

一类 Hopf 分岔系统的通用鲁棒稳定控制器设计方法

陆金波 侯晓荣 罗敏

General robust stability controller design method for a class of Hopf bifurcation systems

Lu Jin-Bo Hou Xiao-Rong Luo Min

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 060502 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.060502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.060502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I6>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

类 Liu 系统在水声微弱信号检测中的应用研究

[Application of similar Liu system in underwater weak signal detection](#)

物理学报.2016, 65(7): 070501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.070501>

一种基于非完整二维相空间分量置换的混沌检测方法

[A chaotic signal detection method based on the component permutation of the incomplete two-dimensional phasespace](#)

物理学报.2016, 65(7): 070502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.070502>

基于压缩感知的动态散射成像

[Imaging through dynamic scattering media with compressed sensing](#)

物理学报.2016, 65(4): 040501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.040501>

一种基于相邻数据依赖性的混沌分析方法

[A chaotic analyzing method based on the dependence of neighbor sub-sequences in the data series](#)

物理学报.2016, 65(3): 030503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.030503>

一种基于模糊 C 均值聚类小数据量计算最大 Lyapunov 指数的新方法

[A novel method based on the fuzzy C-means clustering to calculate the maximal Lyapunov exponent from small data](#)

物理学报.2016, 65(2): 020502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.020502>

一类Hopf分岔系统的通用鲁棒稳定控制器设计方法*

陆金波 侯晓荣[†] 罗敏

(电子科技大学能源科学与工程学院, 成都 611730)

(2015年10月24日收到; 2015年12月10日收到修改稿)

针对一类多项式形式的Hopf分岔系统, 提出了一种鲁棒稳定的控制器设计方法. 使用该方法设计控制器时不需要求解出系统在分岔点处的分岔参数值, 只需要估算出分岔参数的上下界, 然后设计一个参数化的控制器, 并通过Hurwitz判据和柱形代数剖分技术求解出满足上下界条件的控制器参数区域, 最后在得到的这个区域内确定出满足鲁棒稳定的控制器参数值. 该方法设计的控制器是由包含系统状态的多项式构成, 形式简单, 具有通用性, 且添加控制器后不会改变原系统平衡点的位置. 本文首先以Lorenz系统为例说明了控制器的推导和设计过程, 然后以van der Pol振荡系统为例, 进行了工程应用. 通过对这两个系统的控制器设计和仿真, 说明了文中提出的控制器设计方法能够有效地应用于这类Hopf分岔系统的鲁棒稳定控制, 并且具有通用性.

关键词: 鲁棒稳定控制器, Hopf分岔, 参数化, 柱形代数剖分

PACS: 05.45.-a, 02.30.Oz, 05.45.Pq, 05.45.Gg

DOI: 10.7498/aps.65.060502

1 引言

自20世纪80年代以来, 非线性动态系统分岔控制方面的研究越来越多^[1,2]. 而Hopf分岔控制是分岔控制的一个重要方向, 并已有很多的研究成果^[3-9]. 例如, 文献^[4]使用非线性状态反馈, 提出了一种Hopf分岔控制方法, 可以用于延时或消除分岔; 文献^[9]也使用状态反馈方法, 以Rössler系统为例, 在系统平衡点处提出了一种参数化的控制方法.

由于系统状态特性对分岔参数的变化非常敏感, 通常情况下, 为了更好地实现对非线性动态系统的Hopf分岔控制, 目前大多数的研究^[7-9]都是在设计控制器之前计算出系统在分岔点处的参数值. 而实际上, 非线性系统的构成比较复杂, 系统建

模时经常存在结构或参数不确定性^[10,11]以及外部扰动等因素^[12], 所以在分岔点处精确求解出系统分岔参数的值是比较困难的, 而分岔参数的微小变动就可能使系统的动态特性受到影响. 因此, 在分岔点附近设计控制器时就期望所设计的控制器对于分岔参数具有一定适应能力, 即具有一定的鲁棒稳定特性. 在这方面也有了很多的研究成果. 例如, 文献^[13]对Hopf分岔的系统的确定性提出了一种分析和鲁棒稳定方法; 文献^[14]针对外部扰动造成的Hopf分岔和混沌问题设计了一种鲁棒控制器, 达到了控制效果; 文献^[15]提出了周期分岔的鲁棒控制方法; 文献^[16]对多个分岔参数变化造成的多重Hopf分岔现象进行了研究, 并使用综合方法设计了鲁棒控制器. 另外, 一些学者也对工程中的Hopf分岔现象进行了研究^[17-20]. 例如, 文献^[17]研究了飞机起落架摆振的非线性动力学问题, 对其

* 国家自然科学基金(批准号: 61374001)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: houxr@uestc.edu.cn

Hopf分岔点提出了具有鲁棒稳定的控制策略; 文献 [19] 考虑了交流电机的气隙磁场能量, 对这种具有时延反馈的非线性机电耦合系统的Hopf分岔控制和稳定问题进行了研究.

尽管人们已经对非线性动态系统Hopf分岔的鲁棒稳定控制方法进行了大量的研究工作, 但是仍然存在很多的局限性. 这些鲁棒控制器设计之前都需要计算出系统在Hopf分岔点的分岔参数值 [14,21], 并且控制器都是针对特定的系统设计或构建的, 很难对其他系统具有通用性, 由于构造函数等限制, 一般所设计的控制器结构较为复杂, 计算过程也比较繁琐. 例如, 文献 [21] 针对存在扰动的van der Pol振荡系统在原点附近的Hopf分岔问题, 使用局部 L_2 增益分析和设计了鲁棒控制器, 这种控制器主要针对系统只有一个平衡点且其在原点附近的情况设计的, 设计控制器之前需要计算出系统的分岔点参数值, 而控制器是由系统状态的线性组合构成的3阶矩阵, 控制器参数需要通过Hamilton-Jacobi-Bellman不等式进行求解. 可见这类控制器结构较复杂, 求解较为繁琐, 另外一个缺点是增加控制器后通常会改变系统的平衡点位置, 使得到的闭环控制系统的平衡点位置偏离了原系统的平衡点位置.

显然, 现有鲁棒控制器设计中的这些问题使得设计的控制器较为复杂, 且针对性较强, 很难具有通用性, 限制了这些方法的应用. 为此, 本文针对一类多项式形式的Hopf分岔系统提出了一种参数化鲁棒稳定控制器设计方法, 该方法不需要求解分岔点的参数值, 只需要确定分岔点处的分岔参数范围, 这样对于经常存在不确定性和扰动的非线性系统而言, 较大地降低了计算难度. 由于该方法并不是针对某个特定系统提出的, 所以具有较好的通用性.

本文提出的方法使用非线性状态反馈设计了参数化的鲁棒控制器, 控制器由系统的状态多项式组成, 不含有系统的具体平衡点的值, 增加控制器后不会改变原系统的平衡点位置. 根据Hurwitz判据和柱形代数剖分技术 [22-24] 求得了控制器参数值. 为了说明控制器的设计过程, 本文以一个不存在外部扰动的具有3个平衡点的Lorenz系统为例, 说明控制器的设计和推导过程, 然后又对文献 [21] 中提出的存在外部扰动的van der Pol振荡系统进行应用, 说明了该法的实用性和通用性.

2 鲁棒稳定控制器设计方法

2.1 Hopf分岔系统参数化控制器设计

为了给出参数化的鲁棒控制器设计方法, 在这部分首先针对一类多项式形式的Hopf分岔系统给出一个通用的参数化控制器. 本文考虑的多项式形式Hopf分岔系统的闭环控制系统可以描述为

$$\dot{X} = F(X, \mu) + u(X, \mu) + Bw, \quad (1)$$

其中, $F(X, \mu)$ 是非线性系统的状态方程, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $F(X, \mu) = [f_1(X, \mu), f_2(X, \mu), \dots, f_n(X, \mu)]^T$, $u(X, \mu) \in R^{n \times 1}$ 是系统的控制输入, $w \in R$ 是外部扰动, $B \in R^{n \times 1}$ 是扰动的系数向量. 系统 (1) 中, \dot{X} 是状态 X 对时间 t 的导数, $X \in R^n$, $\mu \in R$ 是非线性系统的分岔参数, 当 $\mu \in \mu^*$ 时系统会发生Hopf分岔. 在控制器设计时假设 $w = 0$, 只针对 $\dot{X} = F(X, \mu)$ 设计 $u(X, \mu)$.

系统 (1) 中的控制器 $u(X, \mu)$ 可以设计为

$$u(X, \mu) = [0, 0, \dots, u_j, 0, \dots, 0]^T$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

其中

$$u_j = g(X, \mu)f_j(X, \mu) + \sum_{i=1, i \neq j}^n c_{0i}f_i(X, \mu), \quad (2)$$

(2) 式中 $g(X, \mu) = c_1 + \sum_{k=1}^n c_{k+1}(x_k + d_{k+1}x_k^2)$, $\{c_{0i}, c_1, c_{k+1}, d_{k+1} \in R\}$ 是设计的控制器参数, 大多数情况下可以选择 $d_{k+1} = 0$. 容易看出, 控制器 $u(X, \mu)$ 不会改变 $\dot{X} = F(X, \mu)$ 的平衡点位置.

因为很多情况下对非线性系统进行精确建模是非常困难的, 所以系统中可能存在各种不确定性, 这种情况下很难精确计算出系统在分岔点的具体参数值, 所以考虑系统 (1) 的分岔参数为 $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, $\mu_1 \in R$, $\mu_2 \in R$, $\mu_1 \leq \mu^* \leq \mu_2$.

注1: 尽管控制器 (2) 可以应用到众多的 n 维系统中去, 但是对其证明是非常困难的. 考虑到3维系统是控制系统研究中的一种常用系统, 所以下面将对3维系统的情况进行证明, 应用实例也将采用3维系统.

定理1 一个不含有控制输入和外部扰动的

3维的非线性系统可以描述为

$$\begin{cases} x = f_1(X, \mu), \\ y = f_2(X, \mu), \\ z = f_3(X, \mu), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $X = [x, y, z]^T$. 设 J_{X_0} 是系统在平衡点 $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 处的 Jacobi 矩阵, $\det(J_{X_0}) \neq 0$. 根据 (2) 式, 不失一般性, 控制器可以设计为

$$u_2(X, \mu) = g(X) \cdot f_2(X, \mu) + c_{01}f_1(X, \mu) + c_{03}f_3(X, \mu), \quad (4)$$

式中 $g(X) = (c_1 + c_2x + c_3y + c_4z)$, $\{c_{01}, c_{03}, c_1, c_2, c_3, c_4 \in R\}$ 是控制器参数. 那么在满足 Hurwitz 判据确定的约束条件的情况下, 通过选择这些控制器参数的值可以实现对系统 (3) 的稳定控制.

证明 增加控制器后系统 (3) 可以写为

$$\begin{cases} x = f_1(X, \mu), \\ y = f_2(X, \mu) + u_2(X, \mu), \\ z = f_3(X, \mu). \end{cases} \quad (5)$$

对于闭环系统 (5) 的 Jacobi 矩阵可以描述为

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} j_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x}g(X) + c_2f_2 \\ &\quad + c_{01}\frac{\partial f_1}{\partial x} + c_{03}\frac{\partial f_3}{\partial x}, \\ j_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y}g(X) + c_3f_2 \\ &\quad + c_{01}\frac{\partial f_1}{\partial y} + c_{03}\frac{\partial f_3}{\partial y}, \\ j_{23} &= \frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial z}g(X) + c_4f_2 \\ &\quad + c_{01}\frac{\partial f_1}{\partial z} + c_{03}\frac{\partial f_3}{\partial z}. \end{aligned}$$

设 $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 是系统的一组平衡点, 则系统在平衡点处的特征方程为

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \det(\lambda I - J)|_{X=X_0} \\ &= a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3, \end{aligned}$$

其中

$$a_0 = 1,$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[-\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial z} - j_{22} \right]_{X=X_0}, \\ a_2 &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_3}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_3}{\partial x} - j_{21} \frac{\partial f_1}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + j_{22} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) - j_{23} \frac{\partial f_3}{\partial y} \right]_{X=X_0}, \\ a_3 &= \left[j_{21} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_3}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + j_{22} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. - j_{23} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) \right]_{X=X_0}. \end{aligned}$$

在特征方程的系数表达式中 $f_i = f_i(X, \mu)$, $i = 1, 2, 3$. 容易看出, 当 $X = X_0$ 时, $\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial z}$ 的值是确定的, f_i 的值也是确定的. 因此特征方程的系数 a_1, a_2 和 a_3 的值将会因为控制器参数 $c_{01}, c_{03}, c_1, c_2, c_3, c_4$ 的变化而变化. 又因为 $a_0 = 1$ 是大于零的, 所以根据 Hurwitz 判据, 为了实现系统的稳定控制, 控制器参数的约束条件可以表述为

$$\begin{cases} a_i > 0 \\ g \geq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

式中 $g = a_1a_2 - a_3$. 因此, 在满足 Hurwitz 判据确定的约束条件 (6) 的情况下, 通过选择合适的控制器参数 $c_{01}, c_{03}, c_1, c_2, c_3, c_4$, 系统 (3) 将实现稳定控制.

注 2: 当 $g = 0$ 时系统将发生 Hopf 分岔, 而 $g > 0$ 系统状态将是稳定的. 因为本文是为了设计鲁棒稳定的控制器, 所以只考虑 $g > 0$ 的情况.

2.2 鲁棒稳定控制器的设计方法

接下来将提出参数化的鲁棒控制器设计方法, 该方法分为如下 4 个设计步骤.

步骤 1 按照 (4) 式为非线性系统设计出参数化的控制器.

步骤 2 针对分岔参数变化区间的两个边界 μ_1 和 μ_2 , 分别求出系统的 Jacobi 矩阵, 并使用 Hurwitz 判据, 得到在分岔参数的两个边界上的控制器约束条件, 其不等式组可以写为

$$\begin{cases} a_i(\mu_1) > 0 \\ g(\mu_1) > 0 \\ a_i(\mu_2) > 0 \\ g(\mu_2) > 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

步骤3 将步骤2中的约束条件转化为相应维数的参数空间分割问题, 使用柱形代数剖分技术搜索出能够满足约束条件要求的控制器参数区间.

步骤4 分岔参数 μ 在 (μ_1, μ_2) 内变化时, 在步骤3得到的区间内通过验证选择出一组控制参数, 使其能够实现系统的稳定控制. 这样就得到了能够实现鲁棒控制的控制器参数.

注3: 一般情况下, 参数空间的维数不超过3维, 因为超过3维后参数空间的搜索将不直观, 而且计算量较大.

注4: 因为步骤3中得到的参数区间是对应于 μ 的两个边界 $\mu = \mu_1$ 和 $\mu = \mu_2$ 的, 理论上只能够满足分岔参数两个边界上的控制要求, 所以 μ 在 (μ_1, μ_2) 内变化时需要验证选定的控制参数的有效性. 验证有两种情况: 一种情况为在 $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ 内约束条件(6)中的函数关于 μ 是非单调的, 此时不能保证步骤3中得到的参数区间内的控制参数都能满足系统要求, 因此需要对选出的控制参数进行验证, 证明其有效性(如本文中的Lorenz系统); 另一种情况是约束条件(6)中的函数关于 μ 是单调的, 那么证明出单调性, 此时步骤3中得到的参数区间内的控制参数都能够满足系统要求(如本文中的van der Pol振荡系统).

接下来的部分将使用一个不存在外部扰动的Lorenz系统对本文提出的参数化鲁棒稳定控制器设计方法进行推导, 以展开说明对控制器的设计步骤.

3 Lorenz 系统的控制器设计

3.1 系统描述

根据文献[4], Lorenz系统方程可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = -4(x - y), \\ \dot{y} = px - xz - y, \\ \dot{z} = xy - z, \end{cases} \quad (7)$$

式中 p 是系统的分岔参数, 其微小变化就有可能导致系统特性的变化, 使其从稳定变为不稳定甚至混沌. 根据系统方程(7)计算出系统的平衡点为

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0, 0), \\ E_+ &= (\sqrt{p-1}, \sqrt{p-1}, p-1), \\ E_- &= (-\sqrt{p-1}, -\sqrt{p-1}, p-1). \end{aligned}$$

3.2 控制器设计

对系统(7)将(4)式中的控制器简化, 可以写为

$$u_2(x, y, z) = \dot{y}(c_1 + c_2x + c_3y + c_4z) + c_0\dot{x}. \quad (8)$$

整理后控制器为

$$u_2(x, y, z) = (px - xz - y)(c_1 + c_2x + c_3y + c_4z) - 4c_0(x - y).$$

增加控制器后得到闭环控制系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = -4(x - y), \\ \dot{y} = px - xz - y + u_2(x, y, z), \\ \dot{z} = xy - z. \end{cases} \quad (9)$$

为了计算控制器 $u_2(x, y, z)$ 的参数, 从闭环控制系统(9)计算系统的Jacobi矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ y & x & -c \end{bmatrix},$$

式中

$$\begin{aligned} j_{21} &= (p - z)(c_1 + c_2x + c_3y + c_4z + 1) \\ &\quad + (px - xz - y)c_2 - 4c_0, \\ j_{22} &= -1 - c_1 - c_2x - c_3y - c_4z \\ &\quad + c_3(px - xz - y) + 4c_0, \\ j_{23} &= -x(c_1 + c_2x + c_3y + c_4z) \\ &\quad + c_4(px - xz - y). \end{aligned}$$

设系统(7)的平衡点为 (x_0, y_0, z_0) , 由系统方程可知 $y_0 = x_0, z_0 = x_0^2$, 则代入平衡点的值后系统在平衡点处的特征方程为

$$D(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

式中

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 6 + c_3x_0 - 4c_0 + c_2x_0 + c_4x_0^2 + c_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 5c_1x_0^2 + c_4x_0^2p + 5x_0^2 + c_2x_0p + c_3x_0p \\ &\quad - 4c_0 - 4c_1p + 5c_1 - 4p + 9, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 4(3c_1 + 2c_4p - 2c_4 + 3)x_0^2 \\ &\quad + 4(2c_2p - 2c_2 + 2c_3p - 2c_3)x_0 \\ &\quad + 4(c_1 - c_1p - p + 1). \end{aligned} \quad (12)$$

使用控制器, 为了使系统在平衡点处稳定, 控制器参数的约束条件为

$$\begin{cases} a_i > 0 & i = 1, 2, 3, \\ g = a_1 a_2 - a_3 > 0. \end{cases} \quad (13)$$

为了计算方便, 在这里使用系统平衡点方程 $(p-1)x_0 - x_0^3 = 0$ 对 a_i 和 g 做多项式除法, 从而化简掉高次项. 通常 (13) 式由一组不等式构成, 直接求解比较困难, 下面将使用柱形代数剖分技术求解控制器参数.

3.3 分岔参数边界处约束条件计算和求解

在 Lorenz 系统内, 分岔参数的范围确定为 $p \in [16, 21]$, 如果不使用控制器时系统的状态是混沌的. 下面将根据 (13) 式分别计算系统在分岔参数边界上的约束条件.

选择 $c_0 = 0, c_3 = 0$, 并将分岔参数的边界 $p = 16$ 和 $p = 21$ 分别代入闭环的 Lorenz 系统, 这样系统在 $E_0 = (0, 0, 0)$ 的约束条件可以写为

$$a_{10} = c_1 + 6, \quad (14)$$

$$a_{20} = -59c_1 - 55, \quad (15)$$

$$a_{30} = -60(c_1 + 1), \quad (16)$$

$$g_0 = -59c_1^2 - 349c_1 - 270, \quad (17)$$

$$\bar{a}_{10} = c_1 + 6, \quad (18)$$

$$\bar{a}_{20} = -79c_1 - 75, \quad (19)$$

$$\bar{a}_{30} = -80(c_1 + 1), \quad (20)$$

$$\bar{g}_0 = -79c_1^2 - 469c_1 - 370. \quad (21)$$

结合 (14)—(17), (18)—(21) 式很容易得到 $c_1 \in (-5, -1)$. 为了在柱形代数剖分求解时更直观, 选择 $c_1 = -3$, 此时可以得到平衡点 E_- 和 E_+ 处的约束条件为

$$a_{1-} = 3 - \sqrt{15}c_2 + 15c_4, \quad (22)$$

$$a_{2-} = -16\sqrt{15}c_2 + 240c_4 - 28, \quad (23)$$

$$a_{3-} = -120\sqrt{15}c_2 + 1800c_4 - 240, \quad (24)$$

$$g_- = 240c_2^2 + 3600c_4^2 - 480\sqrt{15}c_2c_4 + 100\sqrt{15}c_2 - 1500c_4 + 156, \quad (25)$$

$$a_{1+} = \sqrt{15}c_2 + 15c_4 + 3, \quad (26)$$

$$a_{2+} = 16\sqrt{15}c_2 + 240c_4 - 28, \quad (27)$$

$$a_{3+} = 120\sqrt{15}c_2 + 1800c_4 - 240, \quad (28)$$

$$g_+ = 240c_2^2 + 3600c_4^2 + 480\sqrt{15}c_2c_4$$

$$- 100\sqrt{15}c_2 - 1500c_4 + 156, \quad (29)$$

$$\bar{a}_{1-} = -2\sqrt{5}c_2 + 20c_4 + 3, \quad (30)$$

$$\bar{a}_{2-} = -42\sqrt{5}c_2 + 420c_4 - 38, \quad (31)$$

$$\bar{a}_{3-} = -320\sqrt{5}c_2 + 3200c_4 - 320, \quad (32)$$

$$\bar{g}_- = 420c_2^2 + 8400c_4^2 - 1680\sqrt{5}c_2c_4 + 270\sqrt{5}c_2 - 2700c_4 + 206, \quad (33)$$

$$\bar{a}_{1+} = 2\sqrt{5}c_2 + 20c_4 + 3, \quad (34)$$

$$\bar{a}_{2+} = 42\sqrt{5}c_2 + 420c_4 - 38, \quad (35)$$

$$\bar{a}_{3+} = 320\sqrt{5}c_2 + 3200c_4 - 320, \quad (36)$$

$$\bar{g}_+ = 420c_2^2 + 8400c_4^2 + 1680\sqrt{5}c_2c_4 - 270\sqrt{5}c_2 - 2700c_4 + 206. \quad (37)$$

使用柱形代数剖分技术, 方程 (22)—(37) 的隐函数曲线绘制到 c_2 - c_4 平面上, 如图 1 所示.

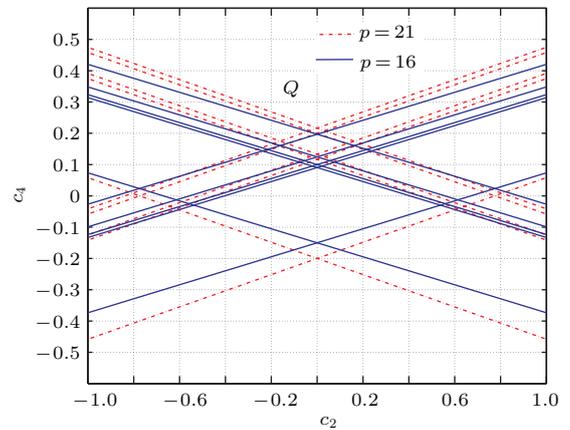


图1 在 c_2 - c_4 平面上的系统约束条件隐函数曲线

Fig. 1. System constraints curves in c_2 - c_4 plane.

在被约束条件隐函数曲线分割的平面上, 在分隔开的各个区域上对 c_2 和 c_4 的值进行尝试. 最终得到区域 Q , 在该区域内的所有 c_2 和 c_4 值都能满足式 (22)—(37) 构成的约束条件.

对于平衡点 E_+ 和 E_- , 根据约束条件 (10)—(12) 以及 g 可以看出, 这些约束条件是关于分岔参数 p 的非线性函数, 但控制器参数未知时, 在 $p \in [16, 21]$ 这个范围内证明约束条件关于 p 的单调性比较困难, 所以不容易证明区域 Q 内的控制参数全部适用于 $p \in [16, 21]$ 内的任何情况. 因此, 在 Q 内选择一组参数后需要对参数的有效性进行验证.

设 $p = p_0 + \Delta p, p_0 = 18.5, \Delta p \in [-2.5, 2.5]$. 控制器参数区间 Q 内的所有参数都能够满足分岔参数的上确界和下确界的稳定要求, 此时选择参数

$c_2 = 0, c_4 = 1$. 又因为 $c_1 = -3$, 将这些参数代入系统的约束条件 (10)—(12) 可得:

$$a_1 = x_0^2 + 3, \tag{38}$$

$$a_2 = (\Delta p + 8.5)x_0^2 + 8\Delta p + 142, \tag{39}$$

$$a_3 = (8\Delta p + 116)x_0^2 + 8\Delta p + 140. \tag{40}$$

这样简化后的 g 可以写为

$$g = (\Delta p^2 + 29\Delta p + 200.25)x_0^2 + 16\Delta p + 286. \tag{41}$$

因为 $x_0^2 \geq 0$, 故 (38)—(41) 式均大于零, 因此这组参数满足系统要求. 所以尽管 Δp 会在 $[-2.5, 2.5]$ 内进行变化, 但是当控制器的参数选择为 $c_0 = 0, c_1 = -3, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 1$ 时, Lorenz 系统 (7) 能够实现稳定控制.

3.4 数值模拟

接下来将根据不同的 Δp 的值对 Lorenz 系统进行仿真. 通过文献 [4] 可知, 当 $p \geq 16$ 以后, Lorenz 系统的状态将由稳定走向分岔和混沌. 在仿真中选择 $p_0 = 18.5$, 而不确定参数 Δp 按照两种信号方式进行变化: 一种是阶梯信号, 从 -2.5 开始, 每 10 s 增加 1.0, 直至 2.5 为止, 如图 2 所示; 另一种是正弦信号, 幅值为 2.5, 频率为 $1/2\pi$ Hz, 如图 3 所示.

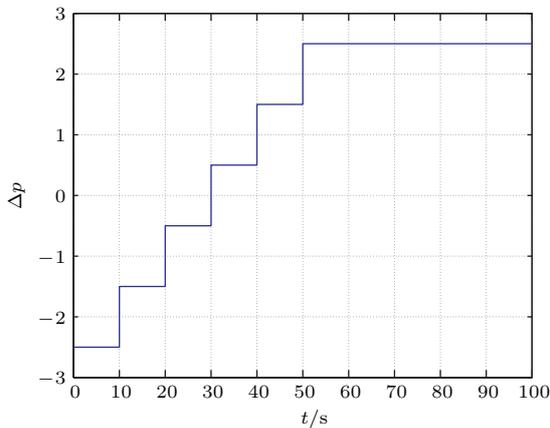


图 2 Δp 按阶梯信号变化时的图像

Fig. 2. Δp is an assembly of step signals.

在 E_0 处, 无论 Δp 如何变化, x_0 的值都不会受到影响, 如图 4 和图 7 所示. 在平衡点 E_- 和 E_+ 处, $x_{0\mp}$ 和 Δp 的关系式为 $x_{0\mp} = \pm\sqrt{17.5 + \Delta p}$, 可见随着 Δp 的变化 $x_{0\mp}$ 会发生变化, 如图 5 和图 6 所示. 图 5 和图 6 是系统在平衡点 E_- 和 E_+ 的轨迹, 当 Δp 按照阶梯信号 (图 2) 变化时, 系统的轨迹会

跟随 Δp 的变化而后重新收敛, 所以此时文中的鲁棒控制器实现了 Lorenz 系统 (7) 的稳定控制. 而当 Δp 按照图 3 中的正弦信号变化时, 系统的轨迹在平衡点 E_- 和 E_+ 处稳定收敛到一个极限环, 如图 8 和图 10 所示. Δp 的正弦变化导致了 x_{0-} 和 x_{0+}

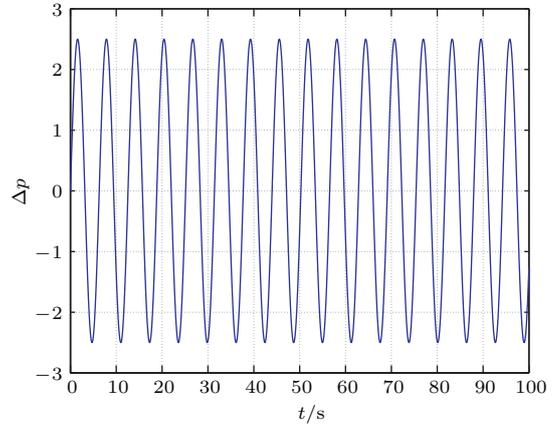


图 3 Δp 按正弦信号变化时的情况

Fig. 3. Δp is a sine wave.

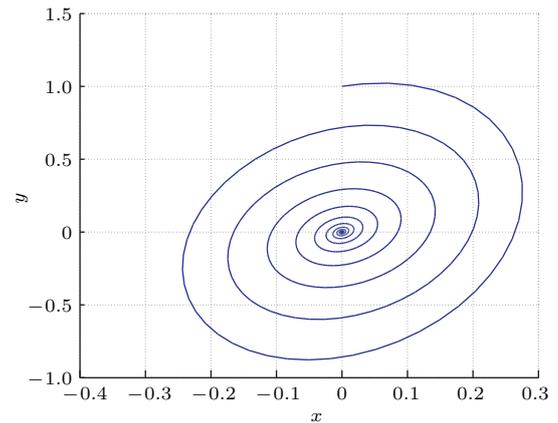


图 4 当 Δp 是阶梯信号时在 E_0 处的系统轨迹

Fig. 4. The system trajectory at E_0 when Δp are steps.

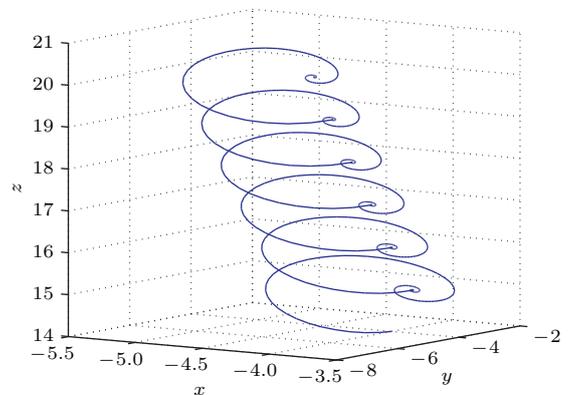


图 5 当 Δp 是阶梯信号时在 E_- 处的系统轨迹

Fig. 5. The system trajectory at E_- when Δp are steps.

的变化, 其变化曲线分别如图 9 和图 11 所示. 此时系统的状态 x 在平衡点 E_- 和 E_+ 处能够跟踪 x_{0-} 和 x_{0+} 的变化. 所以此时的鲁棒控制器也是有效的.

通过图 4—图 11 的仿真可以看出, 设计的控制器 (8) 在分岔参数 $p \in [16, 21]$, 即 $\Delta p \in [-2.5, 2.5]$ 时, 能够稳定系统, 使系统状态实现收敛, 即实现了系统的鲁棒稳定控制.

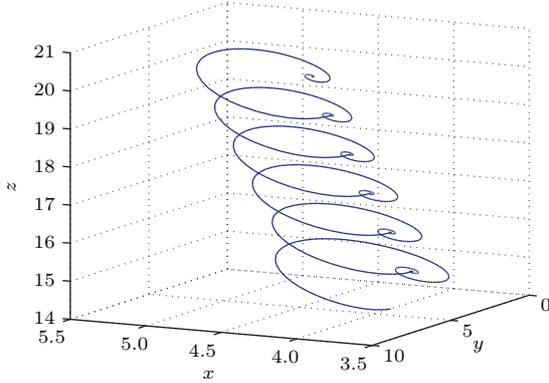


图 6 当 Δp 是阶梯信号时在 E_+ 处的系统轨迹

Fig. 6. The system trajectory at E_+ when Δp are steps.

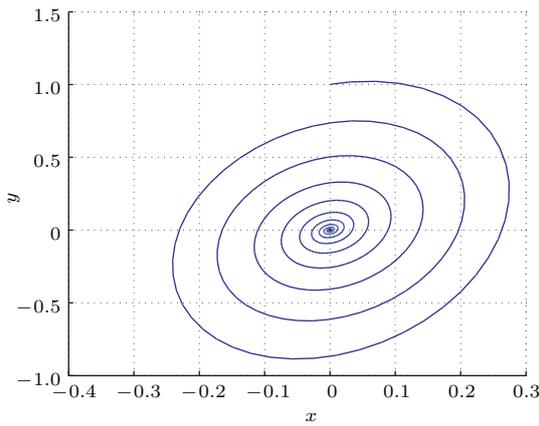


图 7 当 Δp 是正弦信号时在 E_0 处的系统轨迹

Fig. 7. The system trajectory at E_0 when Δp is a sine wave.

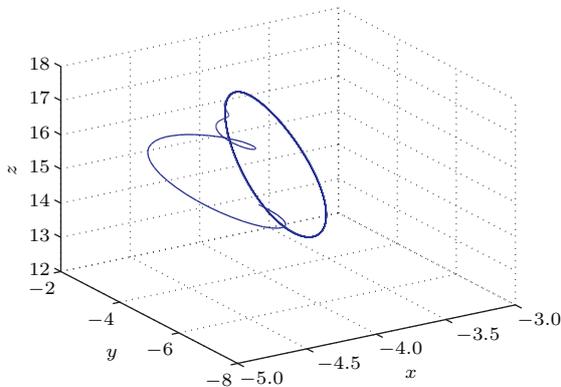


图 8 当 Δp 是正弦信号时在 E_- 处的系统轨迹

Fig. 8. The system trajectory at E_- when Δp is a sine wave.

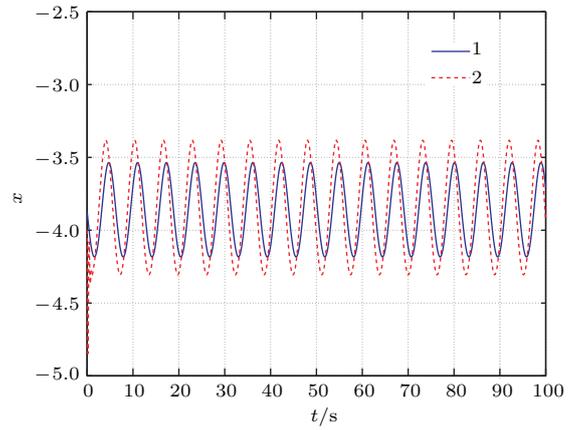


图 9 当 Δp 是正弦信号时状态 x 在 E_- 处的波动曲线

Fig. 9. The curve of state x at E_- when Δp is a sine wave.

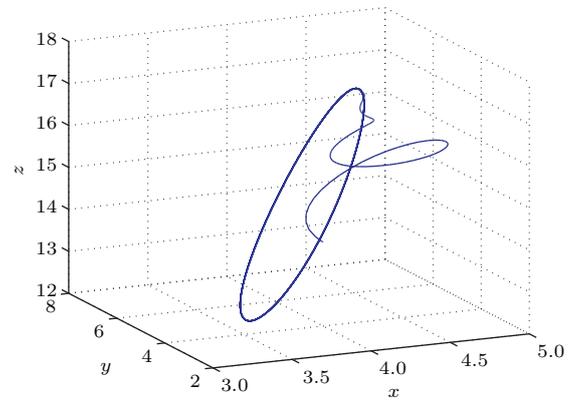


图 10 当 Δp 是正弦信号时在 E_+ 处的系统轨迹

Fig. 10. The system trajectory at E_+ when Δp is sine wave.

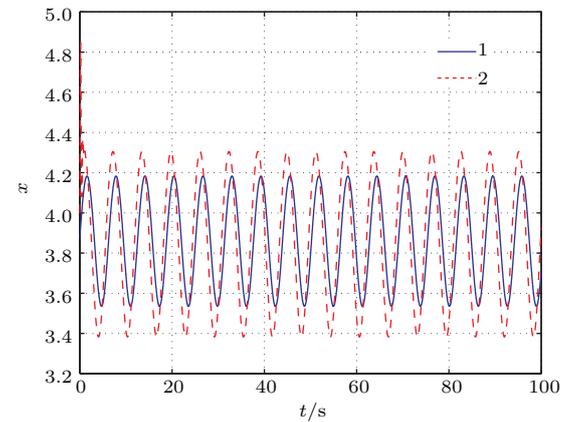


图 11 当 Δp 是正弦信号时状态 x 在 E_+ 处的波动曲线

Fig. 11. The curve of state x at E_+ when Δp is a sine wave.

4 van der Pol 振荡系统的控制器设计

在第 3 部分, 使用本文给出的参数化鲁棒控制方法在 Lorenz 系统上设计了控制器, 并实现了有效的控制. 为了验证该方法的通用性, 本部分将以存

在外部扰动的 van der Pol 振荡系统作为一个工程应用的例子, 对该方法进行更进一步的验证.

van der Pol 振荡系统因其丰富的动力学特性而广泛应用在非线性系统的研究中. 文献 [21] 中引入了一个带有电池的 van der Pol 振荡系统, 电池电压为 a 伏. 接下来将按照本文提出的控制器设计方法对其进行控制器设计和仿真, 相比于文献 [21], 本文的控制器更简单、通用, 系统收敛更快. van der Pol 振荡系统状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{20}{19} \left(-\frac{2}{3}x^3 + x - y + z \right), \\ \dot{y} = x - a, \\ \dot{z} = x - z, \end{cases} \quad (42)$$

式中 a 是分岔参数, 按照文献中的计算, 在 $a = 0.897$ 时系统将发生 Hopf 分岔, 所以此处将 a 的值确定在 $a = 0.897$ 附近的一个邻域内, 取值范围选为 $a \in [0.8, 0.95]$.

对于 (42) 式设计控制器为

$$u = (x - a)(c_1 + c_2x + c_3y + c_4z) + c_0(x - z). \quad (43)$$

为了简化计算, 选择 $c_0 = 0, c_1 = 0, c_3 = 0$. 这样闭环系统的 Jacobin 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{40}{19}x^2 + \frac{20}{19} & -\frac{20}{19} & \frac{20}{19} \\ 1 + c_2x + c_4z + c_2(x - a) & 0 & c_4(x - a) \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{X=X_0}$$

设 $X_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$ 是系统 (42) 的平衡点, 显然 $x_0 = z_0 = a, y_0 = -\frac{2}{3}a^3 + 2a$. 这样可以计算出系统在平衡点处的特征方程为

$$\det(\lambda I - J)|_{X=X_0} = \lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3,$$

式中

$$b_1 = \frac{1}{19}(40a^2 - 1), \quad (44)$$

$$b_2 = \frac{20}{19}(2a^2 + c_2a + c_4a - 1), \quad (45)$$

$$b_3 = \frac{20}{19}(c_2a + c_4a + 1). \quad (46)$$

这样系统稳定的约束条件为

$$b_i > 0 \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

其中

$$b_4 = g = \frac{40}{361}(40a^4 + 20c_2a^3 + 20c_4a^3 - 21a^2 - 10c_2a - 10c_4a - 9). \quad (47)$$

根据分岔参数 a 的两个边界值 $a = 0.8$ 和 $a = 0.95$ 可以计算出系统在边界上的两约束条件.

当 $a = 0.8$ 时系统的约束条件为

$$b_{11} = \frac{123}{95},$$

$$b_{21} = \frac{16}{19}(c_2 + c_4) + \frac{28}{95}, \quad (48)$$

$$b_{31} = \frac{16}{19}(c_2 + c_4) + \frac{20}{19}, \quad (49)$$

$$b_{41} = \frac{448}{1805}(c_2 + c_4) - \frac{6056}{9025}. \quad (50)$$

当 $a = 0.95$ 时系统的约束条件为

$$b_{12} = \frac{351}{190},$$

$$b_{22} = c_2 + c_4 + \frac{161}{190}, \quad (51)$$

$$b_{32} = c_2 + c_4 + \frac{20}{19}, \quad (52)$$

$$b_{42} = \frac{161}{190}(c_2 + c_4) + \frac{18511}{36100}. \quad (53)$$

将 (48)—(53) 式的隐函数曲线绘制到 c_2, c_4 平面上, 如图 12 所示. 使用柱形代数剖分技术可得控制器参数的稳定区域为 Q_s . 当 $a \in [0.8, 0.95]$ 时, 对于系统约束条件 (44)—(46) 始终存在 $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0$ 而且 b_1, b_2, b_3 在这个区间内是关于 a 的单调函数. 另外, (47) 式对 a 求导可得:

$$\begin{aligned} b'_4 &= \frac{db_4}{da} \\ &= 80a^3 + 30c_2a^2 + 30c_4a^2 - 5c_2 - 5c_4 - 21a \\ &= a(80a^2 - 21) + 5(6a^2 - 1)(c_2 + c_4). \end{aligned}$$

结合 (50) 式可知 $c_2 + c_4 > 0$, 所以能够得到在 $a \in [0.8, 0.95]$ 时 $b'_4 > 0$, 即 b_4 关于 a 也是单调的. 因此尽管 a 可能存在变化, 但是在区域 Q_s 内选择 c_2, c_4 能够实现对系统 (42) 的稳定控制.

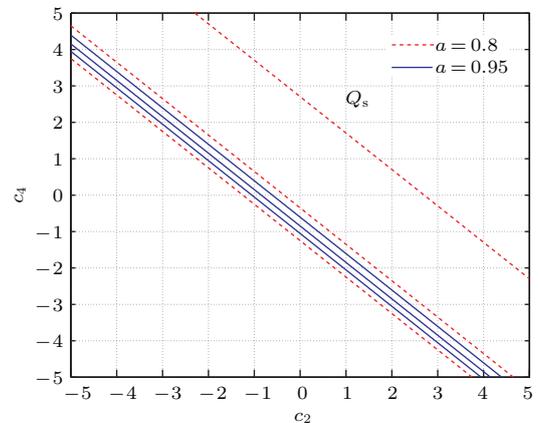


图 12 在 c_2 - c_4 平面上的系统约束条件隐函数曲线
Fig. 12. System constraints curves in c_2 - c_4 plane.

选择文献[21]设计的控制器参数 $k = 0.1$, 系统的外部扰动参数为 $B = [0.3156, -0.1923, -0.4921]^T$, $w = 1$ 时能够实现系统的稳定控制. 本文中设计的控制器(43)选择控制器参数为 $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 10$, $c_3 = 0$, $c_4 = 10$, 仿真结果如图13—图18所示. 这些仿真曲线中曲线1是使用文献[21]中的控制器, 曲线2是本文设计的控制器.

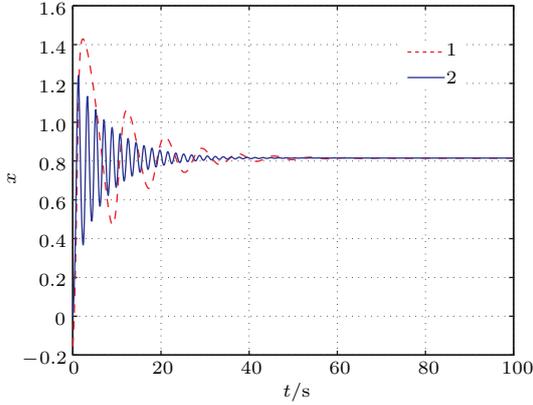


图13 当 $a = 0.8$ 时的系统状态 x 的波动曲线
Fig. 13. The curves of state x when $a = 0.8$.

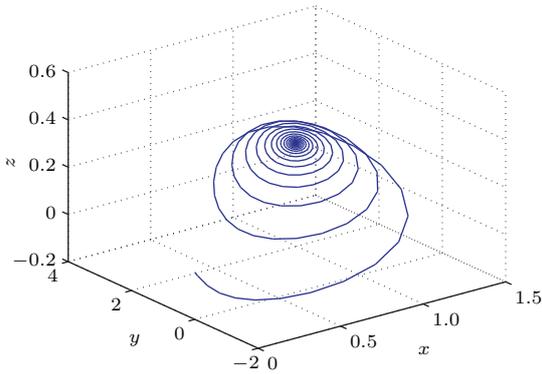


图14 当 $a = 0.8$ 时的系统轨迹曲线
Fig. 14. The system convergence trajectory when $a = 0.8$.

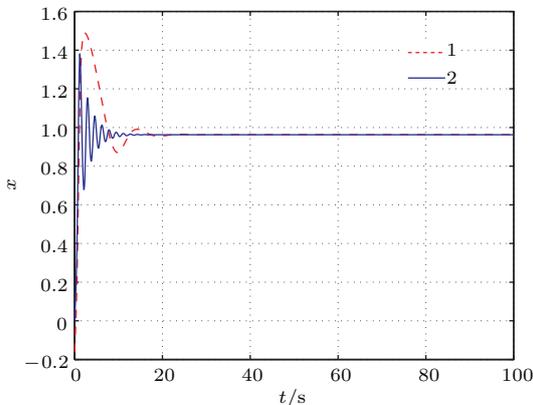


图15 当 $a = 0.95$ 时的系统状态 x 的波动曲线
Fig. 15. The curves of state x when $a = 0.95$.

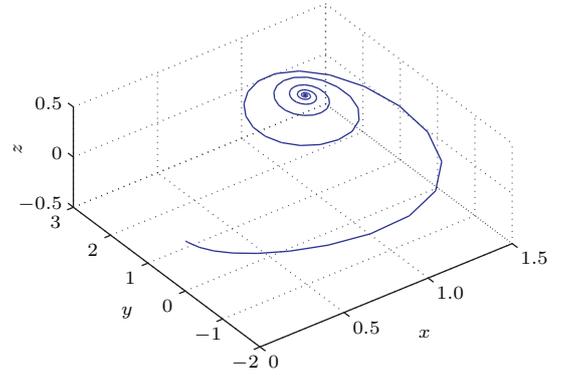


图16 当 $a = 0.95$ 时的系统轨迹曲线
Fig. 16. The system convergence trajectory when $a = 0.95$.

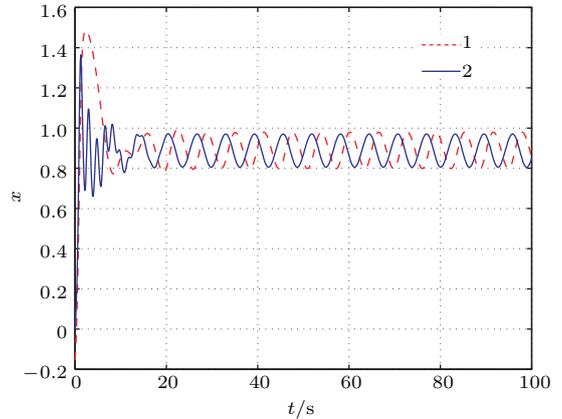


图17 当 $a = 0.875 + 0.75 \sin t$ 时的系统状态 x 的波动曲线
Fig. 17. The curve of state x when $a = 0.875 + 0.75 \sin t$.

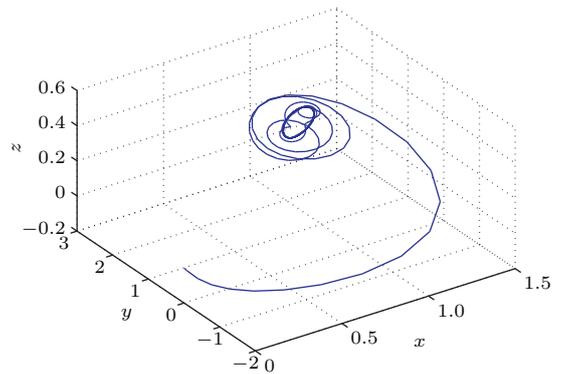


图18 当 $a = 0.875 + 0.75 \sin t$ 时的系统轨迹曲线
Fig. 18. The system convergence trajectory when $a = 0.875 + 0.75 \sin t$.

图13和图14是 $a = 0.8$ 时的仿真结果, 图13是系统的状态 x 的波动曲线, 图14是曲线2对应的系统收敛轨迹. 图15和图16是 $a = 0.95$ 时的仿真结果, 图16是使用本文设计的控制器的系统状态 x 的收敛曲线. 图17和图18是

$a = 0.875 + 0.75 \sin t$ 时的仿真曲线, 图 17 是系统的状态 x 的波动曲线, 图 18 是曲线 2 对应的系统收敛轨迹, 系统轨迹最后收敛到一个小的极限环. 通过图 13, 图 15 和图 17 可以看出, 在本文设计的控制器下, 系统状态收敛的速度更快. 所以使用本文的方法设计的控制器实现了系统鲁棒控制, 且性能优于文献 [21] 设计的控制器.

5 结 论

本文针对一类单分岔参数的多项式形式的 Hopf 分岔系统提出了一种参数化鲁棒稳定控制器设计方法, 并通过 Lorenz 系统和 van der Pol 振荡系统对其进行了说明和验证. 对于非线性系统, 在存在不确定性和外部扰动的前提下求解得到的 Hopf 分岔点的分岔参数是不精确的, 所以本文中并未使用分岔点的参数值, 而是在分岔点附近的一个邻域内对控制器进行设计. 并且该方法不像现有的研究那样针对某个特定系统提出, 而是针对一类多项式形式的 Hopf 分岔系统提出的, 具有通用性. 使用文中方法设计的控制器包含了原系统的状态方程, 所以不会改变原系统平衡点的位置. 在具有 3 个平衡点的 Lorenz 系统和具有 1 个平衡点的 van der Pol 振荡系统上的应用和数值仿真说明了该方法的通用性和有效性.

参考文献

- [1] Wu Z Q, Sun L M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050504 (in Chinese) [吴志强, 孙立明 2011 物理学报 **60** 050504]
- [2] Zhu L H, Zhao H Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 090203 (in Chinese) [朱霖河, 赵洪涌 2014 物理学报 **63** 090203]
- [3] Wang J S, Yuan R X, Gao Z W, Wang D J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 090506
- [4] Pei Y, Chen G R 2004 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **14** 1683
- [5] Nguyen L, Hong K 2012 *Phys. Lett. A* **376** 442
- [6] Wang F Q, Ma X K 2013 *Chin. Phys. B* **22** 120504
- [7] Yfoulis C, Giaouris D, Stergiopoulos F, Ziogou C, Voutetakis S, Papadopoulou S 2015 *Control Eng. Pract.* **35** 67
- [8] Zhao H Y, Xie W 2011 *Nonlinear Dyn.* **63** 345
- [9] Wu Z, Yu P 2006 *IEEE Trans. Automat. Control* **51** 1019
- [10] Mohammadi A, Marvdasht I 2012 *Problems of Cybernetics and Informatics (PCI), 2012 IV International Conference Baku*, September 12–14, 2012 p1
- [11] Kishida M, Braatz R 2014 *American Control Conference (ACC), Portland, OR*, June 4–6, 2014 p5085
- [12] Cao G Y, Hill D J 2010 *IET Gener. Transm. Dis.* **4** 873
- [13] Inoue M, Imura J, Kashima K, Aihara K 2015 *Analysis and Control of Complex Dynamical Systems* **7** 3
- [14] Hu J, Liu L, Ma D W 2014 *J. Korean Phys. Soc.* **65** 2132
- [15] Liang J S, Chen Y S, Leung A Y T 2004 *Appl. Math. Mech.* **25** 263
- [16] Yue M, Schlueter R 2005 *IEEE Trans. Power Syst.* **20** 301
- [17] Chen D W, Gu H B, Liu H 2010 *J. Vib. and Shock* **29** 30 (in Chinese) [陈大伟, 顾宏斌, 刘晖 2010 振动与冲击 **29** 30]
- [18] He C M, Jin L, Chen D G, Geiger R 2007 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **54** 964
- [19] Liu S, Zhao S S, Wang Z L, Li H B 2015 *Chin. Phys. B* **24** 014501
- [20] Li H Y, Che Yan Q, Wang J, Jin Q T, Deng B, Wei X L, Dong F 2012 *The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA) Beijing*, July 6–8, 2012 p4953
- [21] Yang T B, Chen X 2008 *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control(CDC) Cancun*, Mexico, December 9–11, 2008 p4103
- [22] LaValle S M 2006 *Planning Algorithms* (Cambridge: Cambridge University Press) pp280–290
- [23] Gandy S, Kanno M, Anai H, Yokoyama K 2011 *Math. Comput. Sci.* **5** 209
- [24] England M, Bradford R, Chen C, Davenport J H, Maza M M, Wilson D 2014 *Intellig. Comput. Math.* **8543** 45

General robust stability controller design method for a class of Hopf bifurcation systems*

Lu Jin-Bo Hou Xiao-Rong[†] Luo Min

(School of Energy Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

(Received 24 October 2015; revised manuscript received 10 December 2015)

Abstract

For the nonlinear Hopf bifurcation system, the change of bifurcation parameter has an important influence on the state of the system. In order to control the Hopf bifurcations of the nonlinear dynamic system, the parameter values of bifurcation points in the system need to be found out before controller designing. However, due to uncertainties of the system structure and parameters in the nonlinear system, or disturbance, it is difficult to determine the bifurcation point precisely. So it is a good way of designing a robust controller near the bifurcation point. Although, lots of works have discussed the robust control of a Hopf bifurcation in a nonlinear dynamic system, the solutions are not satisfactory and there are still many problems. The controller is always designed for some special system. Its structure is usually complex, not general, and the design process is complicated. And before controller design, the value of bifurcation point must be solved accurately.

In this paper, a parametric robust stability controller design method is proposed for a class of polynomial form Hopf bifurcation systems. Using this method, it is not necessary to solve the exact values of the bifurcation parameter, it is only needed to determine the bifurcation parameter range. The designed controller includes a system state polynomial; its structure is general, simple and keeps the equilibrium of the original system unchanged. By using the Hurwitz criterion, the system stability constraints for bifurcation parameter boundaries are obtained at equilibrium, and they are described by algebraic inequalities. Cylindrical algebraic decomposition is applied to calculate the stability region of the controller parameters. And then, in the region, parameters of the robust controller can be calculated to make the dynamic system stable. In this paper, the Lorenz system without disturbance is used as an example to show the designing process of the method, and then the controller of the van der Pol oscillator system with disturbance is designed by this method as an engineering application. Simulations of the two systems are given to demonstrate that the proposed controller designing method can be effectively applied to the robust stability control of the Hopf bifurcation systems.

Keywords: robust stabilization controller, Hopf bifurcation, parametric, cylindrical algebraic decomposition

PACS: 05.45.-a, 02.30.Oz, 05.45.Pq, 05.45.Gg

DOI: [10.7498/aps.65.060502](https://doi.org/10.7498/aps.65.060502)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61374001).

[†] Corresponding author. E-mail: houxr@uestc.edu.cn