

多平衡态下簇发振荡产生机理及吸引子结构分析

邢雅清 陈小可 张正娣 毕勤胜

Mechanism of bursting oscillations with multiple equilibrium states and the analysis of the structures of the attractors

Xing Ya-Qing Chen Xiao-Ke Zhang Zheng-Di Bi Qin-Sheng

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 65, 090501 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.090501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.090501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphys.ac.cn/CN/Y2016/V65/I9>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

类 Liu 系统在水声微弱信号检测中的应用研究

[Application of similar Liu system in underwater weak signal detection](#)

物理学报.2016, 65(7): 070501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.070501>

一种基于非完整二维相空间分量置换的混沌检测方法

[A chaotic signal detection method based on the component permutation of the incomplete two-dimensional phase-space](#)

物理学报.2016, 65(7): 070502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.070502>

一类 Hopf 分岔系统的通用鲁棒稳定控制器设计方法

[General robust stability controller design method for a class of hopf bifurcation systems](#)

物理学报.2016, 65(6): 060502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.060502>

基于压缩感知的动态散射成像

[Imaging through dynamic scattering media with compressed sensing](#)

物理学报.2016, 65(4): 040501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.040501>

一种基于相邻数据依赖性的混沌分析方法

[A chaotic analyzing method based on the dependence of neighbor sub-sequences in the data series](#)

物理学报.2016, 65(3): 030503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.030503>

多平衡态下簇发振荡产生机理及吸引子结构分析*

邢雅清 陈小可 张正娣 毕勤胜†

(江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)

(2015年11月23日收到; 2016年1月25日收到修改稿)

以周期激励下受控 Lorenz 模型为例, 考察了多平衡态共存下激励频率与系统固有频率之间存在量级差距也即存在频域上的不同尺度时的耦合效应. 由于激励频率远小于系统的固有频率, 因此将整个激励项视为慢变参数, 分析随慢变参数变化下的各种分岔模式及其相应的分岔行为, 指出在一定条件下, 不同平衡态会产生 Hopf 分岔和 fold 分岔. 根据分岔条件的不同, 给出了两种典型情况下的簇发振荡, 并通过引入转换相图, 揭示了不同簇发的产生机理, 指出多平衡态和多种分岔共存不仅会导致沉寂态和激发态的多样性, 而且会使得不同沉寂态和激发态之间存在着不同的转换形式.

关键词: 不同尺度耦合, 多平衡态, 簇发振荡, 分岔机理

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.65.090501

1 引言

不同尺度耦合系统具有广泛的工程背景, 这些不同尺度可以是时间上的快慢, 如在催化反应中存在着不同量级的反应速率^[1], 也可以是空间或结构上的不同尺度, 如航天器中太阳能帆板和船体之间的耦合^[2]. 这些不同尺度的耦合, 通常会导致系统产生大幅振荡与微幅振荡耦合的特殊振动模式^[3], 如在催化反应中的多模态耦合振荡^[4], 绳系卫星中的张弛振荡^[5]. 这些特殊的振动行为虽然经常见诸报道, 但是直到诺贝尔奖获得者 Hodgkin 和 Huxley 建立了快慢两时间尺度神经元模型, 成功地再现了神经元簇发放电行为后, 不同时间尺度耦合系统的复杂动力学行为才得到了国内外学者的广泛关注^[6,7]. 然而由于缺乏有效的分析方法, 因为传统的非线性理论不能用来解决不同尺度之间的相互作用, 相关工作依然停留在现象报道和数值仿真上^[8]. 直到 2000 年, Izhikevich^[9] 引入了 Rinzel 的快慢分析法, 才将不同尺度耦合问题提升到机理分析的层次. 快慢分析法的基本思想是首先将快

慢耦合系统分解为快与慢两子系统, 通过考察快子系统的各种平衡态和稳定性及其随慢变量变化的分岔特性, 揭示各种簇发振荡的产生机理^[10]. 对于快慢耦合系统一般呈现出的簇发振荡, 由微幅振荡的沉寂态 (quiescent state) 和大幅振荡的激发态 (spiking) 通过分岔连接组成^[11], 因此, 不仅沉寂态和激发态的形式, 同时两种状态之间的分岔行为均会直接影响到簇发振荡的动力学特性^[12].

近年来, 基于快慢分析法, 国内外学者围绕着快慢耦合系统开展了大量的研究, 但是这些工作大都是针对低维自治系统开展的, 其簇发振荡模式中仅包含单一形式的沉寂态和激发态. 例如, Chumakov 和 Chumakova^[13] 建立了金属催化氧化过程的一快一慢的两维模型, 并分析了其中的簇发振荡; Shilnikov 和 Kolomiets^[14] 总结了两快一慢三维 Hindmarsh-Rose 模型中的各种定性分析方法; Kiss 等^[15] 建立了由于几何结构引起的点化学振子的三快一慢四维模型, 并开展了相关的理论分析.

由于快慢分析法仅对单慢变量问题有效, 目前大部分工作基本上都是针对一维慢子系统和三维以内快子系统的耦合系统开展的, 而低维系统中吸

* 国家自然科学基金 (批准号: 21276115, 11472115, 11472116) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: qbi@mail.ujs.edu.cn

引子相对简单, 因而相关报道中的簇发振荡中仅包含单一形式的沉寂态和激发态, 而它们之间仅由余维一分岔连接^[16]. 同时, 很多工作均是针对着自治系统开展的, 因而耦合系统存在着较为明显的快慢子系统^[17], 而对于诸如存在周期激励等的非自治系统, 不仅其快慢子系统的分离, 同时其相应的簇发振荡的分岔机理也相对复杂^[18]. 因此, 深入探讨非自治系统中多种沉寂态和激发态共存下的簇发振荡及其机理具有一定的科学意义.

本文正是基于这样的背景, 考察由于周期激励导致的不同簇发振荡行为及其机理, 重点探讨多平衡态导致的多种沉寂态和激发态共存现象. 为说明这一问题, 以经典的包含多个平衡点的 Lorenz 系统为例, 通过增加控制项并引入周期激励项, 探讨当周期激励频率与系统固有频率之间存在量级差距时系统的复杂动力学行为及其产生机理.

2 数学模型

针对典型的 Lorenz 系统, 增加控制项及周期激励项如下

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy + w + \alpha u, \\ \dot{u} = (1 - u^2)u + \alpha\gamma z, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $w = A \sin(\Omega t)$ 为周期激励项, u 为反馈控制项.

当周期激励项及反馈控制项不存在时, 系统约化为典型的 Lorenz 系统. 此时存在平衡点 $E_0(0, 0, 0)$, 其特性由如下相应的特征方程决定:

$$(\lambda + \beta)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda - \sigma(\rho - 1)] = 0, \quad (2)$$

显然当 $\beta > 0$, $\sigma + 1 > 0$, $-\sigma(\rho - 1) > 0$ 时, 平衡点 E_0 稳定. 同时当 $\beta(\rho - 1) > 0$ 时, 另外还存在着两个平衡点, 表示为 $E_{\pm}[\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, (\rho - 1)]$, 其相应的特征方程为

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \rho)\lambda \\ + 2\sigma\beta(\rho - 1) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

因而当 $\sigma + \beta + 1 > 0$, $2\sigma\beta(\rho - 1) > 0$, $\sigma^2 + (\beta - \rho + 3)\sigma + \rho(\beta + 1) > 0$ 时, E_{\pm} 稳定. 例如, 当参数

取定为 $\sigma = 1.0$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28.0$ 时, E_0 为鞍点, 而 E_{\pm} 均为稳定焦点 (见图 1).

然而, 当存在控制项和外激励项时, 系统将出现非常丰富的动力学现象, 尤其是当激励频率 Ω 与系统固有频率之间存在量级差距时, 会导致不同尺度之间的相互作用, 产生簇发振荡行为.

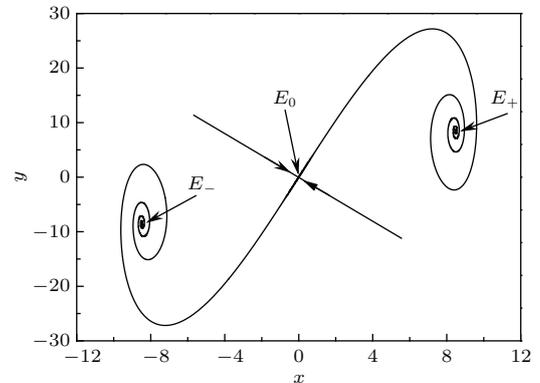


图1 Lorenz 系统的相图 ($\sigma = 1.0$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$)
Fig. 1. Phase portrait of Lorenz system for $\sigma = 1.0$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$.

3 分岔分析

非线性自治系统的固有频率与系统的运动状态密切相关, 因而也会随参数的变化而变化, 例如, 当系统趋于稳定的焦点时, 其固有频率由与该焦点相关的特征值的虚部所决定, 而当系统表现为周期运动时, 其固有频率则由周期运动的频率所决定. 通过计算可知, 当不存在周期激励时, 系统的固有频率 Ω_0 大致在 $O(1.0)$ 量级. 为考察频域上的不同尺度效应, 在此取定 $\Omega = 0.01$, 也即周期激励的频率与系统的固有频率之间存在着量级差距. 显然, 此时系统的状态变量主要按照固有频率振动, 同时又受到周期激励的驱动.

慢变参数 在固有频率的任一周期 $t \in [t_0, t_0 + T_0]$ ($T_0 = 2\pi/\Omega_0$) 内, 周期激励项将在 $W_A = A \sin(\Omega t_0)$ 和 $W_B = A \sin[\Omega(t_0 + T_0)] = A \sin(\Omega t_0 + 2\pi\Omega/\Omega_0)$ 之间变化, 而由于 $0 < \Omega/\Omega_0 \ll 1$, 因此, $W_A \approx W_B$, 也即在任一固有频率的周期内, 外激励项几乎保持不变, 虽然从长时间范围内 w 会在 $-A$ 和 $+A$ 之间变化. 因此, 可以将整个外激励项 w 视为慢变参数.

平衡点 平衡点按照 x 的取值可以分为两类. 一类是位于直线 $x = 0$ 上, 记为 $E_{W0}[0, 0, (U_{W0}^2 - 1)U_{W0}/(\alpha\gamma), U_{W0}]$, 其中 U_{W0} 满足

$$w - \beta U_{W0}^3/(\alpha\gamma) + [\beta/(\alpha\gamma) + \alpha]U_{W0} = 0. \quad (4)$$

另一类则不在直线 $x = 0$ 上, 记为 $E_W\{X_W, X_W, \rho - 1, [\beta(\rho - 1) - X_W^2 - w]/\alpha\}$, 其中 X_W 满足

$$\{1 - [\beta(\rho - 1) - X_W^2 - w]^2/\alpha^2\}[\beta(\rho - 1) - X_W^2 - w]/\alpha + \alpha\gamma(\rho - 1) = 0. \quad (5)$$

其稳定性由相应的特征方程决定, 由于特征方程表达式比较复杂, 在此从略.

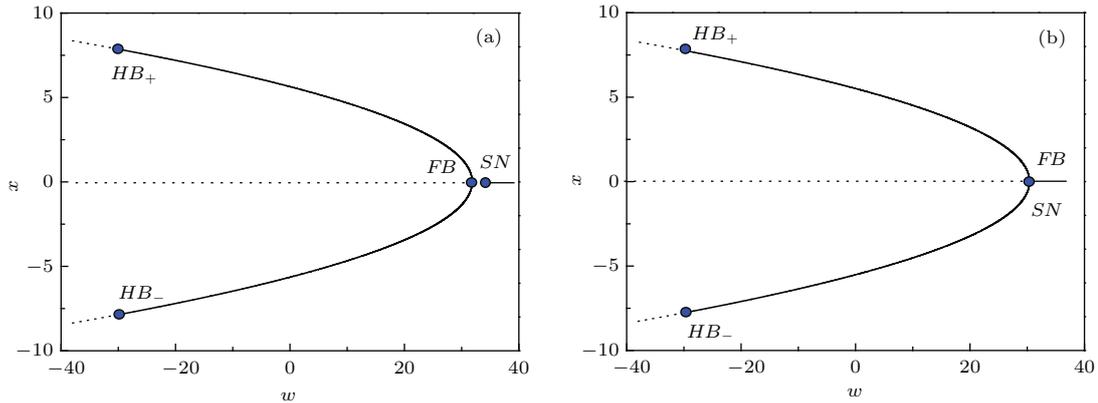


图2 平衡态及分岔图 (a) $\alpha = 0.479$; (b) $\alpha = 0.719$

Fig. 2. The equilibrium orbits and bifurcation portrait: (a) $\alpha = 0.479$; (b) $\alpha = 0.719$.

另外, 随着 α 的增加, 两 Hopf 分岔点的位置会发生变化, 例如, 从 $\alpha = 0.479$ 时的 $HB_{\pm}(-32.536, \pm 7.825)$ 变化到 $\alpha = 0.719$ 时的 $HB_{\pm}(-27.561, \pm 7.519)$, 同时, 上下两支平衡线与直线 $x = 0$ 的交点, 也即 fold 分岔点 FB 与位于直线 $x = 0$ 上的平衡线的鞍结分岔点 SN 越来越接近, 在 $\alpha = 0.719$ 时两分岔点位置几乎相同.

4 簇发振荡

为探讨频域上的不同尺度耦合效应, 取定参数 $A = 38.0, \Omega = 0.01$, 此时系统固有频率与外激励频率间存在量级上的差距. 由于随慢变量 w 变化的分岔行为直接影响到簇发振荡的产生机理, 因此需要给出系统轨迹与慢变量之间的关系, 在此引入转换相图 (transformed phase portraits, TPP) 的概念.

转换相图 相图 (phase portraits, PP) 一般被用来描述随着时间的变化, 不同状态变量之间的相互关系. 对于本文中的数学模型, 传统的相图可以表示为 $PP: \{[x(t), y(t), z(t), u(t)], t \in R\}$, 为

分岔图 为考察慢变量对系统分岔行为的影响, 图 2 给出了当参数取为 $\sigma = 10.0, \beta = 8/3, \rho = 14.5, \gamma = 100.0$ 时, x 随 w 变化的平衡态及其分岔行为, 其中虚线为不稳定解, 实线为稳定解.

从图 2 可以看出, 位于直线 $x = 0$ 上的平衡点, 由鞍结分岔点将其分为稳定和不稳定两部分, 而不位于直线 $x = 0$ 上的稳定的平衡点则由超临界 Hopf 分岔导致失稳, 产生周期振荡.

描述系统轨迹与慢变量 w 之间的关系, 将 w 视为广义状态变量, 称 TPP: $\{[x(t), y(t), z(t), u(t), w(t)], t \in R\}$ 及其在相应的与广义状态变量 w 相关的子空间如 $(x, w), (y, w)$ 等上的投影为转换相图.

4.1 非对称簇发

图 3 给出了 $\alpha = 0.479$ 时的簇发振荡在 (x, z) 平面上的相图和 (w, x) 平面上的转换相图, 此时轨迹在两类平衡曲线 E_{w0} 和 E_{w+} 之间来回跳跃. 数值模拟可以发现, 还存在着另外的与该簇发振荡保持关于 z 轴或 w 轴对称的簇发振荡, 其相应的轨迹围绕平衡曲线 E_{w0} 和 E_{w-} 振荡, 这也可以从原系统的对称性得到证实.

从图 3 (b) 中可以发现, 系统轨迹可以分为两部分, 一部分是从离开平衡曲线 E_{w0} 到逐渐稳定到平衡曲线 E_{w+} , 表现为大幅振荡, 构成激发态 SP, 另一部分是从平衡曲线 E_{w+} 回到平衡曲线 E_{w0} , 几乎没有振荡行为, 构成沉寂态 QS.

为进一步揭示该非对称簇发振荡的机理, 图 4 给出了 (w, x) 平面上的转换相图和其相应平衡曲线图的叠加.

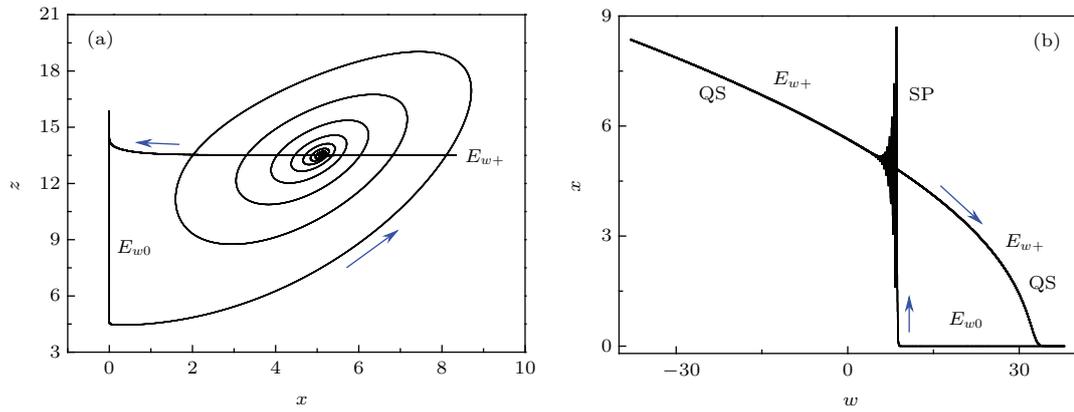


图3 $\alpha = 0.479$ 时的簇发振荡 (a) (x, z) 平面上的相图; (b) (w, x) 平面上的转换相图

Fig. 3. Bursting oscillation for $\alpha = 0.479$: (a) Phase portrait on the (x, z) plane; (b) TPP on the (w, x) plane.

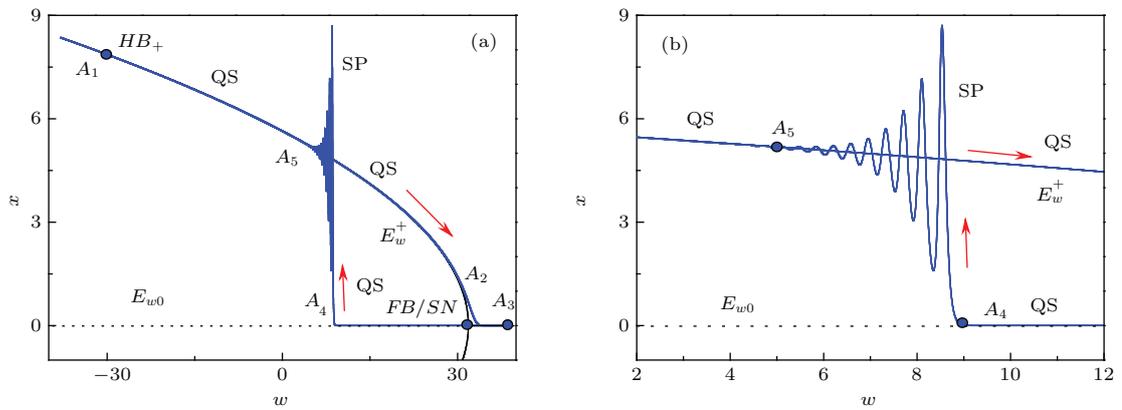


图4 $\alpha = 0.479$ 时 (w, x) 平面上的转换相图和平衡曲线的叠加图

Fig. 4. Overlap of TPP and equilibrium orbits for $\alpha = 0.479$ on the (w, x) plane.

从图4中的转换相图可以给出簇发振荡轨迹的运行特征. 假设轨迹从 A_1 点出发, 对应于 w 取最小值 $w = -38.0$, 当轨迹运行到 HB_+ 时, 由于在该点Hopf分岔的滞后效应, 轨迹没有产生周期振荡, 而是几乎严格按照稳定的平衡曲线 E_w^+ 运动, 形成沉寂态QS, 当轨迹运行到 A_2 点, 对应于与分岔点 FB 相同的 w 值时, 产生fold分岔, 随着 w 的继续增加, 轨迹将从稳定的 E_w^+ 跳跃至稳定的平衡曲线 E_{w0} 上, 直至 A_3 点, 对应于 w 取得其最大值 $w = +38.0$.

随着时间的增加, w 值将逐渐减小, 当轨迹运行到分岔点 FB 时, 同样由于滞后效应, 轨迹几乎严格沿着直道 E_{w0} 运行, 直到 A_4 , 产生fold分岔, 使得轨迹跳跃趋于稳定平衡曲线 E_w^+ . 由于 A_4 与平衡曲线之间存在着较大的距离, 而平衡曲线 E_{w0} 是稳定的焦点, 所以产生大幅振荡, 导致激发态SP. 激发态的振幅逐渐减小, 使得轨迹逐渐稳定于平衡曲线 E_w^+ , 进入沉寂态QS. 当轨迹回到出发点 A_1

时, 完成一个周期的簇发振荡. 由于该簇发振荡是围绕两平衡点来回振荡的, 同时滞后效应非常明显, 因此该簇发称为周期非对称滞后point/point簇发[19].

为讨论激发态的振荡特性, 图5给出了状态变量 x 的时间历程及处于激发态时的局部放大图.

由于激发态是从平衡曲线 E_{w0} 跳跃趋于平衡曲线 E_w^+ , 因此跳跃过程可近似视为以 A_4 点为初值趋于平衡曲线 E_w^+ 的渐进过程. 首先计算 E_w^+ 上与 A_4 点具有相同 w 值的平衡点的特征值分别为 $\lambda_{1,2} = -0.5575 \pm 6.0961I$, $\lambda_3 = -12.434$, $\lambda_4 = -197.423$. 由于 λ_3 和 λ_4 所对应的特征分量会很快收敛到 E_w^+ , 因此从 A_4 到 E_w^+ 的激发态特征主要由 $\lambda_{1,2}$ 决定. 虽然随在平衡曲线 E_w^+ 上平衡点位置的不同, 其相应特征值会发生变化, 但是这变化相对较小, 因此可以由 $\lambda_{1,2}$ 近似给出激发态的振动特性.

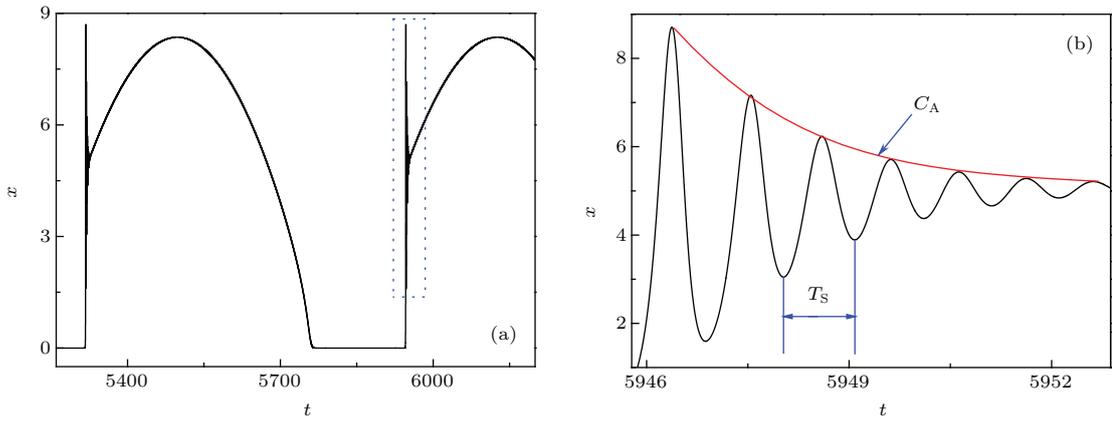


图5 状态变量 x 的时间历程

Fig. 5. Time history of x .

簇发振荡中激发态的振幅特性可以由曲线 $C_A = A_0 \exp[-0.5575(t - t_0)]$ 来描述, 其中 A_0 为 A_4 点与 E_w^+ 之间在 x 方向上的距离, t_0 为轨迹到达 A_4 时的时间. 图5(b)中给出了其随时间 t 的变化曲线, 可以发现其与激发态时的振动符合良好.

激发态的频率特性同样可以通过 $\lambda_{1,2}$ 的虚部近似确定, 也即 $\Omega_{SP} = 6.096$. 从图5(b)中的时间历程可以计算得其振荡的频率为 $\Omega_P = 2\pi/T_S = 6.094$, 与理论结果符合良好.

4.2 对称簇发

随着 α 的增加, 两非对称的簇发振荡会相互作用, 导致对称的簇发振荡, 图6给出了 $\alpha = 0.599$ 时的簇发振荡.

与图3中的簇发振荡的相图相比较, 可以发现, 该吸引子将两个非对称簇发振荡连接在一起, 围绕着三平衡曲线 E_{w0} 和 E_w^\pm 振荡. 与图3中的相图不同, 图6中的激发态的振荡轨迹穿越了平衡曲线

E_{w0} , 由于 E_{w0} 是两吸引子 E_w^\pm 的吸引盆的分界线, 从而导致轨迹在三平衡曲线之间振荡, 产生对称的簇发振荡.

为揭示其簇发机理, 图7给出了在 (w, x) 平面上的转换相图和相应的三条平衡曲线 E_{w0} 和 E_w^\pm 的叠加图.

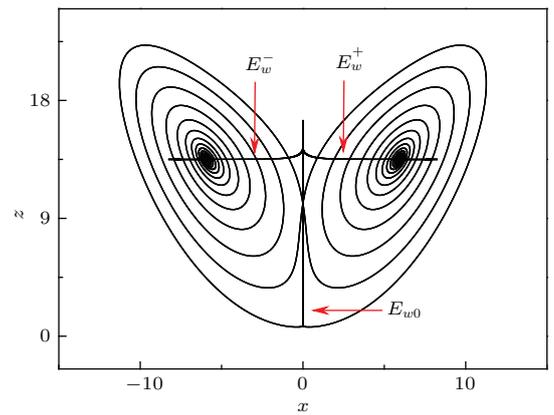


图6 $\alpha = 0.599$ 时 (x, z) 平面上的相图

Fig. 6. Phase portrait for $\alpha = 0.599$ on the (x, z) plane.

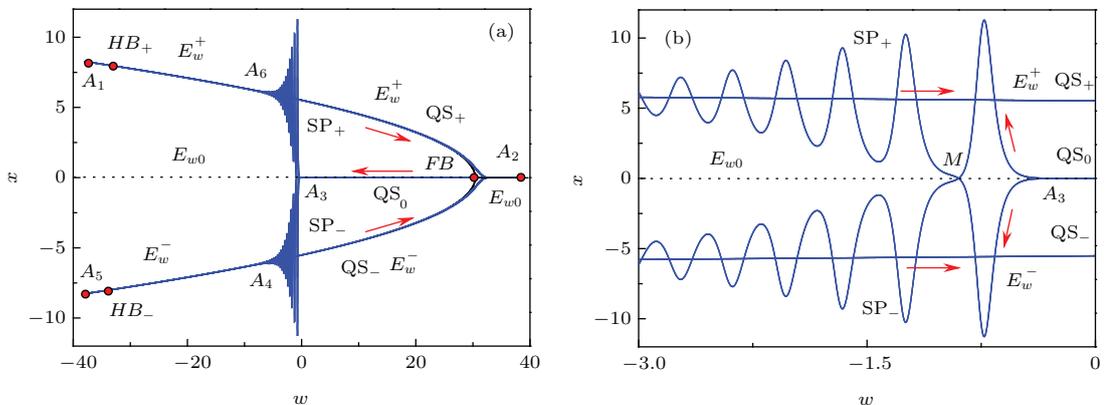


图7 $\alpha = 0.599$ 时 (w, x) 平面上的转换相图和平衡曲线的叠加图

Fig. 7. Overlap of TPP and equilibrium orbits for $\alpha = 0.599$ on the (w, x) plane.

从图7中可以看出,从 A_1 点($w = -38.0$)出发的轨迹,几乎严格按照 E_w^+ 运动,直到 w 增加到分岔点 FB 时的 w 值,轨迹从沉寂态 QS_+ 转向稳定平衡曲线 E_{w0} ,然后几乎严格按照 E_{w0} 运行到 A_2 点($w = +38.0$),此时 w 取得最大值,并随时间增加逐渐减小.轨迹从 A_2 点几乎严格按照 E_{w0} 运动到 A_3 点,由于fold分岔,使得沉寂态 QS_0 转换为激发态 SP_- .通过转换相图的局部放大图7(b)可以看出,从 A_3 点出发的轨迹,虽然在刚开始时向 E_w^+ 振荡,然而,由于振荡幅值较大,导致轨迹穿越平衡曲线 E_{w0} ,从而使得轨迹转向平衡曲线 E_w^- ,并逐渐稳定到 E_w^- 上.然后轨迹几乎严格按照 E_w^- 运行,直到抵达 A_5 点 $w = -38.0$.由于随着时间的增加, w 开始增加,此时轨迹调头并几乎严格按照 E_w^- 运动,直到 FB 点对应的fold分岔产生,使得轨迹从沉寂态 QS_- 转向 QS_0 ,从而沿着 E_{w0} 运动到 A_2 点.当轨迹从 A_2 点调头并沿着 E_{w0} 运行到 A_3 点附近时,fold分岔产生,导致轨迹围绕 E_w^+ 振荡,沉寂态 QS_0 转换为激发态 SP_+ .振荡幅值不断减小,直到轨迹逐渐稳定于 E_w^+ .当轨迹沿 E_w^+ 运动到出发点 A_1 时,完成一个周期的簇发振荡.

备注 随着 α 的增加,轨迹从 E_{w0} 跳跃到 E_w^\pm 的fold分岔点不同,当 $\alpha = 0.479$ 时,由于滞后效应,在 $w = 8.896$ 时,产生fold分岔,使得轨迹从 E_{w0} 转向 E_w^+ .而当 $\alpha = 0.599$ 时,滞后效应更加明显,直到 $w = -0.263$ 时,轨迹才从 E_{w0} 向 E_w^\pm 跳跃,使得在分岔产生时 E_{w0} 和 E_w^\pm 之间的距离明显增加,从而导致围绕平衡曲线 E_w^\pm 振荡的激发态振幅过大,穿越了平衡曲线 E_{w0} ,引起两原非对称簇发演化为一包含原两吸引子特征的对称的簇发振荡.

4.3 超临界Hopf下的对称簇发振荡

在上述两种簇发振荡中,由于超临界Hopf分岔点 HB_\pm 所对应的慢变量 w 的值与外激励幅值一定下 w 所取得的极小值 $w = -38.0$ 之间的距离很近,从而由于滞后效应的存在,导致Hopf分岔没有参与簇发振荡的产生机理.但是,随着 α 的增加,超临界Hopf分岔点 HB_\pm 所对应的慢变量 w 的绝对值逐渐减少,从而导致该值与 $w = -38.0$ 之间的距离变大,使得超临界Hopf分岔行为参与簇发吸引子的结构.图8给出了 $\alpha = 0.719$ 时的簇发振荡相图.

轨迹从位于直线 $x = 0$ 上的 B_1 出发,沿 E_{w0}

向下运动到 B_2 ,然后向左大幅振荡,经 B_3 和 B_4 变化为围绕 E_w^+ 的振荡,从 B_5 沿 E_w^+ 回到 E_{w0} 上,沿 E_{w0} 向上到 B_1 后,沿 E_{w0} 向下到 B_2 点,然后向右大幅振荡,经 B_6 和 B_4 变化为围绕 E_w^- 的振荡.从 B_7 沿 E_w^- 回到 E_{w0} 上,沿 E_{w0} 向上到达 B_1 时,完成一个周期振荡.

从图8(b)中可以发现,此时簇发振荡的激发态非常复杂,包含两种形式,一种是分别向 E_w^\pm 的逐渐稳定暂态过程,另一种就是 B_5 和 B_7 附近的概周期振荡过程.

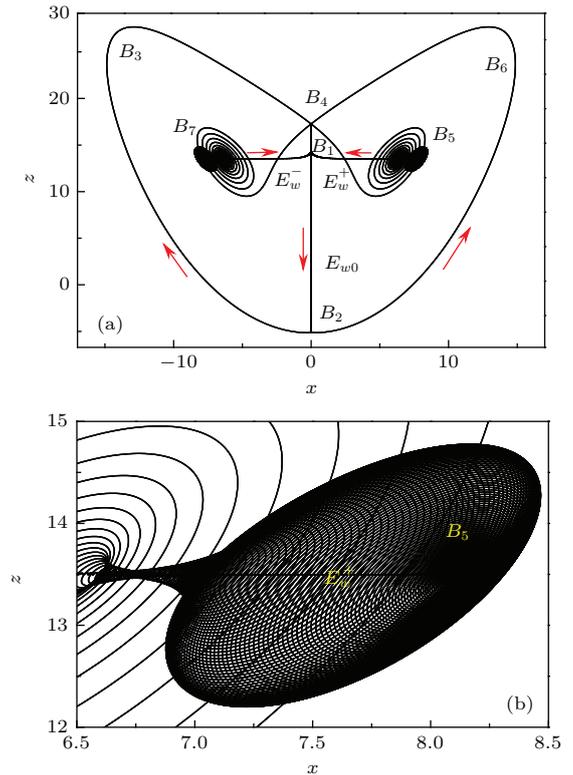


图8 $\alpha = 0.719$ 时 (x, z) 平面上的相图

Fig. 8. Phase portrait for $\alpha = 0.719$ on the (x, z) plane.

图9给出了 $\alpha = 0.719$ 时 x 变化的时间历程及局部放大图,从中可以发现,每个周期内系统的轨迹可以分为10个部分,从其表现形式来看,则可以分别对应于四个沉寂态和四个激发态.

假设系统状态从第一个沉寂态 QS_0 出发,进入第一个激发态 SP_{+1} ,回到第二个沉寂态 QS_{+1} ,进入第二个激发态 SP_{+2} ,再回到第二个沉寂态,该沉寂态由 QS_{+2} 和 QS_0 组成,由于期间虽然存在着fold分岔,但是由于 E_{w0} 和 E_w^\pm 在分岔点处相交,因此不会产生激发态.由于系统的对称性,同样存在着与上述两个沉寂态和两个激发态相对称的振动行为.

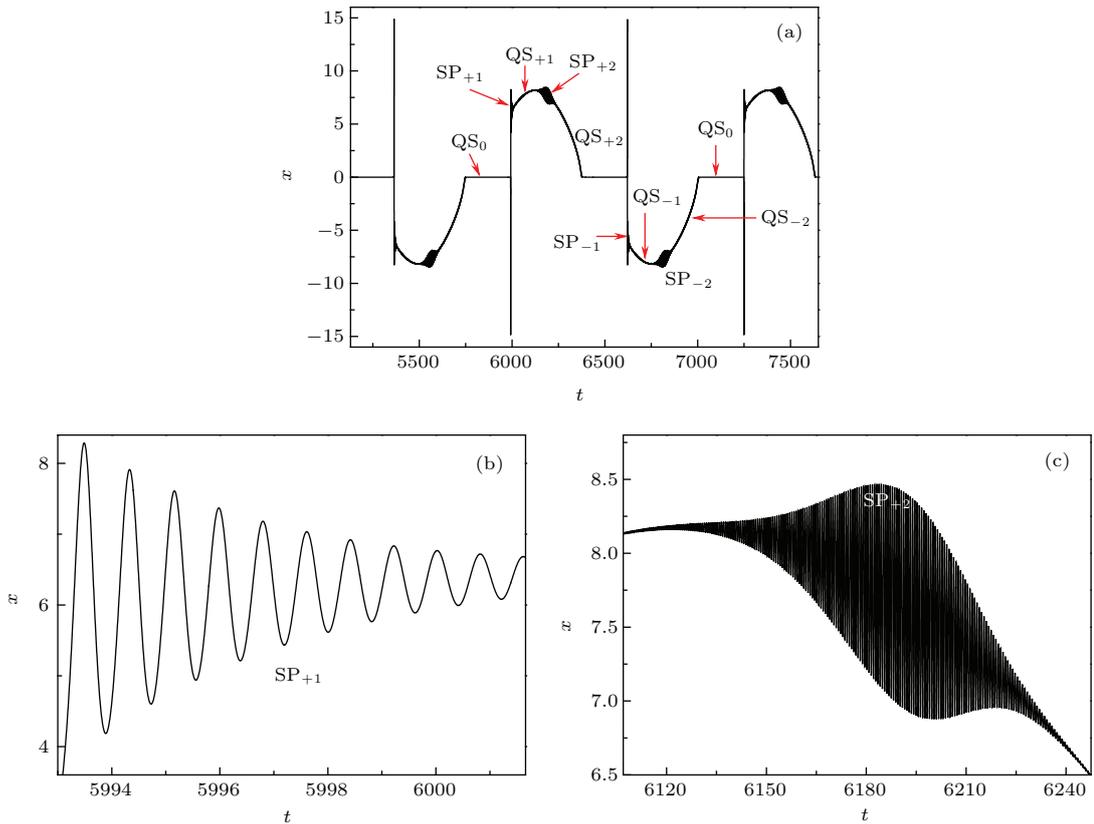


图9 $\alpha = 0.719$ 时 x 的时间历程及局部放大图

Fig. 9. Time history and locally enlarged of it of x for $\alpha = 0.719$.

为进一步揭示簇发振荡的产生机理, 图 10 给出了其相应的转换相图与平衡曲线的叠加图.

从图 10 可以非常清楚地得到其他轨迹的运动过程. 假设轨迹从 B_1 点出发, 对应于 w 取极大值即 $w = +38.0$, 随着时间的增加, w 将逐渐减小, 其轨迹几乎严格按照稳定平衡曲线 E_{w_0} 向左运动 (图 10 (b)), 系统处于沉寂态 QS_0 . 由于滞后效应, 在 FB 处的 fold 分岔在 B_2 点产生 (图 10 (c)). fold 分岔使得轨迹趋于稳定平衡曲线 E_w^+ , 使得系统进入激发态 SP_{-1} . 然而由于激发态振荡幅值较大, 导致轨迹穿越平衡曲线 E_{w_0} , 从而使得系统轨迹趋于稳定平衡曲线 E_w^- . 其振荡幅值逐渐减小, 围绕 E_w^- 进行小幅振荡, 进入沉寂态 QS_{-2} . 由于分岔点 HB_- 处的超临界 Hopf 分岔的产生 (对应于 $w = -28.463$), 导致 QS_{-2} 回到激发态 SP_{-1} . 其振荡幅值随时间的增加越来越大, 直至 $w = -38.0$, 即 w 取得其极小值. 轨迹掉头, 但是其振荡幅值仍在不断增加, 直到分岔点 HB_- 处, 由于 Hopf 分岔的作用, 其轨迹将逐渐趋于稳定的平衡曲线 E_w^- .

当轨迹稳定于平衡曲线 E_w^- 时, 系统进入沉寂态 QS_{-2} , 并几乎严格按照平衡曲线 E_w^- 运动. 当

慢变量值变化到 fold 分岔点 FB 对应的 w 值时, 由 fold 分岔使得轨迹转向稳定的平衡曲线 E_{w_0} , 并几乎严格按照平衡曲线 E_{w_0} 运行. 由于 fold 分岔点几乎位于 E_{w_0} 和 E_w^+ 的交点处, 所以轨迹只是在两相邻的稳定平衡曲线之间跳跃, 不会产生激发态, 系统依然处于沉寂态, 也即此时沉寂态由两部分构成, 即沿平衡曲线 E_w^+ 和沿平衡曲线 E_{w_0} 的运动.

当轨迹沿 E_{w_0} 向右运动到 B_1 点时, 完成了簇发振荡的半个周期, 而剩下的半个周期与上述过程对称, 此处从略.

5 结 论

周期激励系统中的激励频率与系统的固有频率之间存在量级差距, 也即存在频域上的不同尺度时会导致簇发振荡, 同时, 不同平衡态可能存在着不同的分岔形式. 当激励频率远小于系统的固有频率时, 可以将整个激励项视为慢变的分岔参数, 进而得到随慢变参数变化下的不同平衡点的形式及其相应的分岔行为. 不同平衡态及其相应的不同分岔模式不仅会导致沉寂态和激发态的多样性, 也会

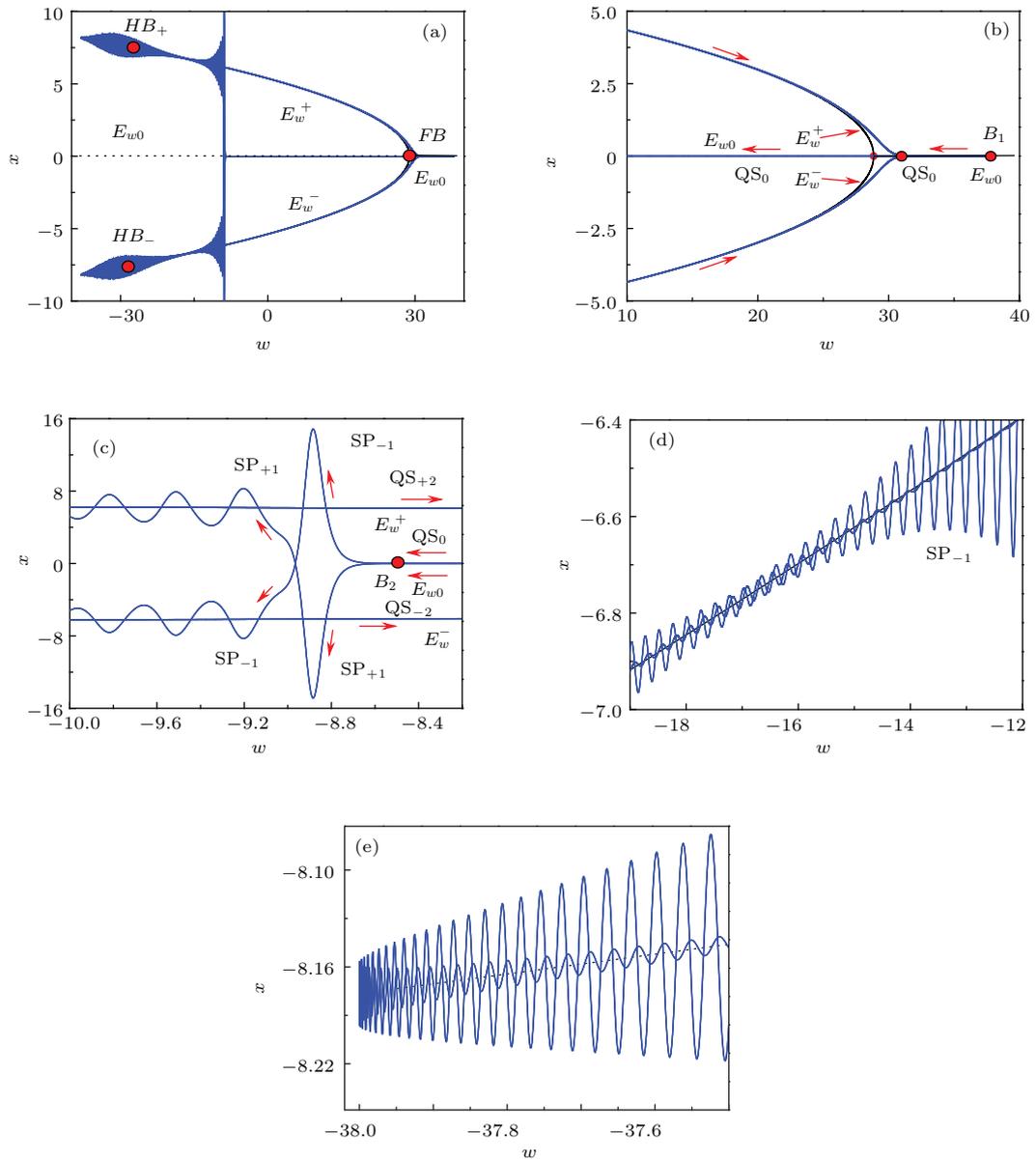


图 10 $\alpha = 0.719$ 时 (w, x) 平面上的转换相图和平衡曲线的叠加图

Fig. 10. Overlap of TPP and equilibrium orbits for $\alpha = 0.719$ on the (w, x) plane.

导致不同的簇发振荡. 同时, 分岔分析是基于慢变参数为分岔参数得到的, 因此, 可以将激励项视为广义状态变量, 通过转换相图描述真实状态变量与广义状态变量之间的关系, 结合分岔分析, 揭示不同簇发振荡的产生机理.

参考文献

[1] Lashina E A, Chumakova N A, Chumakov G A, Boronin A I 2009 *Chem. Eng. J.* **154** 82
 [2] Qin L, Liu F C, Liang L H, Hou T T 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 090502 (in Chinese) [秦利, 刘福才, 梁利环, 侯甜甜 2014 物理学报 **63** 090502]

[3] Li X H, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 020504 (in Chinese) [李向红, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 020504]
 [4] Zhu Y P, Tu S, Luo Z H 2012 *Chem. Eng. Res. Des.* **90** 1361
 [5] Cai Z Q, Li X F, Zhou H 2015 *Aerosp. Sci. Technol.* **42** 384
 [6] Wang H X, Wang Q Y, Lu Q S 2011 *Chaos Soliton. Fract.* **44** 667
 [7] Ferrari F A S, Viana R L, Lopes S R, Stoop R 2015 *Neural Networks* **66** 107
 [8] Huang X G, Xu J X, He D H, Xia J L, Lü Z J 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1810 (in Chinese) [黄显高, 徐健学, 何岱海, 夏军利, 吕泽均 1999 物理学报 **48** 1810]
 [9] Izhikevich E M 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 1171
 [10] Ma J, Jin W Y, Song X L 2015 *Chin. Phys. B* **24** 0128710
 [11] Bi Q S, Li X H 2013 *Chin. Phys. B* **22** 040504

- [12] Zhang Y, Bi Q S 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010504
- [13] Chumakov G A, Chumakova N A 2003 *Chem. Engineer. J.* **91** 151
- [14] Shilnikov A, Kolomiets M 2008 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **18** 2141
- [15] Kiss I Z, Pelster L N, Wickramasinghe M, Yablonsky G S 2009 *Phys. Chem.* **11** 5720
- [16] Kingni S T, Nana B, Mbouna Ngueteu G S, Wofo P, Danckaert J 2014 *Chaos Soliton. Fract.* **71** 29
- [17] Yang Z Q, Lu Q S 2006 *Chin. Phys. B* **15** 0514
- [18] Yu H T, Wang J, Deng B, Wei X L 2013 *Chin. Phys. B* **22** 018701
- [19] Izhikevich E M, Desai N S, Walcott E C, Hoppensteadt F C 2003 *Trends Neurosci.* **26** 161

Mechanism of bursting oscillations with multiple equilibrium states and the analysis of the structures of the attractors*

Xing Ya-Qing Chen Xiao-Ke Zhang Zheng-Di Bi Qin-Sheng[†]

(School of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 23 November 2015; revised manuscript received 25 January 2016)

Abstract

The main purpose of this article is to explore the bursting behaviors as well as the mechanism when multiple equilibrium states evolve into the bursting attractors. Taking the controlled Lorenz model with periodic excitation for example, the coupling effect of different scales in frequency domain corresponding to the case that an order gap exists between the exciting frequency and the natural frequency of the system with multiple equilibrium states is investigated. Unlike the autonomous slow-fast coupling system, neither obvious slow nor fast subsystems can be observed in a periodically excited system. Since the exciting frequency is far less than the natural frequency of the system, the whole exciting term can be considered as a slow-varying parameter, leading to the generalized autonomous system. With the variation of the slowly-varying parameter, the bifurcation forms as well as the behaviors for different equilibrium states in the generalized autonomous system are explored. It is pointed out that for certain conditions, Hopf bifurcation and fold bifurcations related to different equilibrium points can be observed. According to the conditions related to different bifurcations, the bursting oscillations in two typical cases are presented. In order to explore the mechanism of bursting oscillation, transformed phase portraits are introduced in which the whole exciting term is treated as a generalized state variable so that the relationship between the original state variables and the slow-varying parameter can be clearly described. By employing the transformed phase portraits, the bifurcation mechanisms of different bursting attractors are presented. For the conditions where only fold bifurcation exists between two equilibrium states in the generalized autonomous system, two un-symmetric bursting attractors can be observed. With the variation of parameters, when the repetitive spiking oscillations pass across the attracting basin of another equilibrium states, the two bursting attractors interact with each other to form an enlarged symmetric bursting attractor. For the conditions where both the Hopf and fold bifurcations evolve into the bursting attractors, multiple quiescent states as well as repetitive spiking states exist in the bursting oscillations, which may lead to complicated behaviors. It is found that the coexistence of multiple equilibrium states as well as the related bifurcation forms not only leads to multiple forms of quiescent states and the spiking states, but also results in different switching forms between different quiescent states and the spiking states.

Keywords: coupling of different scales, multiple equilibrium states, bursting oscillations, bifurcation mechanism

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.65.090501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 21276115, 11472115, 11472116).

[†] Corresponding author. E-mail: qbi@mail.ujs.edu.cn