物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

广义Birkhoff系统的两类广义梯度表示

李彦敏 陈向炜 吴惠彬 梅凤翔

Two kinds of generalized gradient representations for generalized Birkhoff system

Li Yan-Min Chen Xiang-Wei Wu Hui-Bin Mei Feng-Xiang

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 080201 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.080201
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.080201
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I8

广义Birkhoff系统的两类广义梯度表示*

李彦敏[1)] 陈向炜[1)†] 吴惠彬[2)] 梅凤翔[3)]

1) (商丘师范学院物理与电气信息学院, 商丘 476000)

2) (北京理工大学数学学院, 北京 100081)

3) (北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

(2015 年 12 月 11 日收到; 2016 年 1 月 6 日收到修改稿)

提出了两类广义梯度系统, 即广义斜梯度系统以及具有对称负定矩阵的广义梯度系统. 分别讨论了这两类梯度系统与动力学系统稳定性的关系. 研究了广义Birkhoff系统的两类广义梯度表示, 分别给出条件和表达式. 给出了广义Birkhoff系统稳定性的梯度判别法, 利用广义梯度系统的性质来研究广义Birkhoff系统的稳定性. 并举例说明了方法的应用.

关键词: 广义Birkhoff系统, 广义梯度系统, Lyapunov函数, 稳定性

PACS: 02.30.Jr, 45.20.Jj, 11.30.–j **DOI:** 10.7498/aps.65.080201

1 引 言

Brikhoff系统是一类重要的基础动力学系统, Brikhoff系统动力学的理论与方法已经被应用于强子物理、量子物理、生物物理学、非线性动力学及工程、相对论和转动相对论系统等领域[1,2]. 动力学方程的梯度性质不但对于揭示动力学系统的内在结构具有重要作用, 而且有助于探索系统的动力学行为, 在热力学、光学、经典与量子场论等诸多领域扮演着重要角色[3,4]. 梯度系统特别适合用Lyapunov函数来研究[3]. 文献[4]指出, 除文献[3]给出的通常梯度系统外, 还有斜梯度系统, 具有对称负定矩阵和具有半负定矩阵系统. 有关约束力学系统的梯度表示研究已有一些结果[5−21]. 但以上研究中梯度系统的矩阵和函数都不含时间t, 这就限制了非定常约束力学系统的梯度表示. 如果梯度系统中的矩阵和函数都包含时间t, 则称为广义梯度系统. 在诸多广义梯度系统中, 有两类对研究系统稳定性特别有用. 一类是广义斜梯度系统, 另一类是具有对称负定矩阵的广义梯度系统. 本文将广义Birkhoff系统在一定条件下化成这两类广义梯度系统, 并利用广义梯度系统的性质来研究这类力学系统的稳定性.

2 两类广义梯度系统

2.1 广义斜梯度系统

广义斜梯度系统的微分方程为

$$\dot{x}_i = b_{ij}(t,\boldsymbol{x})\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2,\cdots,m), \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $b_{ij}(t,\boldsymbol{x})=-b_{ji}(t,\boldsymbol{x})$, 此处及以后相同指标表示求和. 如果$b_{ij}$和$V$都不依赖于$t$, 则(1)式给出文献[4]的斜梯度系统. 按方程(1)求$\dot{V}$, 得

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x_i}b_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j}=\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{2}$$

因此, 如果V可以成为Lyapunov函数, 例如是正定的, 且有$\dfrac{\partial V}{\partial t}<0$, 那么由Lyapunov定理知,

* 国家自然科学基金(批准号: 10932002, 11372169, 11272050)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hnchenxw@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

解是稳定的. 这个重要性质可用来研究可化成广义斜梯度系统的力学系统的稳定性.

2.2 具有对称负定矩阵的广义梯度系统

这类系统的微分方程有形式

$$\dot{x}_i = S_{ij}(t, \boldsymbol{x})\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, m), \tag{3}$$

其中矩阵 $S_{ij}(t,\boldsymbol{x})$ 为对称负定的. 如果 S_{ij} 和 V 都不含 t, 则 (3) 式成为文献 [4] 给出的梯度系统. 按方程 (3) 求 $\dot{V}$, 得

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_i} S_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j}, \tag{4}$$

其中右端第二项小于零. 如果 V 正定, 而 $\dot{V}$ 负定, 则解是渐进稳定的. 这个性质可用来研究化成广义梯度方程 (3) 的力学系统稳定性.

3 广义 Birkhoff 系统的广义梯度表示

广义 Birkhoff 系统的微分方程有形式 [22]

$$\dot{a}^\mu = \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu\right) \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n), \tag{5}$$

其中 $B = B(t, \boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数, $R_\nu = R_\nu(t, \boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数组, $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu(t, \boldsymbol{a})$ 为附加项, 且

$$\begin{aligned}
&\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho,\\
&\Omega_{\nu\rho} = \frac{\partial R_\rho}{\partial a^\nu} - \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\rho},\\
&\det(\Omega_{\nu\rho}) \neq 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

方程 (5) 一般不是广义梯度系统. 对方程 (5), 如果存在反对称矩阵 $(b_{\mu\rho}(t, \boldsymbol{a}))$ 和函数 $V(t, \boldsymbol{a})$ 使得

$$\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu\right) = b_{\mu\rho}\frac{\partial V}{\partial a^\rho} \quad (\mu, \nu, \rho = 1, 2, \cdots, 2n), \tag{7}$$

则它可成为广义斜梯度系统 (1). 如果存在对称负定矩阵 $(S_{\mu\rho}(t, \boldsymbol{a}))$ 和函数 $V(t, \boldsymbol{a})$ 使得

$$\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu\right) = S_{\mu\rho}\frac{\partial V}{\partial a^\rho} \quad (\mu, \nu, \rho = 1, 2, \cdots, 2n), \tag{8}$$

则它可成为广义梯度系统 (3).

广义 Birkhoff 系统化成广义梯度系统 (1) 或 (3) 后, 便可利用广义梯度系统的性质来研究广义 Birkhoff 系统的解的稳定性.

4 应用举例

例 1 广义 Birkhoff 系统为:

$$\begin{aligned}
&R_1 = a^2, \quad R_2 = 0,\\
&B = (a^1)^2\left(1 + \frac{1}{1+t}\right) + (a^2)^2(1+t^2),\\
&\Lambda_1 = -2a^1\left(1 + \frac{1}{1+t}\right)t^2, \quad \Lambda_2 = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

试将其化成广义梯度系统, 并研究零解的稳定性.

解: 方程 (5) 给出

$$\begin{aligned}
&\dot{a}^1 = 2a^2(1+t^2),\\
&\dot{a}^2 = -2a^1\left(1 + \frac{1}{1+t}\right)(1+t^2).
\end{aligned}$$

可写成如下形式:

$$\begin{pmatrix}\dot{a}^1\\ \dot{a}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & (1+t^2)\\ -(1+t^2) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial a^1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial a^2}\end{pmatrix},$$

其中矩阵是反对称的, 而函数 V 为

$$V = (a^1)^2\left(1 + \frac{1}{1+t}\right) + (a^2)^2.$$

这是一个广义斜梯度系统 (1). V 在 $a^1 = a^2 = 0$ 的邻域内正定, 且有

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{(a^1)^2}{(1+t)^2} < 0.$$

因此, 零解 $a^1 = a^2 = 0$ 是稳定的.

例 2 广义 Birkhoff 系统为:

$$\begin{aligned}
R_1 &= a^2(1+t), \quad R_2 = 0,\\
B &= -(a^1)^2[1+\exp(-t)]\\
&\quad - 2a^1a^2(1+t)[1+\exp(-t)] + (a^2)^2,\\
\Lambda_1 &= a^2 - 2a^2(1+t)[1+\exp(-t)] - 2a^2(1+t)^2,\\
\Lambda_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

试将其化成广义梯度系统, 并研究零解的稳定性.

解: 方程 (5) 给出

$$\begin{aligned}
&\dot{a}^1 = -2a^1[1+\exp(-t)] + \frac{2a^2}{1+t},\\
&\dot{a}^2 = \frac{2a^1}{1+t}[1+\exp(-t)] - 2a^2(1+t).
\end{aligned}$$

可写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{a}^1 \\ \dot{a}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{1+t} \\ \dfrac{1}{1+t} & -(1+t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial a^1} \\ \dfrac{\partial V}{\partial a^2} \end{pmatrix},$$

其中矩阵是对称负定的, 而函数 V 为

$$V = (a^1)^2[1+\exp(-t)] + (a^2)^2.$$

这是一个广义梯度系统 (3). V 在 $a^1 = a^2 = 0$ 的邻域内正定, 按方程求 $\dot{V}$, 得

$$\begin{aligned}\dot{V} = &-(a^1)^2\{4[1+\exp(-t)]^2 + \exp(-t)\}\\ &-4(a^2)^2(1+t),\end{aligned}$$

它是负定的, 因此, 零解 $a^1 = a^2 = 0$ 是渐进稳定的.

例 3 广义 Birkhoff 系统为:

$$\begin{aligned}&R_1 = a^2, \quad R_2 = 0, \quad B = -2a^1a^2(2+\sin t),\\ &\Lambda_1 = -2a^2(3+t+\sin t) - (a^2)^2(1+t),\\ &\Lambda_2 = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

试将其化成广义梯度系统, 并研究零解的稳定性.

解: 方程 (5) 给出

$$\begin{aligned}\dot{a}^1 &= -2a^1(2+\sin t),\\ \dot{a}^2 &= -[2a^2 + (a^2)^2](1+t).\end{aligned}$$

可写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{a}^1 \\ \dot{a}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -(1+t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial a^1} \\ \dfrac{\partial V}{\partial a^2} \end{pmatrix},$$

其中矩阵为对称负定的. 而函数 V 为

$$V = (a^1)^2(2+\sin t) + (a^2)^2 + \frac{1}{3}(a^2)^3.$$

这是一个广义梯度系统 (3). V 在 $a^1 = a^2 = 0$ 的邻域内正定. 按方程求 $\dot{V}$, 得

$$\begin{aligned}\dot{V} = &-(a_1)^2[4(2+\sin t)^2 - \cos t] - 4(a^2)^2(1+t)\\ &-[4(a^2)^2 + (a^2)^4](1+t),\end{aligned}$$

它是负定的. 因此, 零解 $a^1 = a^2 = 0$ 是渐进稳定的.

5 结 论

非定常力学系统的稳定性问题是一重要而又困难的问题. 从微分方程出发直接构成 Lyapunov 函数往往不易实现. 本文研究了广义 Birkhoff 系统的广义梯度表示. 广义 Birkhoff 系统是一类相当广泛的约束力学系统, 它的梯度表示较其他力学系统要容易一些. 力学系统一旦表示为广义梯度系统, 便可利用广义梯度性质来研究力学系统的稳定性. 系统化成广义斜梯度系统 (1), 便于研究稳定性; 系统化成广义梯度系统 (3), 便于研究渐进稳定性.

参考文献

[1] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics I* (New York: Springer) pp182–191

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics II* (New York: Springer) pp253–267

[3] Hirsch M W, Smale S 1974 *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* (New York: Academic Press) pp199–203

[4] Mc Lachlan R I, Quispel G R W, Robidoux N 1999 *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **357** 1021

[5] Mei F X, Wu H B 2012 *J. Dynam. Control* **10** 289 (in Chinese) [梅凤翔, 吴惠彬 2012 动力学与控制学报 **10** 289]

[6] Lou Z M, Mei F X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 024502 (in Chinese) [楼智美, 梅凤翔 2012 物理学报 **61** 024502]

[7] Hirsch M W, Smale S, Devaney R L 2008 *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* (Singapore: Elsevier) pp203–206

[8] Mei F X, Cui J C, Wu H B 2012 *Trans. Beijing Inst. Tech.* **32** 1298 (in Chinese) [梅凤翔, 崔金超, 吴惠彬 2012 北京理工大学学报 **32** 1298]

[9] Tomáš B, Ralph C, Eva F 2012 *Monatsh Math.* **166** 57

[10] Mei F X, Wu H B 2013 *Sci. Sin.: Phys. Mech. Astron.* **43** 538 (in Chinese) [梅凤翔, 吴惠彬 2013 中国科学: 物理学 力学 天文学 **43** 538]

[11] Chen X W, Zhao G L, Mei F X 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 579

[12] Mei F X 2013 *Analytical Mechanics II* (Beijing: Beijing Inst. Tech. Press) pp564–581 (in Chinese) [梅凤翔 2013 分析力学 II(北京: 北京理工大学出版社) 第 564—581 页]

[13] Marin A M, Ortiz R D, Rodriguez J A 2013 *International Mathematical Forum* **8** 803

[14] Mei F X, Wu H B 2015 *J. Dynam. Control* **13** 329 (in Chinese) [梅凤翔, 吴惠彬 2015 动力学与控制学报 **13** 329]

[15] Yin X W, Li D S 2015 *Acta Mathematica Scientia* **35A** 464 (in Chinese) [尹逊武, 李德生 2015 数学物理学报 **35A** 464]

[16] Mei F X, Wu H B 2015 *Chin. Phys. B* **24** 104502

[17] Wu H B, Mei F X 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 234501 (in Chinese) [吴惠彬, 梅凤翔 2015 物理学报 **64** 234501]

[18] Zhang Y 2015 *J. Suzhou Univ. Sci. Tech.* (*Natural Science*) **32** 1 (in Chinese) [张毅 2015 苏州科技学院学报 (自然科学版) **32** 1]

[19] Mei F X, Wu H B 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 184501 (in Chinese) [梅凤翔, 吴惠彬 2015 物理学报 **64** 184501]

[20] Li L, Luo S K 2013 *Acta Mechanica* **224** 1757

[21] Luo S K, He J M, Xu Y L 2016 *Inter. J. Non-Linear Mech.* **78** 105

[22] Mei F X 2013 *Dynamics of Generalized Birkhoff Systems* (Beijing: Science Press) pp31–36 (in Chinese) [梅凤翔 2013 广义 Birkhoff 系统动力学 (北京: 科学出版社) 第 31—36 页]

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 65, No. 8 (2016) 080201

Two kinds of generalized gradient representations for generalized Birkhoff system*

Li Yan-Min[1)] Chen Xiang-Wei[1)†] Wu Hui-Bin[2)] Mei Feng-Xiang[3)]

1) (*Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Normal University, Shangqiu 476000, China*)

2) (*School of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

3) (*School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

(Received 11 December 2015; revised manuscript received 6 January 2016)

Abstract

Brikhoff system is a kind of basic dynamical system. The theory and method of Brikhoff system dynamics have been applied to the hadron physics, quantum physics, relativity and rotational relativistic system. The properties of gradient system not only play an important role in revealing the internal structure of dynamical system, but also help to explore the dynamical behavior of the system. In this paper, two kinds of generalized gradient representations for generalized Birkhoff system are studied. First, two kinds of generalized gradient systems, i. e., the generalized skew gradient system and the generalized gradient system with symmetric negative definite matrix, are proposed and the characteristics of the systems are studied. Second, the relations of stability between these two kinds of gradient system and the dynamical system are discussed. Third, the condition under which a generalized Birkhoff system can be considered as one of the two generalized gradient systems is obtained. Fourth, the gradient discrimination method of stability of the generalized Brikhoff system is given, and the characteristics of the generalized gradient systems can be used to study the stability of the generalized Birkhoff system. Finally, some examples are given to illustrate the application of the result. Therefore, once the mechanical system is expressed as the generalized gradient system, the stability and the asymptotic stability can be conveniently studied by using the properties of generalized gradient system. The difficulty in constructing Lyapunov functions is avoided, and a convenient method of analyzing the stability of mechanical system is provided.

Keywords: generalized Birkhoff system, generalized gradient system, Lyapunov function, stability

PACS: 02.30.Jr, 45.20.Jj, 11.30.–j **DOI:** 10.7498/aps.65.080201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10932002, 11372169, 11272050).

† Corresponding author. E-mail: hnchenxw@163.com