

基于 Huber 的高阶容积卡尔曼跟踪算法

张文杰 王世元 冯亚丽 冯久超

Huber-based high-degree cubature Kalman tracking algorithm

Zhang Wen-Jie Wang Shi-Yuan Feng Ya-Li Feng Jiu-Chao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 088401 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.088401

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.088401>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I8>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

风力发电机自循环蒸发内冷系统稳定性的研究

Static bifurcation analysis of natural circulation inner evaporative cooling system in wind turbine

物理学报.2016, 65(3): 030501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.030501>

基于新曝光冲突性消息的网络舆论逆转研究

Newly exposed conflicting news based network opinion reversal

物理学报.2016, 65(3): 030502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.030502>

基于广义 M 估计的鲁棒容积卡尔曼滤波目标跟踪算法

Robust cubature Kalman filter target tracking algorithm based on generalized M-estimation

物理学报.2015, 64(21): 218401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.218401>

微波低通高阻复合材料构件的设计与性能验证

Design and verification of microwave low frequency band-pass and high frequency band-stop composite structure

物理学报.2015, 64(18): 188401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.188401>

基于石墨烯纳米带的齿形表面等离子激元滤波器的研究

Tooth-shaped plasmonic filter based on graphene nanoribbon

物理学报.2015, 64(10): 108402 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.108402>

基于Huber的高阶容积卡尔曼跟踪算法*

张文杰¹⁾ 王世元^{1)†} 冯亚丽¹⁾ 冯久超²⁾

1)(西南大学电子信息工程学院, 重庆 400715)

2)(华南理工大学电子与信息学院, 广州 510641)

(2015年9月16日收到; 2016年1月5日收到修改稿)

为改善高阶容积卡尔曼滤波算法的滤波精度和鲁棒性, 提出了一种新的基于Huber的高阶容积卡尔曼滤波算法. 在采用统计线性回归模型近似非线性量测模型的基础上, 利用Huber M估计算法实现状态的量测更新. 进一步结合高阶球面-径向容积准则的状态预测模块构成基于Huber的高阶容积卡尔曼跟踪算法. 重点分析了Huber代价函数的调节因子对算法跟踪性能的影响. 通过对纯方位目标跟踪和再入飞行器跟踪两个实例验证了所提算法的跟踪性能优于传统高阶容积卡尔曼滤波算法.

关键词: Huber方法, 容积卡尔曼滤波器, 目标跟踪, 滤波精度

PACS: 84.30.Vn, 05.10.-a, 02.30.Yy, 05.10.Ln

DOI: 10.7498/aps.65.088401

1 引言

目标跟踪是指计算机或其他设备依据一些算法对目标位置和速度的实时预测与估计, 在军事、医疗、交通等方面都有着广泛的应用. 由于目标运动方程的非线性、轨道系数的不定性、多目标和复杂环境等, 使得目标跟踪系统必须根据环境变化做出相应决策.

非线性滤波理论广泛应用于信号处理、目标跟踪及卫星导航等领域中^[1]. 针对非线性系统, 对后验概率密度的估计方法有最优估计和次优估计两种. 最优估计方法, 如粒子滤波器 (particle filter, PF)^[2-4], 对后验概率密度不做假设, 但是由于计算量巨大, 实用价值不大. 在次优估计方法中, 一般将后验概率密度假设为高斯分布. 最具代表性的是扩展卡尔曼滤波器 (extended Kalman filter, EKF)^[3,5]. EKF采用一阶泰勒展式近似非线性函数, 其计算精度只能达到一阶泰勒展式. 但是, 当动力系统的非线性程度较高时, EKF会造成很大

的滤波误差, 甚至可能会出现发散现象. 因此, 需要数值精度更高的非线性卡尔曼滤波器. 一般非线性滤波方法可以统一描述成多维高斯加权非线性函数积分问题, 但是很难获得其闭式解. 因此, 后续的改进方法主要针对如何高效地计算高斯加权的多维非线性函数积分.

多维非线性函数的积分近似方法主要包括非线性函数的近似和概率密度函数的近似两种. 非线性函数的近似主要是利用多项式展开近似非线性函数. 这一类代表滤波器有EKF和差分滤波器 (divided difference filter, DDF)^[3]. 一般对概率密度函数的近似比对任意非线性函数的近似相对容易, 因此非线性卡尔曼滤波器的主要近似方法为对高斯概率密度函数的近似. 这一类代表滤波器有无先导卡尔曼滤波器 (unscented Kalman filter, UKF)^[3,6,7]、容积卡尔曼滤波器 (cubature Kalman filter, CKF)^[8,9]、高斯-厄米特卡尔曼滤波器 (Gauss-Hermite Kalman filter, GHKF)^[3] 和球面单纯形-径向容积卡尔曼滤波器 (spherical simplex-radial cubature Kalman filter,

* 国家自然科学基金 (批准号: 61101232)、重庆市基础与前沿研究计划 (批准号: cstc2014jcyjA40020) 和中央高校基本科研业务费重点项目 (批准号: XDJK2014B001) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wsy@swu.edu.cn

SSRCKF)^[10]. UKF 无须计算雅克比矩阵, 滤波精度高于 EKF. GHKF 是将高斯-埃尔米特求积准则应用在贝叶斯滤波理论中构成的, 因此具有较高的近似精度, 但其计算量会随着状态维度呈指数增长, 易出现维数灾难. CKF 克服了 EKF 在强非线性系统中的局限性, 且能够将笛卡尔坐标下高斯加权的多维非线性函数积分转换为计算某个多维几何体的容积问题, 提高了滤波性能. 然而 CKF 也存在一些缺点, 精度只能达到三阶. 因此, 采用阶数更高的容积准则, 可获得高阶容积卡尔曼滤波算法 (high-degree cubature Kalman filter, HCKF)^[9,11-13].

为了消除量测方程的矛盾, 获得具有一定统计特性的正则解, Huber 提出了 M 估计^[14,15]. 进一步, 针对高斯分布附近存在对称干扰问题又提出了 Huber 方法^[16-20]. Huber 方法是一种以 l_1/l_2 混合范数为代价函数的最优估计方法, 其鲁棒性优于基于 l_2 范数的估计方法. 将 Huber 方法应用于鲁棒滤波器中, 可以提高鲁棒性和滤波精度. 为改善高阶容积卡尔曼滤波算法的精度, 本文将 Huber 方法结合贝叶斯理论应用于高阶容积卡尔曼滤波跟踪算法中^[21,22], 提出了一种基于 Huber 的高阶容积卡尔曼滤波器 (Huber-based high-degree cubature Kalman filter, HHCKF) 跟踪算法. 改变其量测更新的方式, 得到新算法. 该算法相比高阶非线性卡尔曼滤波算法精度明显提高. 通过纯方位目标跟踪和再入飞行器跟踪两个实例, 验证了新算法的优越性.

2 高阶容积卡尔曼滤波器

2.1 非线性高斯滤波方法

考虑如下非线性离散时间动力系统:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1}, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^m$ 分别表示状态向量和量测向量, \mathbb{R}^n 和 \mathbb{R}^m 分别是 n 维和 m 维欧几里得空间; \mathbf{f} 和 \mathbf{h} 为已知的非线性函数; \mathbf{v}_{k-1} 和 \mathbf{w}_k 是均值为零的高斯白噪声, 方差分别为 \mathbf{Q}_{k-1} 和 \mathbf{R}_k .

对于高斯假设下的非线性动力学系统, 基于贝叶斯估计理论和数值积分理论, 可以得到高斯近似

滤波方法. 对于满足高斯分布的积分, 具体积分规则及近似表示如下:

$$I(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{f}(\mathbf{X}_i), \quad (3)$$

其中, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 为非线性函数; $\mathbf{X}_i = \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{\mathbf{P}_x} \xi_i$ 和 w_i 分别为求积分点和相应的权重, $\xi_i = \sqrt{n} \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ 表示第 i 个元素为 1 的单位向量; m 为求积分点数. 因此, 基于数值积分的高斯近似滤波可以总结如下^[8].

1) 时间更新

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{f}(\chi_i), \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i (\mathbf{f}(\chi_i) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{f}(\chi_i) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + \mathbf{Q}_{k-1}, \quad (5)$$

其中, $\chi_i = \mathbf{S} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$, $\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \mathbf{S} \mathbf{S}^T$.

2) 量测更新

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}), \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{zz}^T \mathbf{K}_k^T, \quad (7)$$

其中,

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xz} (\mathbf{P}_{zz} + \mathbf{R}_k)^{-1}, \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{h}(\lambda_i), \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_{xz} = \sum_{i=1}^m w_i (\lambda_i - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{h}(\lambda_i) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T, \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_{zz} = \sum_{i=1}^m w_i (\mathbf{h}(\lambda_i) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})(\mathbf{h}(\lambda_i) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T + \mathbf{R}_k, \quad (11)$$

其中, $\lambda_i = \tilde{\mathbf{S}} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$; $\mathbf{P}_{k|k-1} = \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{S}}^T$.

2.2 三阶容积准则

在 n 维笛卡尔坐标下, 非线性滤波问题可统一描述为^[8,11]

$$I(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (12)$$

令 $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$, 其中, \mathbf{y} 为方向向量, 满足 $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1$, 构成 $U_n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1\}$. 由此可知, $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = r^2$.

则

$$I(\mathbf{f}) = \int_0^\infty \int_{U_n} \mathbf{f}(r\mathbf{y}) r^{n-1} e^{-r^2} d\sigma(\mathbf{y}) dr, \quad (13)$$

其中, $\sigma(\cdot)$ 为球体表面对应的方向矢量 \mathbf{y} 的积分区域, 所以积分可以分解为球面积分和径向积分, 并写成数值积分的形式:

$$S(r) = \int_{U_n} \mathbf{f}(r\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) \approx \sum_{i=1}^{L_s} w_{s,i} \mathbf{f}(r\mathbf{y}_i), \quad (14)$$

$$R(r) = \int_0^\infty S(r) r^{n-1} e^{-r^2} dr \approx \sum_{j=1}^{L_r} w_{r,j} S(r_j). \quad (15)$$

对于球面准则, 考虑 $\mathbf{f}(x) = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$ 的情况, 且 $\sum_{i=1}^n d_i \leq d$. 一般认为, $d \leq 3$ 时为低阶, $d \geq 5$ 时为高阶 [11,12]. 由于求积分点是完全对称的, 故单项式的阶数只需满足 0 和 2 的情况 [8]. 因此得到 n 维单位球面的表面积为 $A_n = 2\Gamma^n(1/2)/\Gamma(n/2) = 2\sqrt{\pi^n}/\Gamma(n/2)$, 所以三阶球面准则 [8,9] 为

$$S_3(r) = \frac{A_n}{2n} \sum_{i=1}^n [\mathbf{f}(r\mathbf{e}_i) + \mathbf{f}(-r\mathbf{e}_i)]. \quad (16)$$

对于径向准则, 利用高斯-拉盖尔公式 [8,11] 计算求积分点及其权重. 则三阶径向准则 [8,9] 为

$$R_3(r) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) S\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right). \quad (17)$$

将 (16) 和 (17) 式分别代入到 (14) 和 (15) 式中, 则 (13) 式的三阶容积准则可表示为

$$\begin{aligned} I(\mathbf{f}) &= \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \int_{U_n} \mathbf{f}(r\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{j=1}^{L_r} \sum_{i=1}^{L_s} w_{r,j} w_{s,i} \mathbf{f}(r_j \mathbf{y}_i) \\ &= \sum_{j=1}^{L_r} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{i=1}^n \frac{A_n}{2n} [\mathbf{f}(r_j \mathbf{e}_i) + \mathbf{f}(-r_j \mathbf{e}_i)] \\ &= \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \frac{A_n}{4n} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{f}\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \mathbf{e}_i\right) + \mathbf{f}\left(-\sqrt{\frac{n}{2}} \mathbf{e}_i\right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi^n}}{2n} \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{f}\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \mathbf{e}_i\right) + \mathbf{f}\left(-\sqrt{\frac{n}{2}} \mathbf{e}_i\right) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数, 定义为

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

以上式为基础, 可将三阶球面-径向容积准则的积分权重扩展到任意高斯分布, 即

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(\sqrt{2\mathbf{P}_x} \mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{f}(\sqrt{n\mathbf{P}_x} \mathbf{e}_i + \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{f}(-\sqrt{n\mathbf{P}_x} \mathbf{e}_i + \bar{\mathbf{x}}) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

由此可知, 三阶球面-径向容积准则所用到的求积分点个数为 $2n$.

2.3 五阶容积准则

采用类似三阶容积准则的推导方法, 五阶球面准则表示为 [8,11]

$$\begin{aligned} S_5(r) &= \frac{A_n}{n(n+2)} \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} [\mathbf{f}(r\mathbf{p}_i^+) + \mathbf{f}(-r\mathbf{p}_i^+) \\ &\quad + \mathbf{f}(r\mathbf{p}_i^-) + \mathbf{f}(-r\mathbf{p}_i^-)] \\ &\quad + \frac{(4-n)A_n}{2n(n+2)} \sum_{i=1}^n [\mathbf{f}(r\mathbf{e}_i) + \mathbf{f}(-r\mathbf{e}_i)], \end{aligned} \quad (20)$$

其中, 求积分点 \mathbf{p}_i^+ 和 \mathbf{p}_i^- 的表达式如下

$$\begin{cases} \mathbf{p}_i^+ = \sqrt{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k), \\ j < k; \quad j, k = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{p}_i^- = \sqrt{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k), \\ j < k; \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (21)$$

对于高阶径向准则, 不适合采用高斯-拉盖尔公式, 这里采用矩匹配方法 [11,12].

令 $S(r) = r^l$, 代入 (15) 式得

$$\int_0^\infty r^l r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+l}{2}\right). \quad (22)$$

那么五阶径向准则 [8,11] 可以写成

$$\begin{aligned} R_5(r) &= \frac{1}{n+2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) S(0) \\ &\quad + \frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(n+2)} S\left(\sqrt{\frac{n}{2}+1}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

类似于三阶容积准则, 由球面准则(20)式和径向准则(23)式可得任意高斯分布下的五阶容积准则

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(\mathbf{x})N(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x) \\ &= \frac{2}{n+2} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \\ &+ \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} \{ \mathbf{f}[\sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{p}_i^+ + \bar{\mathbf{x}}] \\ &+ \mathbf{f}[-\sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{p}_i^+ + \bar{\mathbf{x}}] \\ &+ \mathbf{f}[\sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{p}_i^- + \bar{\mathbf{x}}] \\ &+ \mathbf{f}[-\sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{p}_i^- + \bar{\mathbf{x}}] \\ &+ \frac{(4-n)}{2n(n+2)^2} \sum_{i=1}^n [\mathbf{f}(\sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{e}_i + \bar{\mathbf{x}}) \\ &+ \mathbf{f}(-\sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{e}_i + \bar{\mathbf{x}})]. \end{aligned} \quad (24)$$

因此五阶容积准则中的求积分点为 $2n^2+1$, 其取值为

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \bar{\mathbf{x}}, \\ \xi_{1+i} &= \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{p}_i^+, \\ \xi_{\frac{n(n-1)}{2}+1+i} &= \bar{\mathbf{x}} - \sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{p}_i^+, \\ \xi_{n(n-1)+1+i} &= \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{p}_i^-, \\ \xi_{\frac{3n(n-1)}{2}+1+i} &= \bar{\mathbf{x}} - \sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{p}_i^-, \\ & i = 1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}, \\ \xi_{2n(n-1)+1+j} &= \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{e}_j, \\ \xi_{n(2n-1)+1+j} &= \bar{\mathbf{x}} - \sqrt{(n+2)\mathbf{P}_x} \mathbf{e}_j, \\ & j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

其中, \mathbf{p}_i^+ 和 \mathbf{p}_i^- 的表达式见(21)式. 求积分点的权重为

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2}{n+2}, \quad i=1, \\ \omega_i &= \frac{1}{(n+2)^2}, \quad i=2, \dots, 2n^2-2n+1, \\ \omega_i &= \frac{4-n}{2(n+2)^2}, \\ & i = 2n^2-2n+2, \dots, 2n^2+1. \end{aligned} \right. \quad (26)$$

3 统计线性回归近似的Huber方法

Huber提出的估计方法, 类属广义似然估计. 该方法的核心是使定义的代价函数取得最小值. 将

Huber M估计应用于HCKF, 改变量测更新的方式, 得到一种精度高于HCKF的新的滤波算法.

首先, 定义 k 时刻的状态预测误差

$$\varepsilon_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad (27)$$

其中, \mathbf{x}_k 是状态真实值, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 为状态预测值.

对量测方程线性化近似为

$$\mathbf{z}_k \simeq \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \quad (28)$$

其中, 斜率矩阵定义为 $\mathbf{H}_k = (\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \mathbf{P}_{xz})^T$.

由以上两式, 可以构造如下的非线性回归方程

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ -\varepsilon_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

定义

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{S}_k^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

其中, $\mathbf{S}_k = \text{diag}([\mathbf{R}_k \ \mathbf{P}_{k|k-1}])$.

则(29)式可以改写成

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{M}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k, \quad (31)$$

其中, $\mathbf{M}_k = \mathbf{S}_k^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{H}_k; \mathbf{I}]$, $\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{S}_k^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{w}_k; -\varepsilon_k]$.

定义M估计的Huber代价函数

$$J(\mathbf{x}_k) = \sum_{i=1}^{m+n} \rho(\mathbf{v}_i), \quad (32)$$

其中, \mathbf{v}_i 为残差向量 $\mathbf{v} = \mathbf{M}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k$ 的第 i 个分量. 代价函数 $\rho(\mathbf{v}_i)$ 为

$$\rho(\mathbf{v}_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{v}_i^2, & |\mathbf{v}_i| < \mu, \\ \mu |\mathbf{v}_i| - \frac{1}{2} \mu^2, & |\mathbf{v}_i| \geq \mu, \end{cases} \quad (33)$$

其中, μ 是调节因子, 在本文中, μ 取 1.345. 因为在满足高斯分布条件下, 该取值的估计效率是基于 l_2 范数估计效率的 95% [23].

对于代价函数, 通过对残差向量求偏导的方式求其最小值. 令 $\varphi(\mathbf{v}_i) = \rho'(\mathbf{v}_i)$, 对代价函数求偏导得到

$$\sum_{i=1}^{m+n} \varphi(\mathbf{v}_i) \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{x}_k} = 0, \quad (34)$$

其中,

$$\varphi(\mathbf{v}_i) = \begin{cases} \mathbf{v}_i, & |\mathbf{v}_i| < \mu, \\ \mu \text{sgn}(\mathbf{v}_i), & |\mathbf{v}_i| \geq \mu. \end{cases} \quad (35)$$

定义函数 $\psi(\mathbf{v}_i) = \varphi(\mathbf{v}_i)/\mathbf{v}_i$, 同时定义 $\Psi = \text{diag}[\psi(\mathbf{v}_i)]$. 代入 (34) 式计算得到

$$\mathbf{M}_k^T \Psi (\mathbf{M}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) = 0. \quad (36)$$

上式中对 \mathbf{x}_k 求解, 得到迭代解

$$\mathbf{x}_k^{(j+1)} = (\mathbf{M}_k^T \Psi^{(j)} \mathbf{M}_k)^{-1} \mathbf{M}_k^T \Psi^{(j)} \mathbf{y}_k, \quad (37)$$

其中, j 代表迭代次数. 为简单记, 迭代次数选为 1. 迭代初始值取为 $\mathbf{x}_k^{(0)} = (\mathbf{M}_k^T \mathbf{M}_k)^{-1} \mathbf{M}_k^T \mathbf{y}_k$ [20]. 迭代结束后, 得到估值的方差为

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{M}_k^T \Psi \mathbf{M}_k)^{-1}. \quad (38)$$

4 基于 Huber 的高阶容积卡尔曼滤波算法

将上述的 Huber 方法与高阶容积算法相结合, 在高阶容积卡尔曼滤波算法的框架下, 将 Huber 方法引入到量测更新中, 构成新的高精度高鲁棒性算法, 即 HHCKF 算法. 结合 2.1 小节, 总结如下.

初始化: $\hat{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0]$, $\mathbf{P}_0 = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]$.

时间更新: 时间更新如 2.1 小节中的描述, 类似于传统高阶容积卡尔曼算法, 状态的估计值和协方差分别由 (4) 和 (5) 式计算得到. 其中, 求积分点及其权重见 (25) 和 (26) 式.

量测更新:

- 1) 计算 k 时刻 (下一时刻) 的量测预测值, 如 (9) 式;
- 2) 计算预测互协方差矩阵, 如 (10) 式;
- 3) 构造非线性回归方程, 如 (29), (31) 式;
- 4) 代价函数取得最小值时, 求得状态估计值, 如 (37) 式;
- 5) 最后, 依据方程 (38) 式求得状态误差的协方差矩阵.

由此可知, 基于 Huber 的高阶容积卡尔曼滤波算法具有以下特性:

- 1) HHCKF 将 Huber 方法应用于 HCKF 的量测更新中, 具有 Huber 方法的优点. 在高斯分布假设下, HHCKF 提高了滤波精度, 鲁棒性和稳定性;

- 2) HHCKF 结合了 Huber 方法和基于高阶容积准则的贝叶斯滤波框架, 能够保证算法的可靠性, 在提高滤波精度的同时, HHCKF 会增加一定的计算量.

5 仿真实验

为了验证本文所提的 HHCKF 算法的有效性, 利用 50 次蒙特卡罗计算得到的平方根均方误差 (root mean square error, RMSE) 作为滤波性能的衡量标准. 仿真实例分别是纯方位目标跟踪和再入飞行器跟踪.

5.1 实例 1: 纯方位目标跟踪模型

纯方位目标跟踪是指利用目标本身的有源辐射, 采用机动单站测向机测得目标的方位信息, 实现目标轨迹的实时跟踪, 如位置和速度 [24]. 在本例中, 选取算法 EKF [2], UKF [3,6,7], GHKF [3], CKF3 [8], HCKF [11-13], SSRCKF3 [10] 和 SSRCKF5 [10] 与本文提出的算法相比较.

在二维笛卡尔坐标系下, 状态矢量为 $\mathbf{x}_k = [x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k]^T$, x_k, y_k 和 \dot{x}_k, \dot{y}_k 分别表示跟踪目标在 x, y 方向上的位置和速度. 目标运动的离散方程为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}_{k-1}, \quad (39)$$

其中, \mathbf{q}_{k-1} 是均值为零协方差为 \mathbf{Q}_{k-1} 的高斯白噪声. \mathbf{F}_k 和 \mathbf{Q}_{k-1} 的表达式分别为

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{k-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \Delta t^3 & 0 & \frac{1}{2} \Delta t^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \Delta t^3 & 0 & \frac{1}{2} \Delta t^2 \\ \frac{1}{2} \Delta t^2 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta t^2 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \mathbf{q}, \quad (40)$$

其中, $\Delta t = 0.01$ 为任意的步长, $\mathbf{q} = 0.1$ 为噪声的谱密度.

目标运动的量测方程为

$$\theta_k^i = \arctan \left(\frac{y_k - s_y^i}{x_k - s_x^i} \right) + r_k^i, \quad i = 1, 2, \quad (41)$$

其中, $[s_x^i, s_y^i]$ 是传感器 i 的位置, 本实例中设为 $[s_x^1, s_y^1] = [-1, -0.5]$, $[s_x^2, s_y^2] = [1, 1]$; r_k^i 为高斯噪声, 满足高斯分布 $N(0, 0.05^2)$.

目标的起始状态矢量为 $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 1, 0]^T$, 设置滤波器的初始状态值均为 $\hat{\mathbf{x}}_0 = [0, 0, 0, 0]^T$, 初始协方差矩阵为 $\mathbf{P}_0 = \text{diag}([0.1, 0.1, 10, 10])$. 仿真数据产生时离散时间点 $N = 600$. 本例中, 以位置信息为例定义如下的平方根均方误差:

$$\begin{aligned} \text{RMSE} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [(x_k^i - \hat{x}_k^i)^2 + (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2]}, \end{aligned} \quad (42)$$

其中, x_k^i 和 \hat{x}_k^i 分别表示变量 x_k 在离散时间 k 时刻第 i 次蒙特卡罗的真实值和相应的状态估计值; y_k^i 和 \hat{y}_k^i 分别表示变量 y_k 在离散时间 k 时刻第 i 次蒙特卡罗的真实值和相应的状态估计值; $M = 50$ 表示蒙特卡罗次数.

首先, 讨论调节因子对 HHCKF 跟踪性能的影响. 图 1 显示了不同调节因子下 HHCKF 的平方根均方误差. 由图 1 可知, 当调节因子 μ 取 1.345 时, RMSE 达到最小. 因此在以下的仿真中, 调节因子均设置为 1.345.

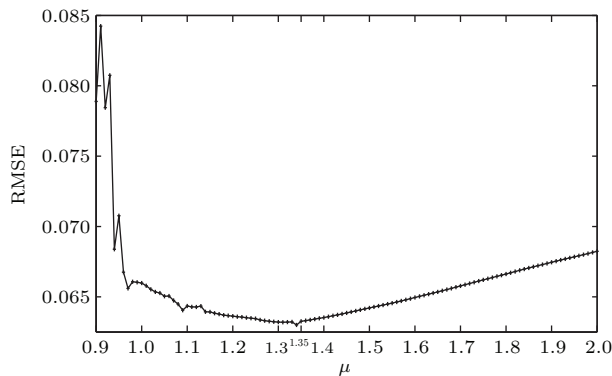


图 1 不同调节因子下 HHCKF 的平方根均方误差
Fig. 1. RMSE of HHCKF under different turning parameters.

其次, 表 1 显示了不同的算法在本例仿真中的平方根均方误差和一次蒙特卡罗仿真消耗计算时间的结果. 由表 1 可以看出, 在纯方位目标跟踪结果中, HHCKF 的跟踪性能优于其他非线性卡尔曼滤波器. 尤其是与其他高阶非线性卡尔曼滤波器 (例如, HCKF 和 SSRCKF5) 相比, HHCKF 能在增加一定计算时间的前提下, 降低目标跟踪的

RMSE. 即 HHCKF 以增加一定计算量为代价, 提高了跟踪精度.

最后, 图 2 显示了 HHCKF 和 HCKF 对目标轨迹的跟踪结果, 由图 2 可以看出 HHCKF 的跟踪轨迹更接近于真实轨迹.

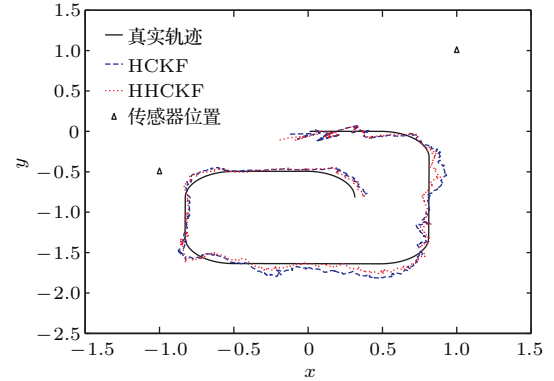


图 2 (网刊彩色) HCKF 和 HHCKF 的轨道跟踪结果
Fig. 2. (color online) Trajectory tracking results based on HCKF and HHCKF.

表 1 基于 50 次蒙特卡罗仿真的目标跟踪性能比较
Table 1. Performance comparison of target tracking over 50 Monte Carlo runs.

| Algorithm | RMSE | Time/s |
|-----------|---------|--------|
| EKF | 0.11959 | 0.0398 |
| UKF | 0.11832 | 0.2789 |
| GHKF | 0.11826 | 0.9359 |
| CKF3 | 0.11827 | 0.2156 |
| HCKF | 0.11821 | 0.3202 |
| SSRCKF3 | 0.11817 | 0.2332 |
| SSRCKF5 | 0.11810 | 0.4506 |
| HHCKF | 0.07981 | 0.3669 |

5.2 实例 2: 再入飞行器跟踪模型

一般地, 因为再入飞行器受复杂环境、目标状态、量测方程的强非线性和未知参数的影响, 使得跟踪误差较大 [25]. 因此对于再入飞行器跟踪, 需采用精度较高的跟踪算法. 为简单记, 本例对新的 HHCKF 方法和 HCKF 进行比较.

再入飞行器主要受到三个方面的影响. 第一, 飞行器进入大气层, 受到空气阻力的作用; 第二, 地球重力的影响; 第三, 随机因素的影响. 状态空间模型包括目标运动位置 (x_1, x_2) 、目标运动速度 (x_3, x_4) 和空气动力系数 (x_5) , 则再入飞行器的状

态向量可表示为 $[\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5]^T$. 目标运动的动态连续状态模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) = D(t)x_3(t) + G(t)x_1(t) + w_1(t), \\ \dot{x}_4(t) = D(t)x_4(t) + G(t)x_2(t) + w_2(t), \\ \dot{x}_5(t) = w_3(t), \end{cases} \quad (43)$$

其中, $w(t) = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^T$ 是过程噪声矢量, 协方差为 $Q_k = \text{diag}([2.4064 \times 10^{-5}, 2.4064 \times 10^{-5}, 10^{-6}])$. $D(t)$ 和 $G(t)$ 分别为阻力相关力和重力相关力, 表示为

$$\begin{cases} D(t) = \beta(t) \exp\left\{\frac{[R_0 - R_t]}{H_0}\right\} V(t), \\ G(t) = -\frac{Gm_0}{R^3(t)}, \end{cases} \quad (44)$$

其中, $R(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$ 是目标和地球球心之间的距离, $V(t) = \sqrt{x_3^2(t) + x_4^2(t)}$ 是目标运动速度; 以上常数变量设为 $\beta_0 = -0.59783$, $H_0 = 13.406$, $Gm_0 = 3.9860 \times 10^5$, $R_0 = 6374$ km.

利用欧几里得方法^[25]对状态模型离散化, 得到

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \Delta t x_3(k), \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta t x_4(k), \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta t(D(k)x_3(k) + G(k)x_1(k) + w_1(k)), \\ x_4(k+1) = x_4(k) + \Delta t(D(k)x_4(k) + G(k)x_2(k) + w_2(k)), \\ x_5(k+1) = x_5(k) + w_3(k), \end{cases} \quad (45)$$

其中, $\Delta t = 0.1$.

雷达量测点位置设为 $(s_x, s_y) = (R_0, 0)$. r_k 和 θ_k 分别为目标在 k 时刻相对量测点的距离和角度, 则量测方程为

$$\begin{cases} r_k = \sqrt{(x_1(k) - s_x)^2 + (x_2(k) - s_y)^2} + q_1(k), \\ \theta_k = \arctan\left(\frac{x_2(k) - s_y}{x_1(k) - s_x}\right) + q_2(k), \end{cases} \quad (46)$$

其中, $q_1(k)$ 和 $q_2(k)$ 是协方差分别为 10^{-3} km² 和 0.17 mrad² 的零均值高斯白噪声.

产生数据的初始值设置为 $m_0 = [6500.4, 349.14, -1.8093, -6.7967, 0.6932]^T$, 初始协方差

$P_0 = \text{diag}([10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 0])$; 滤波器的初始值设置为 $m_0 = [6500.4, 349.14, -1.8093, -6.7967, 0]^T$, 初始协方差 $P_0 = \text{diag}([10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 1])$.

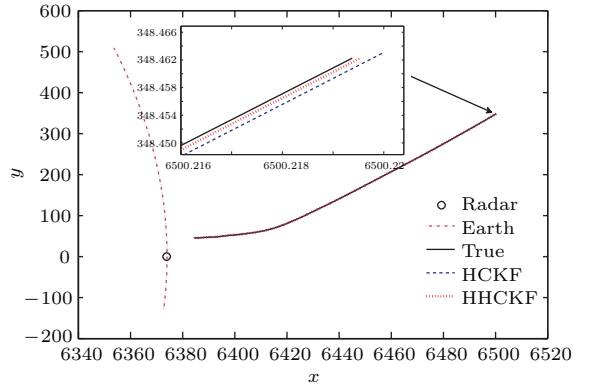


图3 (网刊彩色) HCKF和HHCKF的轨道跟踪结果
Fig. 3. (color online) Trajectory tracking results based on HCKF and HHCKF.

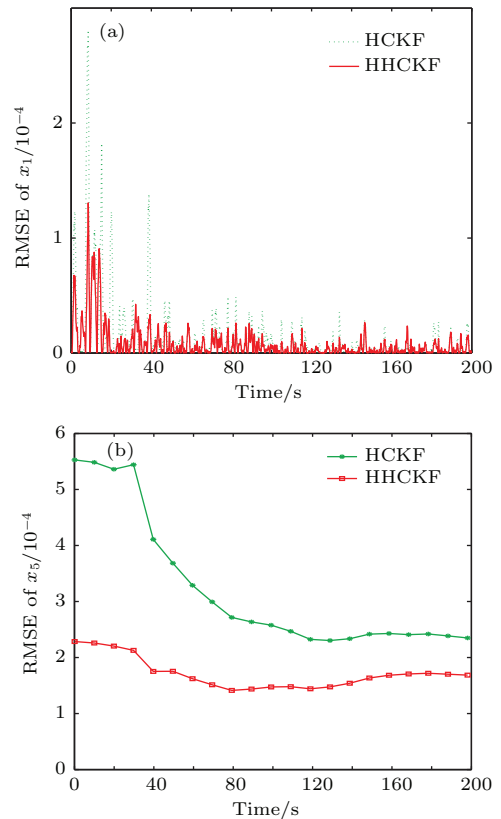


图4 (网刊彩色) x_1 和 x_5 的平方根均方差
Fig. 4. (color online) RMSE of x_1 and x_5 .

图3显示了HHCKF和HCKF的轨迹跟踪结果. 从图3可以看出HHCKF更好地跟踪了真实轨道. 为了定量地分析比较HCKF和HHCKF,

图4给出了 x_1 和 x_5 的平方根均方误差比较结果. 由图4可以看出HHCKF的跟踪精度高于HCKF, 该仿真结果与图3相一致. 因此, 由以上两个跟踪实例可以看出采用Huber方法改进高阶容积卡尔曼算法能够有效地提高跟踪精度.

6 结 论

本文利用Huber方法及高阶容积准则, 改进了HCKF的量测更新方式, 进而提出了一种新的基于Huber的高阶容积卡尔曼跟踪算法. 在增加一定计算复杂度的前提下, 高阶容积准则和统计线性回归模型的结合, 能够进一步提高算法的滤波精度; 同时, HHCKF由于避免了直接求量测协方差, 因此具有一定的鲁棒性. 仿真结果表明, 将HHCKF应用于目标跟踪, 能够较好地实现轨迹跟踪.

参考文献

- [1] Pakki K, Chandra B, Gu D W 2011 *Proc. of the American Control Conference* USA, June 29–July 1, 2011 p3609
- [2] Gustafsson F, Hendeby G 2012 *IEEE Trans. Signal Process.* **60** 545
- [3] Arasaratnam I, Haykin S, Elliott R J 2007 *IEEE Proc.* **95** 953
- [4] Sheng Z, Chen J Q, Xu R H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 069301 (in Chinese) [盛峥, 陈加清, 徐如海 2012 物理学报 **61** 069301]
- [5] Leung H, Zhu Z, Ding Z 2000 *IEEE Trans. Signal Process.* **48** 1807
- [6] Julier S Y, Uhlmann J K 2004 *IEEE Proc.* **92** 401
- [7] Hu G G, Gao S S, Zhong Y M, Gao B B 2015 *Chin. Phys. B* **24** 070202
- [8] Arasaratnam I, Haykin S 2009 *IEEE Trans. Autom. Control* **54** 1254
- [9] Zhang X C, Guo C J 2013 *Chin. Phys. B* **22** 128401
- [10] Wang S Y, Feng J C, Tse C K 2014 *IEEE Signal Process. Lett.* **21** 43
- [11] Jia B, Xin M, Cheng Y 2013 *Automatica* **49** 510
- [12] Zhang X C, Teng Y L 2015 *Asian J. Control* **17** 1
- [13] Zhang X C 2014 *Circ. Syst. Signal Process.* **65** 469
- [14] Huber P J 1964 *Ann. Math. Stat.* **35** 73
- [15] Huber P J, Ronchetti E M 2009 *Robust Statistics* (Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.)
- [16] Petrus P 1999 *IEEE Trans. Signal Process.* **47** 1129
- [17] Chang L, Hu B, Chang G, Li A 2012 *IET Sci. Measur. Technol.* **6** 502
- [18] Karlgaard C D, Schaub H 2007 *J. Guidance, Control, Dyn.* **30** 885
- [19] Wang X G, Cui N G, Guo J 2010 *IET Radar, Sonar & Navigation* **4** 134
- [20] Chang G B, Xu J N, Chang L B 2011 *J. Nanjing Univ. Aeronaut. Astron.* **43** 754 (in Chinese) [常国宾, 许江宁, 常路宾 2011 南京航空航天大学学报 **43** 754]
- [21] Zhang Q, Qiao Y K, Kong X Y, Si X S 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 110505 (in Chinese) [张琪, 乔玉坤, 孔祥玉, 司小胜 2014 物理学报 **63** 110505]
- [22] Lu Z Y, Wang D M, Wang J H, Wang Y 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 150502 (in Chinese) [逯志宇, 王大鸣, 王建辉, 王跃 2015 物理学报 **64** 150502]
- [23] Karlgaard C D, Schaub H 2006 *American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA Paper* 2006
- [24] Duník J, Straka O, Šimandl M 2013 *IEEE Trans. Autom. Cont.* **58** 1561
- [25] Bar-Shalom Y, Li X R, Kirubarajan T 2002 *Estimation with Applications to Tracking and Navigation* (New York: Wiley Inter Science Press)

Huber-based high-degree cubature Kalman tracking algorithm*

Zhang Wen-Jie¹⁾ Wang Shi-Yuan^{1)†} Feng Ya-Li¹⁾ Feng Jiu-Chao²⁾

1) (School of Electronic and Information Engineering, Southwest University, Chongqing 400715, China)

2) (School of Electronic and Information Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

(Received 16 September 2015; revised manuscript received 5 January 2016)

Abstract

In recent decades, nonlinear Kalman filtering based on Bayesian theory has been intensively studied to solve the problem of state estimation in nonlinear dynamical system. Under the Gaussian assumption, Bayesian filtering can provide a unified recursive solution to the estimation problem that is described as the calculation of Gaussian weighted integrals. However it is typically intractable to directly calculate these integrals. The numerical integration methods are required from a practical perspective. Therefore, nonlinear Kalman filters are generated by different numerical integrations. As a representative of nonlinear Kalman filter, cubature Kalman filter (CKF) utilizes a numerical rule based on the third-degree spherical-radial cubature rule to obtain better numerical stability, which is widely used in many fields, e.g., positioning, attitude estimation, and communication. Target tracking can be generalized as the estimations of the target position, the target velocity and other parameters. Hence, nonlinear Kalman filters can also be used to perform target tracking, effectively. Since the CKF based on the third-degree cubature rule has a limited accuracy of estimation, it is necessary to find a CKF based a cubature rule with higher accuracy in the case of target tracking system with a large uncertainty. High-degree cubature Kalman filter is therefore proposed to implement state estimation due to its higher numerical accuracy, which is preferred to solve the estimation problem existing in target tracking. To improve the filtering accuracy and robustness of high-degree cubature Kalman filter, in this paper we present a new filtering algorithm named Huber-based high-degree cubature Kalman filter (HHCKF) algorithm. After approximating nonlinear measurements by using the statistical linear regression model, the measurement update is implemented by the Huber M estimation. As a mixed estimation technique based on the minimum of l_1 -norm and l_2 -norm, the Huber estimator has high robustness and numerical accuracy under the assumption of Gaussian measurement noises. Therefore, the Huber-based high-degree cubature Kalman tracking algorithm is generated by combining the state prediction based on the fifth-degree spherical radial rule. In this paper, the influence of tuning parameter on the tracking performance is discussed by simulations. Simulations in the context of bearings only tracking and reentry vehicle tracking demonstrate that the new HHCKF can improve the tracking performance significantly.

Keywords: Huber method, cubature Kalman filter, target tracking, filter accuracy

PACS: 84.30.Vn, 05.10.-a, 02.30.Yy, 05.10.Ln

DOI: 10.7498/aps.65.088401

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61101232), the Fundamental and Frontier Research Project of Chongqing, China (Grant No. cstc2014jcyjA40020), and the Fundamental Research Funds for Central Universities, China (Grant No. XDJK2014B001).

† Corresponding author. E-mail: wsy@swu.edu.cn