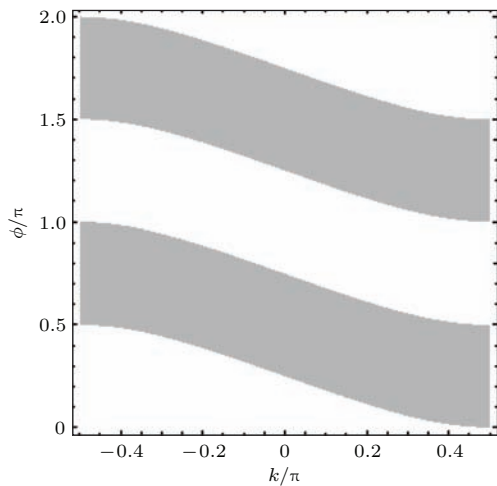


图5 相位缺陷区域动量 κ 随入射动量 k 和缺陷相位 ϕ 变化的示意图, 深色区域其为复数, 浅色区域为实数
Fig. 5. Schematic diagram of κ versus incident momentum k and defect phase ϕ .

为了更清楚地分析量子行走通过方相位势垒的透射率的振荡特性, 我们选取相位缺陷 $\phi = \pi$. 图6给出透射率在不同势垒宽度下随入射动量 k 的变化曲线. 当 $\phi = \pi$ 时, 对于 $k \in (-\pi/2, \pi/2)$ 所有取值, κ_1 总为实数, 方相位缺陷区域相当于势阱, 量子行走传播通过该区域时, 在某些 k 值处发

生共振传输, 透射率达到1. 与图2相比, 此时共振峰的个数也随着相位缺陷区域格点宽度 $2N + 1$ 的增加而增加, 但共振峰的个数由图2中的 $2(N - 1)$ 个变为 $2N$ 个, 而且透射率的极小值形成了一个包络, 在两个共振峰之间不再出现全反射的情况. 固定方相位势垒区域的宽度 $N = 3$, 量子行走透射率在不同相位大小下随入射动量 k 的变化如图7所示. 对比图5, 当 $\phi = \pi/5$ 时, $k < 0.071\pi$, 则 κ_1 为实数; $k > 0.071\pi$, 则 κ_1 为虚数. 此时, 由于 ϕ 值较小, 相当于势阱较浅或势垒较低, 图7(a)中的透射率在传输区域较大, 振荡行为也不明显, 随着 k 的增大进入隧穿区域, 量子行走则很难通过方相位势垒, 透射率几乎为零. 增大势垒强度, 当 $\phi = 4\pi/5$ 时, $k < -0.071\pi$, 则 κ_1 为虚数; $k > -0.071\pi$, 则 κ_1 为实数, 相应地, k 从 $-\pi/2$ 增大, 量子行走一开始隧穿通过方相位势垒, 图7(c)中的透射率几乎为零, 当 k 经过 -0.071π 后, 方相位势垒变为方相位势阱, 透射率在深势阱下出现明显的共振振荡行为. 与量子力学中的方势垒隧穿不同的是, 此处无论方相位势垒多大, 在隧穿区域透射率几乎为零, 更接近经典行为. 然而, 当 $\phi = \pi/2$ 时, 虽然 κ_1 在 $k = -\pi/2, \pi/2$ 两点(此两值处透射幅度无解)之外都为复数, 但量子行走的透射率在 k 接近于 $-\pi/2$ 的区域并没有接近于零, 而是表现出量子隧穿行为.

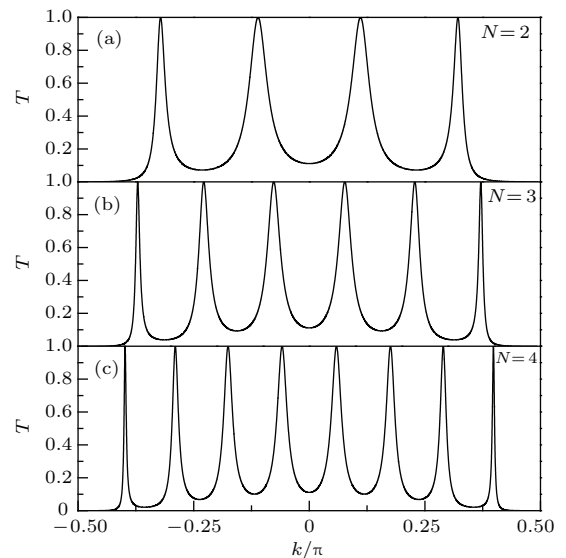


图6 $\phi = \pi$ 时波的透射率随动量的变化 (a) $N = 2$; (b) $N = 3$; (c) $N = 4$
Fig. 6. Curves of the transmission probability versus momentum k for $\phi = \pi$ and (a) $N = 2$; (b) $N = 3$; (c) $N = 4$.

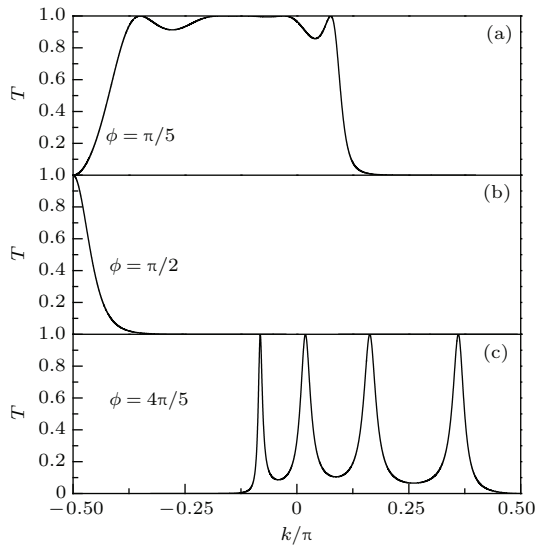


图7 $N = 3$ 时波的透射率随动量的变化 (a) $\phi = \pi/5$; (b) $\phi = \pi/2$; (c) $\phi = 4\pi/5$

Fig. 7. Curves of the transmission probability versus momentum k for $N = 3$: (a) $\phi = \pi/5$; (b) $\phi = \pi/2$; (c) $\phi = 4\pi/5$.

5 结 论

分立时间量子行走的准能量与动量间具有独特的色散关系方程(3), 两条能带间的能隙大小依赖于硬币参数的取值大小, 由此我们分析了波速的方向与动量、能量取值之间的关系. 接着在一维格点上的分立时间量子行走模型中引入两个和一段格点相位缺陷, 破坏量子行走在格点线上的平移不变性, 研究了在这两种缺陷模型下量子行走的静态散射特性. 当相位缺陷强度最大 $\phi = \pi$ 时, 如果只在一维格点线上的 $\pm N$ 格点处关于原点对称的存在两个相位缺陷, 量子行走的投射共振峰的个数为 $2(N - 1)$; 如果从 $-N$ 格点到 N 格点的区域内均存在相同的相位缺陷, 量子行走的透射共振峰个数则为 $2N$ 个. 量子行走的共振方式在 $\phi = \pi/2$ 处发生转变, 当 $\phi < \pi/2$ 时, 发生共振的入射动量区域较宽, 而当 $\phi > \pi/2$ 时, 共振行为表现为一个个独立的尖峰结构. 我们在 (k, ϕ) 参数空间给出方相位缺陷情况下量子行走通过相位缺陷区域是传输还是隧穿的结构图, 由此解释了透射率的变化特性. 在隧穿区域, 量子行走几乎发生了全反射, 趋向于经典粒子的行为.

参考文献

[1] Kempe J 2003 *Contemp. Phys.* **44** 307

[2] Zaburdaev V, Denisov S, Klafter J 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 483
 [3] Ambainis A 2003 *Int. J. Quantum Inf.* **01** 507
 [4] Shenvi N, Kempe J, Whaley K B 2003 *Phys. Rev. A* **67** 052307
 [5] Lovett N B, Cooper S, Everitt M, Trevers M, Kendon V 2010 *Phys. Rev. A* **81** 042330
 [6] Kurzyński P, Wójcik A 2011 *Phys. Rev. A* **83** 062315
 [7] Plenio M B, Huelga S F 2008 *New J. Phys.* **10** 113019
 [8] Schmitz H, Matjeschk R, Schneider Ch, Glueckert J, Enderlein M, Huber T, Schaetz T 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 090504
 [9] Du J F, Li H, Xu X D, Shi M J, Wu J H, Zhou X Y, Han R D 2003 *Phys. Rev. A* **67** 042316
 [10] Karski M, Förster L, Choi J M, Steffen A, Alt W, Meschede D, Widera A 2009 *Science* **325** 174
 [11] Bouwmeester D, Marzoli I, Karman G P, Schleich W, Woerdman J P 1999 *Phys. Rev. A* **61** 013410
 [12] Xue P, Qin H, Tang B, Zhan X, Bian Z H, Li J 2014 *Chin. Phys. B* **23** 110307
 [13] Schreiber A, Gábris A, Rohde P P, Laiho K, Štefaňák M, Potoček V, Hamilton C, Jex I, Silberhorn C 2012 *Science* **336** 55
 [14] Poullos K, Keil R, Fry D, Meinecke J D A, Matthews J C F, Politi A, Lobino M, Gräfe M, Heinrich M, Nolte S, Szameit A, O'Brien J L 2013 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143604
 [15] Farhi E, Gutmann S 1998 *Phys. Rev. A* **58** 915
 [16] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N 1993 *Phys. Rev. A* **48** 1687
 [17] Strauch F W 2006 *Phys. Rev. A* **74** 030301(R)
 [18] Chandrashekar C M 2013 *Sci. Rep.* **3** 2829
 [19] Yin Y, Katsanos D E, Evangelou S N 2008 *Phys. Rev. A* **77** 022302
 [20] Törmä P, Jex I, Schleich W P 2002 *Phys. Rev. A* **65** 052110
 [21] Schreiber A, Cassemiro K N, Potoek V, Gábris A, Jex I, Silberhorn Ch 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 180403
 [22] Chou C I, Ho C L 2014 *Chin. Phys. B* **23** 110302
 [23] Zhang R, Qin H, Tang B, Xue P 2013 *Chin. Phys. B* **22** 110312
 [24] Li Z J, Izaac J A, Wang J B 2013 *Phys. Rev. A* **87** 012314
 [25] Mohseni M, Rebentrost P, Lloyd S, Aspuru-Guzik A 2008 *J. Chem. Phys.* **129** 174106
 [26] Marais A, Sinayskiy I, Kay A, Pentruccione F, Ekert A 2013 *New J. Phys.* **15** 013038
 [27] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
 [28] Ribeiro P, Milman P, Mosseri R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 190503
 [29] Keating J P, Linden N, Matthews J C F, Winter A 2007 *Phys. Rev. A* **76** 012315
 [30] Joye A, Merkli M 2010 *J. Stat. Phys.* **140** 1025
 [31] Ahlbrecht A, Alberti A, Meschede D, Scholz V B, Werner A H, Werner R F 2012 *New J. Phys.* **14** 073050
 [32] Kitagawa T, Rudner M S, Berg E, Demler E 2010 *Phys. Rev. A* **82** 033429
 [33] Rakovszky T, Asboth J K 2015 *Phys. Rev. A* **92** 052311
 [34] Asbóth J K, Obuse H 2013 *Phys. Rev. B* **88** 121406(R)

- [35] Wójcik A, Łuczak T, Kurzyński P, Grudka A, Gdala T, Bednarska-Bzdęga M 2012 *Phys. Rev. A* **85** 012329
- [36] Izaac J A, Wang J B, Li Z J 2013 *Phys. Rev. A* **88** 042334
- [37] Zhang R, Xue P, Twamley J 2014 *Phys. Rev. A* **89** 042317
- [38] Li Z J, Wang J B 2015 *Sci. Rep.* **5** 13585
- [39] Lam H T, Szeto K Y 2015 *Phys. Rev. A* **92** 012323
- [40] Li Z J, Wang J B 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** 355301

Resonance transmission of one-dimensional quantum walk with phase defects*

Wang Dan-Dan Li Zhi-Jian[†]

(Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

(Received 8 November 2015; revised manuscript received 27 December 2015)

Abstract

In this paper, the resonance transmission of discrete time quantum walk is studied when it walks on one-dimensional lattice in which two-phase defects or a piece of phase defects exists. The quasi energy of discrete time quantum walk has a unique dispersion relation with the momentum, from which we first discuss the wave velocity direction versus the values of momentum, and distinguish the incident wave and the reflected wave. The gap between two energy bands depends on the parameters of coincident operator, so the phase defects, which break down the translation invariance of quantum walk on uniform lattices, can be regarded as an analogue of quantum potential. Then we use the condition of energy conversion at the boundary points to obtain the transmission rate and discuss its variation with the incident momentum for different strengths and widths of defects in detail. The multiple resonant peaks are observed due to the enhanced interference effect. Different resonant behaviors are shown when the strength of defect is less or greater than $\pi/2$, correspondingly the resonances occur in a wide region of incident momentum or the sharp resonant peaks appear at discrete values of momentum. Under the condition of strong defect strength, i.e., ϕ approaching to π , the qualitative relation between the number of resonant peaks and the widths of defect region is given. The number of resonant peaks is $2(N - 1)$ when the two phase defects are located at $\pm N$ sites symmetric about the origin, while the number is $2N$ when a piece of phase defects is located at $-N$ to N sites. In the case of a piece of phase defects, we also present the phase diagram in parameter space of (k, ϕ) to show the discrete time of quantum walk propagating or tunneling through the defect region. In terms of this phase diagram, the variations of transmission rate with the incident momentum are reasonably explained. One special phenomenon is that the quantum walk is almost totally reflected in the tunneling case except for $\phi = \pi/2$ and k being slightly off $-\pi/2$. Moreover, this behavior seems little affecting the defect strength, just similar to a classical particle. As a result of this research, we hope to deepen the insight of the quantum walk and provide methods to control the spreading of quantum walk through artificial defects.

Keywords: quantum walk, phase defect, scattering property

PACS: 03.67.Lx, 03.65.Ge, 05.40.FB

DOI: 10.7498/aps.65.060301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10974124, 11274208) and the Shanxi Scholarship Council of China (2015-012).

† Corresponding author. E-mail: zjli@sxu.edu.cn