物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

基于双树复小波变换的非平稳时间序列去趋势波动分析方法

杜文辽 陶建峰 巩晓赟 贡亮 刘成良

Dual-tree complex wavelet transform based multifractal detrended fluctuation analysis for nonstationary time series

Du Wen-Liao Tao Jian-Feng Gong Xiao-Yun Gong Liang Liu Cheng-Liang

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 090502 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.090502
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.090502
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I9

基于双树复小波变换的非平稳时间序列去趋势波动分析方法*

杜文辽[1)†] 陶建峰[2)] 巩晓赟[1)] 贡亮[2)] 刘成良[2)]

1) (郑州轻工业学院机电工程学院, 郑州 450002)

2) (上海交通大学机械与动力工程学院, 上海 200240)

(2015 年 11 月 17 日收到; 2016 年 1 月 21 日收到修改稿)

多重分形去趋势波动分析是研究非平稳时间序列非均匀性和奇异性的有效工具, 针对该方法中趋势项难以确定的问题, 提出一种基于双树复小波变换的方法, 实现了非平稳信号的多重分形自适应去趋势波动分析. 利用双树复小波变换提取信号的多尺度趋势和波动信息, 通过小波系数的希尔伯特变换确定每个时间尺度不重叠子区间的长度, 使多重分形分析具有信号自适应性及较高的计算效率. 以具有解析形式分形特征的倍增级联信号和分数布朗运动时间序列为例验证本文方法的有效性, 所得结果与解析解相吻合. 与传统的多项式去趋势多重分形方法相比, 本文方法根据信号自身特点自适应地确定信号的趋势和不重叠等长度子区间长度, 所得结果更加精确. 对倍增级联信号时间序列取不同的长度, 验证了算法的稳定性. 分别与基于极大重叠离散小波变换和离散小波变换多重分形方法进行比较, 表明本文方法具有更精确的结果和更快的运算速度.

关键词: 非平稳时间序列, 多重分形, 去趋势波动分析, 双树复小波变换

PACS: 05.45.Df, 05.10.–a, 64.60.al, 05.45.Tp **DOI:** 10.7498/aps.65.090502

1 引 言

在紊流、心电、脑电、机械振动等信号分析领域, 所处理的对象多为非平稳时间序列, 在多个时间尺度上存在自相似性. 对此类信号, 传统统计分布模型不能反映信号的非稳定随机特性和多尺度特性, 无法实现信号动态特性的准确描述. 多重分形分析能够从不同层次反映分形结构全面精细的信息, 并借助统计物理学的方法, 通过多重分形谱来描述特征参量概率测度的分布规律, 刻画系统内部所包含的非线性动态特性[1]. 通常, 多重分形谱函数计算复杂, 只有少数信号具有解析解, 对于一般信号, 只能借助数值方法进行求解, 包括结构函数方法、小波模极大方法[2] 以及各种盒子计数方法等[3]. 许多学者致力于多重分形分析数值方法的实现. 去趋势波动分析方法 (multifractal detrended fluctuation analysis, MFDFA) 因其便于实现, 成为近来广泛采用的多重分形分析方法, 该方法及其变体已成功用于股票交易数据[4]、机械振动信号[5,6]、交通流[7]、海杂波数据[8,9]、太阳黑子时间序列[10]、地震波[11,12]、人体心电信号[13] 等动态特性的分析.

MFDFA 的一个关键步骤是在不同的时间尺度移除信号的局部趋势, 得到该尺度对应的波动序列. 传统的方法是利用一阶、二阶甚至更高阶多项式来对局部趋势进行拟合[9]. Telesca 等[12] 在研究地震波时间序列时, 将多项式的阶数取 1 和 5 之间的整数; 而在一些研究中[6,14], 直接凭经验将多项式的阶数设置为 1. 正如 Lin 等[5] 所指出的, 多项式阶数的选取直接关系到时间序列动态性能的分析, 而多项式的阶数选择是个难题. 奚彩萍等[15] 利用移动平均方法代替多项式拟合提取信号的趋

* 国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 51205371, 51405453, 11202125)、国家科技支撑计划 (批准号: 2015BAF32B04, 2014BAD08B00) 和郑州轻工业学院博士启动基金 (批准号: 2013BSJJ033) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dwenliao@zzuli.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

势, 并与基于不同多项式阶数的MFDFA方法进行性能比较. 然而, 上述处理得到的趋势对信号均缺乏自适应性. 有学者将经验模式分解(empirical mode decomposition, EMD)方法结合进MFDFA方法中[16,17]; 郭通等[18]进一步提出基于改进的整体经验模式分解(modified ensemble empirical mode decomposition, MEEMD)去趋势波动分析方法, 对给定的时间序列, 用EMD方法或EEMD方法将信号分解为一系列内禀函数和残差项的组合, 从分解结果中得到各时间尺度的趋势. 基于经验模式分解的方法虽然是一种信号自适应的分析方法, 但是在分解过程往往会出现一些无关的模式[19], 这些虚假模式直接影响到趋势的提取. 与傅里叶分析技术相比, 小波分析技术在时域和频域具有良好的局部化性质及多分辨率特性, 因而更适合处理非平稳信号. 基于连续小波变换的小波模极大方法是多重分形分析的经典方法[20], 但是连续小波变换计算复杂. Manimaran等[21]利用离散小波变换(discrete wavelet transform, DWT)提取非平稳时间序列的波动并分析离子电流在不同情况下的多分形行为; Liang等[22]利用极大重叠离散小波(maximal overlap discrete wavelet transform, MODWT)提取脑电信号的Hurst指数. 双树复小波变换最早由Kingsbury等[23]于1998年提出, 由于其良好的抗频带混叠能力和平移不变性, Nelson和Kingsbury[24]用双树复小波分解系数进行分数布朗表面Hurst指数的估计; Nafornita等[25]进一步利用双树复小波变换对具有变化Hurst指数的图像进行分析. 但基于双树复小波变换进行非平稳信号的多重分形去趋势波动分析, 尚未见相关报道.

本文提出一个基于双树复小波变换的多重分形去趋势波动分析方法(dual-tree complex wavelet transform based multifractal detrended fluctuation analysis, DTCWT-MFDFA), 即利用双树复小波变换的抗混叠和平移不变性, 对非平稳时间序列进行分解, 提取各时间尺度的趋势, 同时利用小波系数对各尺度下不重叠子区间分段长度进行估计, 进而完成信号的多重分形分析. 利用具有多重分形解析表达式的倍增级联信号和分数布朗运动验证本文方法的有效性, 并讨论了选择其他离散小波变换形式和信号长度对结果的影响.

2 基于双数复小波变换的MFDFA算法

2.1 双树复小波变换

双树复小波变换具有近似平移不变性、有限的数据冗余性、完全重构性和计算效率高等良好特性[23]. 双树复小波变换采用两个具有不同低通和高通滤波器的实小波变换实现对信号的并行分解和重构, 两个实小波变换采用两组不同的滤波器, 分别称为实部树和虚部树. 每组滤波器都分别满足完美重构条件, 并构成Hilbert变换对, 这使得整个变换是近似解析的. 在信号的分解与重构过程中始终保持虚部树的采样位置位于实部树的中间, 从而使实部树和虚部树的信息互补, 实现了近似平移不变性. 双树复小波变换在各层的分解过程中, 利用金字塔快速算法, 因而具有较高的分解效率. 对时间序列$x(t)$, 利用双树复小波分解和重构示意图见图1.

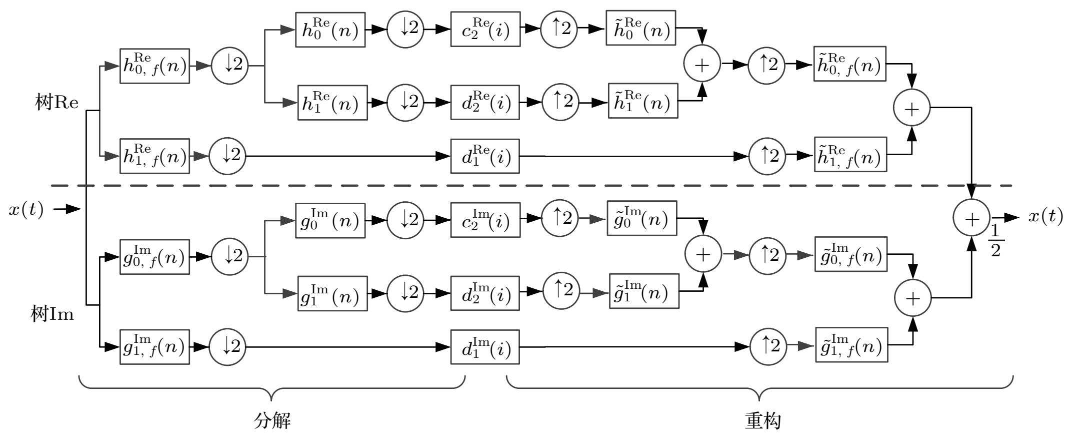

图1 双树复小波分解与重构示意图

Fig. 1. Decomposition and reconstruction process of dual-tree complex wavelet transform.

设$\psi_h(t),\psi_g(t)$分别为双树复小波变换采用的实值小波函数, $\phi_h(t),\phi_g(t)$分别为对应的尺度函数, 这两组滤波器构成Hilbert变换对. 因为双树复小波变换由两个并行的小波变换组成, 根据小波理论, 上面实部树小波变换的小波系数$d_l^{\mathrm{Re}}(k)$和尺度系数$c_J^{\mathrm{Re}}(k)$可由(1)和(2)式计算:

$$d_l^{\mathrm{Re}}(k)=2^{l/2}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\psi_h(2^l t-k)\,\mathrm{d}t$$
$$l=1,\dots,J, \tag{1}$$
$$c_J^{\mathrm{Re}}(k)=2^{J/2}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\varphi_h(2^J t-k)\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

同理, 可以得到虚部树小波变换的小波系数$d_l^{\mathrm{Im}}(k)$和尺度系数$c_J^{\mathrm{Im}}(k)$. 因此, 合并双树的输出可得到双树复小波变换的小波系数和尺度系数, 如(3)和(4)式所示:

$$d_l^C(k)=d_l^{\mathrm{Re}}(k)+\mathrm{j}d_l^{\mathrm{Im}}(k)$$
$$l=1,\dots,J, \tag{3}$$
$$c_J^C(k)=c_J^{\mathrm{Re}}(k)+\mathrm{j}c_J^{\mathrm{Im}}(k). \tag{4}$$

另外, 利用上述小波变换系数可以实现单支重构, 如(5)和(6)式所示:

$$d_l(t)=2^{\frac{l-1}{2}}\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_l^{\mathrm{Re}}(k)\psi_h(2^j t-n)$$
$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}d_l^{\mathrm{Im}}(k)\psi_g(2^j t-m)\Big]$$
$$l=1,\dots,J, \tag{5}$$
$$c_J(t)=2^{\frac{J-1}{2}}\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_J^{\mathrm{Re}}(k)\phi_h(2^J t-n)$$
$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_J^{\mathrm{Im}}(k)\phi_g(2^J t-m)\Big]. \tag{6}$$

2.2 DTCWT-MFDFA详细步骤

双树复小波变换的近似平移不变性, 为MFDFA方法中准确获得非平稳时间序列多尺度下趋势进而提取局部奇异特征提供了保证. 利用双树复小波变换对信号进行M层分解, 得到信号各尺度下的复数形式小波系数和尺度系数, 利用第$i+1$到M层小波系数和第M层尺度系数的单支重构信号叠加, 得到第i尺度对应的趋势项, 进而得到该尺度的波动项. 同时, 利用第i尺度的小波系数, 经过希尔伯特变换得到对应尺度下不重叠子区间长度的估计. 然后对该尺度的信号波动进行分段, 取不同的阶q计算信号在该尺度下的波动函数. 波动函数与q的对数最小二乘拟合斜率对应信号的广义Hurst指数, 进一步可以得到信号的尺度指数. 通过Legendre变换, 可以得到信号的多分形奇异谱. 如图2所示, 详细步骤如下.

步骤1 对待分析的非平稳信号进行集成处理以突出信号的分形特性, 如(7)式所示:

$$y(t)=\sum_{k=1}^{t}[x(k)-\langle x\rangle]\quad t=1,\dots,N, \tag{7}$$

其中, $x(k)$是原始信号$k=1,\dots,t$; $\langle x\rangle$为信号的均值; N为信号的数据点数.

步骤2 选择双树复小波滤波器, 其中$\psi_h(t),\psi_g(t)$分别表示双树复小波变换采用的实值小波函数, $\varphi_h(t),\varphi_g(t)$分别为对应的尺度函数, 这两组滤波器构成Hilbert变换对. 利用这两个小波滤波器对信号进行M层分解, 分别得到小波系数$d_l^{\mathrm{Re}}(i),d_l^{\mathrm{Im}}(i)$, 和尺度系数$c_l^{\mathrm{Re}}(i),c_l^{\mathrm{Im}}(i)$, 其中$1\leqslant l\leqslant M$, 构成信号在$1\leqslant l\leqslant M$尺度下的复小波系数$d_l^{\mathrm{C}}(i)=d_l^{\mathrm{Re}}(i)+\mathrm{j}d_l^{\mathrm{Im}}(i)$, $c_l^{\mathrm{C}}(i)=c_l^{\mathrm{Re}}(i)+\mathrm{j}c_l^{\mathrm{Im}}(i)$; 对第$1\leqslant l\leqslant M$尺度, 分别进行小波系数单支重构, 得到重构信号$d_l(t)$; 对第$M$尺度, 同时进行尺度系数的单支重构, 得到重构信号$c_M(t)$; 对每个尺度$l(1\leqslant l\leqslant M)$, 该尺度的趋势表示为$Tr_l(t)=c_M(t)+\sum\limits_{i=l+1}^{M}d_i(t)$; 对应的波动成分表示为$Fl_l(t)=y(t)-Tr_l(t)$.

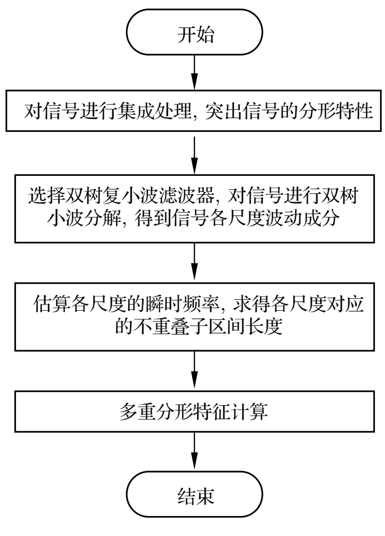

图2 多重分形分析流程图

Fig. 2. Flowchart of multifractal analysis.

步骤3 对第l尺度$(1\leqslant l\leqslant M)$小波系数重构信号$d_l(t)$进行希尔伯特变换, 得到该尺度下的解

析信号, 即 $z_l(t) = d_l(t) + \mathrm{j}\hat{d}_l(t)$, 其中, $\hat{d}_l(t)$ 为 $d_l(t)$ 的希尔伯特变换; 由解析信号 $z_l(t)$, 可以得到信号的相位角 $\varphi_l(z)$, 利用相位角的微分, 得到瞬时频率 $\omega_l(k), k = 1, \ldots, N/2^l$; 继之得到对应时间尺度的大小 $s_l = \lfloor 1/\langle\omega_l(k)\rangle\rfloor$ 作为该尺度不重叠子区间的长度, 其中, $\langle\omega_l(k)\rangle$ 为 $\omega_l(k)$ 在该尺度的均值.

步骤 4 对第 l 尺度, 沿信号的正反两个方向, 利用 s_l 对该尺度波动信号进行无覆盖的分段, 共得到 $2N_s$ 段连续的不重叠子区间, 每段记为 $\varepsilon_v(i)$, $i = 1, \cdots, s_l$, 并对每段计算局部波动函数

$$F^2(v, s_l) = \frac{1}{s_l}\sum_{i=1}^{s_l}[\varepsilon_v(i)]^2. \tag{8}$$

步骤 5 取 $q \in [-q_{\lim}, +q_{\lim}]$, 利用下式计算 $q = 0$ 之外的各阶波动函数:

$$F_q(s_l) = \left\{\frac{1}{2N_s}\sum_{\nu=1}^{2N_s}[F^2(\nu, s_l)]^{q/2}\right\}^{1/q}, \tag{9}$$

对 $q = 0$, 波动函数为

$$F_0(s_l) = \exp\left\{\frac{1}{4N_s}\sum_{\nu=1}^{2N_s}\ln[F^2(\nu, s_l)]\right\}. \tag{10}$$

步骤 6 对各个 q 分析波动函数和时间尺度之间的幂率关系, 即

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}, \tag{11}$$

这里 $h(q)$ 为广义 Hurst 指数. 通常对 $\log F_q(s_l)$ 和 $\log s_l$ 进行最小二乘拟合, 所得斜率即为 $h(q)$; 对每个 q, 可以得到尺度指数 $\tau(q)$

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \tag{12}$$

利用 Legendre 变换, 信号的奇异指数 α 和多分形奇异谱 $f(\alpha)$ 可分别由 (13) 和 (14) 计算:

$$\alpha = h(q) + qh'(q), \tag{13}$$

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q). \tag{14}$$

3 算例分析

3.1 倍增级联过程

倍增级联过程广泛用于复杂系统的多分形建模, Macek 和 Wawrzaszek [26] 利用该模型实现了太阳风湍流数据的数值仿真建模, 描述不同尺度动能量流的不均匀分布; Cheng [27] 利用该模型进行信息集成, 实现对矿产资源潜力预测和环境影响评估; Sezer [28] 利用该模型对地震历史数据进行建模, 研究地震发生的概率. 倍增级联模型中 p-模型是最简单的一种, 我们这里用 p-模型倍增级联过程来评估所提出的基于双树复小波去趋势多重分形方法的性能, 并与其他去趋势波动方法进行比较.

p-模型倍增级联过程通过对单位间隔进行二等分, 每份具有不同的测度 (p_1 和 p_2). 然后对每份进行二等分迭代, 测度也按乘法方式分配到每一部分. 这个二项式形式级联过程第 m 层的测度包含 $N = 2^m$ 个等长的间隔, $L = 2^{(-m)}$ 测度具有概率为 $P_i(L) = p_1^{(m-k)}p_2^k, (k = 0, \ldots, m)$. 本例中, 设 $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $m = 16$, 获得一个数据长度为 65536 的倍增级联序列.

如果倍增级联按照二等分迭代形式无限延续下去, 其尺度指数 $\tau(q)$ 具有如下显式表达式:

$$\tau(q) = -\ln(p_1^q + p_2^q)/\ln 2. \tag{15}$$

通过 Legendre 变换, 其奇异性指数 $\alpha(q)$ 和多分形谱 $f(\alpha)$ 可以通过 (16) 和 (17) 式获得:

$$\alpha(q) = -\frac{(p_1^q \ln p_1 + p_2^q \ln p_2)}{(\ln 2(p_1^q + p_2^q))}, \tag{16}$$

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) = -\frac{qp_1^q \ln p_1 + qp_2^q \ln p_2}{(p_1^q + p_2^q)\ln 2} + \ln(p_1^q + p_2^q)/\ln 2. \tag{17}$$

利用所提出的 DTCWT-MFDFA 方法对上述 p-模型倍增级联信号进行分析, 作为对比, 分别取多项式阶数 $l = 1, 2, 3$, 也用基于多项式拟合的去趋势波动多重分形方法对上述信号进行分析. 以上方法所得的 $h(q)$ 和 $\tau(q)$ 与解析解列于表 1, 可以看到, 基于双树复小波利用变换的去趋势波动分析方法得到的结果比基于多项式拟合去趋势波动分析方法结果更精确。对 $h(q)$, 基于多项式的方法所得结果偏离解析解最大超过 0.05, 而基于双树复小波方法偏离的最大值只有 0.02; 对 $\tau(q)$, 三种基于多项式拟合去趋势波动分析方法结果偏离解析解最大值超过 0.38, 而基于双树复小波变换方法偏离的最大值只有 0.07. DTCWT-MFDFA 与多项式拟合 MFDFA 方法的 $h(q)$, $\tau(q)$, $f(\alpha)$ 图形如图 3 所示. 从图 3 中可以更直观地看到, 对 $h(q)$, 无论对正的 q 或者负的 q, DTCWT-MFDFA 方法均能获得比较精确的结果, 但是多项式拟合的 MFDFA 方法对于正的 q 会出现较大的偏差. 对 $\tau(q)$, DTCWT-MFDFA 与多项式拟合的 MFDFA 方法对于负的 q 均能获得比较好的结果, 但是对于正的 q, 基于多项式拟合去趋势波动分析与解析解偏离较大, 这种情

况下, DTCWT-MFDFA方法得到的曲线仍几乎和理论曲线重合. 对$f(\alpha)$, 当$q<0$时, 多项式拟合的MFDFA方法所得结果与解析解比较接近, 当$q>0$时, 无论阶数取1, 2或3, 所得结果与解析解均偏离较大, 而DTCWT-MFDFA方法, 在q的取值范围内均获得比较精确的结果. 另外, 就多项式拟合的MFDFA方法, 用不同的多项式阶数l对趋势进行拟合, 所得到的多分形特征差别明显.

为了进一步调查所提方法对不同长度时间序列的分析效果, 对上述p-模型倍增级联过程分别取包含2^{11}, 2^{12}, 2^{13}, 2^{14}, 2^{15}, 和2^{16}个点. 利用DTCWT-MFDFA方法分别得到各时间序列的$\tau(q)$和$f(\alpha)$, 结果如图4所示. 从图4中可以看出, 即使对较小的数据长度, 如2^{11}, 所提方法仍能获得较准确的尺度指数和多分形奇异谱, 算法对不同长度的时间序列具有较好的稳定性.

双树复小波变换能够成功提取信号不同时间尺度的趋势波动, 其中一个重要原因是DTCWT具有平移不变性, 使得小波系数在信号任何奇异处保持稳定和较大的值, 信号分解的结果能够反映不同尺度趋势的变化情况. 文献[29, 30]分别利用MODWT获取信号的趋势波动, 进而得到信号的多重分形特征, 与DTCWT分解相比, MODWT分解是冗余分解, 其计算复杂度为$O(N\times\log_2 N)$, 而DTCWT金字塔快速算法计算复杂度为$O(2\times N)$. 和上两种分解方法相比, DWT的计算复杂度为$O(N)$, 但是其不具有平移不变性, 各尺度的分解结果不能稳定反映信号趋势随尺度的变化情况.

表1 分别利用解析方法(MCSa)、基于多项式的MFDFA方法(1-MFDFA, 2-MFDFA和3-MFDFA分别表示1阶、2阶、3阶多项式MFDFA)和基于双树复小波变换的MFDFA方法(DTCWT-MFDFA)对倍增级联信号得到的$h(q)$和$\tau(q)$值

Table 1. $h(q)$ and $\tau(q)$ values of the multiplicative cascading series (MCS) computed analytically (MCSa), through polynomial MFDFA (1-MFDFA, 2-MFDFA, and 3-MFDFA3) and DTCWT based MFDFA (DTCWT-MFDFA) approach.

q	MCSa		1-MFDFA		2-MFDFA		3-MFDFA		DTCWT-MFDFA	
	$h(q)$	$\tau(q)$	$h(q)$	$\tau(q)$	$h(q)$	$\tau(q)$	$h(q)$	$\tau(q)$	$h(q)$	$\tau(q)$
−10	1.64	−17.37	1.64	−17.38	1.61	−17.11	1.61	−17.12	1.64	−17.38
−9	1.63	−15.63	1.63	−15.64	1.60	−15.40	1.60	−15.41	1.63	−15.64
−8	1.61	−13.90	1.61	−13.90	1.59	−13.69	1.59	−13.70	1.61	−13.91
−7	1.59	−12.16	.59	−12.16	1.57	−11.98	1.57	−11.99	1.60	−12.18
−6	1.57	−10.43	1.57	10.43	1.55	−10.27	1.55	−10.28	1.57	−10.45
−5	1.54	−8.71	1.54	−8.70	1.51	−8.57	1.51	−8.57	1.54	−8.72
−4	1.50	−7.00	1.49	−6.98	1.47	−6.88	1.47	−6.88	1.50	−7.01
−3	1.44	−5.32	1.43	−5.29	1.40	−5.21	1.40	−5.21	1.44	−5.32
−2	1.36	−3.72	1.34	−3.69	1.32	−3.64	1.32	−3.64	1.35	−3.71
−1	1.25	−2.25	1.23	−2.23	1.22	−2.22	1.22	−2.22	1.25	−2.25
0	1.13	−1	1.10	−1	1.10	−1	1.10	−1	1.13	−1
1	1	0	0.96	−0.04	0.96	−0.04	0.96	−0.04	1.02	0.02
2	0.89	0.79	0.84	0.68	0.84	0.68	0.84	0.69	0.90	0.81
3	0.81	1.43	0.75	1.26	0.76	1.27	0.76	1.27	0.81	1.44
4	0.75	2.01	0.70	1.79	0.70	1.80	0.70	1.80	0.74	1.99
5	0.71	2.55	0.66	2.29	0.66	2.30	0.66	2.31	0.70	2.51
6	0.68	3.08	0.63	2.78	0.63	2.79	0.64	2.81	0.67	3.03
7	0.66	3.60	0.61	3.27	0.61	3.28	0.62	3.31	0.65	3.54
8	0.64	4.11	0.59	3.75	0.60	3.76	0.60	3.80	0.63	4.05
9	0.63	4.63	0.58	4.23	0.58	4.24	0.59	4.29	0.62	4.57
10	0.61	5.15	0.57	4.71	0.57	4.72	0.58	4.77	0.61	5.08

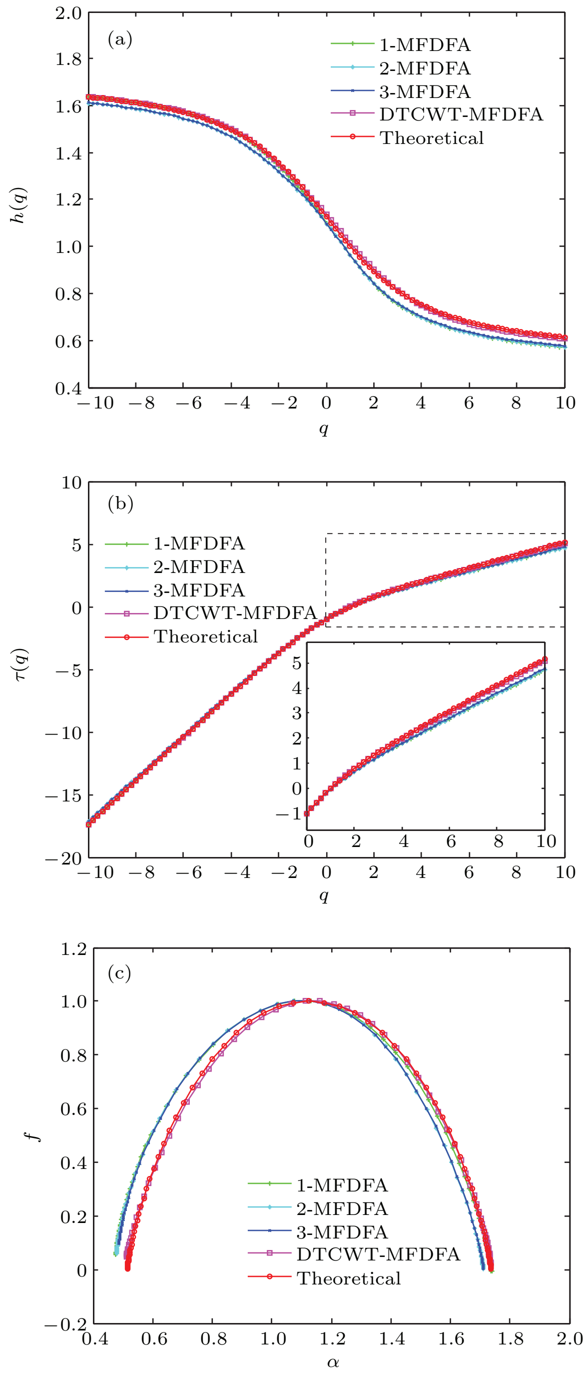

图3 (网刊彩色) 对倍增级联信号利用DTCWT-MFDFA与基于多项式的MFDFA得到的图 (a) $h(q)$ 图; (b) $\tau(q)$ 图; (c) $f(\alpha)$ 图

Fig. 3. (color online) Curves of the multiplicative cascading series computed analytically, through polynomial MFDFA and DTCWT-MFDFA approach: (a) $h(q)$ curves; (b) $\tau(q)$ curves; (c) $f(\alpha)$ curves.

图5是基于这几种不同离散小波变换的MFDFA方法所得到的结果, 可以看出, 利用基于DWT的去趋势波动方法所得结果完全偏离解析解; 基于MODWT和DTCWT方法的去趋势波动方法所得结果与解析解比较接近, 但对$q < 0$, 基于MODWT方法所得多分形特征与解析解偏差较大, 而基于DTCWT的方法所得结果更为精确. 对于本例, 在CPU为2.6 GHz, 内存为4 G, 32位操作系统的计算机配置下, 分别利用基于DTCWT, MODWT方法进行多重分形分析, 运算所需时间分别为3.679 s和9.088 s, 基于DWCWT的多重分形算法比基于MODWT的算法速度提高1倍以上.

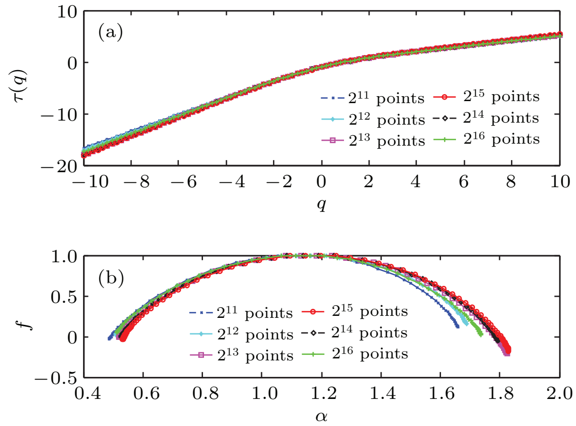

图4 (网刊彩色) 对倍增级联信号取不同样本长度利用DTCWT-MFDFA得到的$\tau(q)$ (a) 和 $f(\alpha)$ (b)

Fig. 4. (color online) Curves of the multiplicative cascading series with different length through DTCWT-MFDFA approach: (a) $\tau(q)$ curves; (b) $f(\alpha)$ curves.

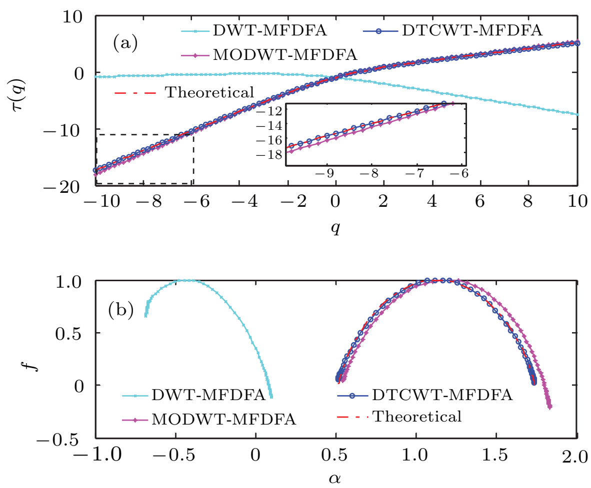

图5 (网刊彩色) 对倍增级联信号基于不同离散小波变换MFDFA得到的$\tau(q)$ (a) 和 $f(\alpha)$ (b)

Fig. 5. (color online) Curves of the multiplicative cascading series with different discrete wavelet transform based MFDFA approaches: (a) $\tau(q)$ curves; (b) $f(\alpha)$ curves.

3.2 分数布朗运动

本节利用DTCWT-MFDFA方法对典型的单分形信号——分数布朗运动数据序列进行分析. 分数布朗运动同样在分形建模中应用广泛, 孙康

等[31]利用该模型对扫描模式下海杂波数据进行分形建模，计算了海杂波时间序列随时间变化的Holder函数；Lin等[32]利用该模型进行CT图像建模，提取分形特征实现良性和恶性肿瘤的区分. 由Matlab软件FracLab2.0工具箱生成具有Hurst指数为0.4, 0.5, 0.6的分数布朗运动时间序列，每个序列的数据长度为8192个点，分别代表长程反相关、不相关、长程相关时间序列.

利用DTCWT-MFDFA方法对上述信号进行分析，可以求得Hurst指数的数值解. 同样，作为对比，分别取多项式阶数 $l = 1, 2, 3$，利用基于多项式拟合的去趋势波动多重分形方法进行Hurst指数求解. 以上方法所得结果列于表2. 从表中可以看到，对Hurst指数为0.4的情形，多项式阶数为1时结果偏离解析解最大，达到0.02；阶数为2和3时，结果偏离解析解0.01，此时，DTCWT-MFDFA方法得到的结果与解析解符合；对Hurst指数为0.5的情形，几种方法均对解析解有所偏离，但是基于DTCWT-MFDFA方法得到的结果偏离解析解最小，另三种方法最大偏离达0.04；对Hurst指数为0.6的情形，多项式阶数为2和3时，结果与解析解吻合，基于DTCWT-MFDFA方法得到的结果与解析解偏离0.01，而多项式阶数为1时，与解析解偏离0.02. 此例说明，基于DTCWT-MFDFA方法对具有这三种不同Hurst指数的分数布朗运动数据序列表现稳定，而基于多项式拟合的去趋势波动分析方法受多项式阶数的选取影响较大，选取不同的多项式阶数，所得结果表现出较大的波动.

表2 分别利用基于多项式的MFDFA方法(1-MFDFA, 2-MFDFA和3-MFDFA分别表示1阶、2阶、3阶多项式MFDFA)和基于双树复小波变换的MFDFA方法(DTCWT-MFDFA)对具有不同Hurst指数的分数布朗运动时间序列得到的Hurst指数数值解

Table 2. Estimated Hurst index values of the fractional Brownian motions with different analytical Hurst index through polynomial MFDFA (1-MFDFA, 2-MFDFA, and 3-MFDFA3) and DTCWT based MFDFA (DTCWT-MFDFA) approach.

Hurst index	1-MFDFA	2-MFDFA	3-MFDFA	DTCWT-MFDFA
0.4	0.42	0.41	0.39	0.40
0.5	0.47	0.46	0.47	0.48
0.6	0.62	0.60	0.60	0.59

4 结 论

本文基于双树复小波变换，建立了一种新的去趋势波动多重分形分析方法DTCWT-MFDFA，该方法能有效获得非平稳时间序列的尺度指数、广义Hurst指数和多重分形谱等多重分形特征.

以典型的分形信号——倍增级联信号和分数布朗运动为例，检验本文方法的有效性和优越性. 通过算例分析可知：本方法利用双树复小波变换能够对信号进行自适应分解，根据信号本身的特征提取信号的多尺度趋势，有效克服传统多项式去趋势波动分析方法中多项式阶数难以确定的问题；与普通离散小波变换相比，双树复小波变换具有信号分解的平移不变性，保证了多重分形特征提取的准确性；对不同信号长度的分析表明，所提算法具有较好的稳定性；双树复小波分解利用金字塔快速算法，比传统的基于极大重叠离散小波变换效率更高.

参考文献

[1] Ni H J, Zhou L P, Zeng P, Huang X L, Liu H X, Ning X B 2015 *Chin. Phys. B* **24** 070502

[2] Muzy J F, Bacry E, Arneodo A 1993 *Phys. Rev. E* **47** 875

[3] Wang D L, Yu Z G, Anh V 2012 *Chin. Phys. B* **21** 080504

[4] Caraiani P 2012 *Physica A* **391** 3629

[5] Lin J S, Chen Q 2013 *Mech. Syst. Signal. Pr.* **38** 515

[6] Xiao H, Lü Y, Wang T 2015 *J. Vib. Eng.* **28** 331 (in Chinese) [肖涵, 吕勇, 王涛 2015 振动工程学报 **28** 331]

[7] Xiong J, Chen S K, Wei W, Liu S, Guan W 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 200504 (in Chinese) [熊杰, 陈绍宽, 韦伟, 刘爽, 关伟 2014 物理学报 **63** 200504]

[8] Liu N B, Guan J, Song J, Huang Y, He Y 2013 *Sci. China: Inform. Sci.* **43** 768 (in Chinese) [刘宁波, 关键, 宋杰, 黄勇, 何友 2013 中国科学: 信息科学 **43** 768]

[9] Xing H Y, Zhang Q, Xu W 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 110502 (in Chinese) [行鸿彦, 张强, 徐伟 2015 物理学报 **64** 110502]

[10] Zhou Y, Leung Y 2010 *J. Stat. Mech-Theory E.* **2010** P12006

[11] Lin M, Yan S X, Zhao G, Wang G 2013 *Commun. Theor. Phys.* **59** 1

[12] Telesca L, Matcharashvili T, Chelidze T, Zhukova N, Javakhishvili Z 2013 *Nat. Hazards* **77** 117

[13] Loiseau P, Médigue C, Gonçalves P, Attia N, Seuret S, Cottin F, Chemla D, Sorine M, Barral J 2012 *Physica A* **391** 5658

[14] Lafouti M, Ghoranneviss M 2015 *Chin. Phys. Lett.* **32** 105201

[15] Xi C P, Zhang S N, Xiong G, Zhao H C 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 136403 (in Chinese) [奚彩萍, 张淑宁, 熊刚, 赵惠昌 2015 物理学报 **64** 136403]

[16] Qian X Y, Gu G F, Zhou W X 2011 *Physica A* **390** 4388

[17] Zhou J, Manor B, Liu D, Hu K, Zhang J, Fang J 2013 *Plos One* **8** e62585

[18] Guo T, Lan J L, Huang W W, Zhang Z 2013 *J. Commun.* **34** 38 (in Chinese) [郭通, 兰巨龙, 黄万伟, 张震 2013 通信学报 **34** 38]

[19] Peng Z K, Tse P W, Chu F L 2005 *Mech. Syst. Signal. Pr.* **19** 974

[20] Muzy J, Bacry E, Arneodo A 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 3515

[21] Manimaran P, Panigrahi P K, Parikh J C 2009 *Physica A* **388** 2306

[22] Liang Z, Li D, Ouyang G, Wang Y, Voss L J, Sleigh J W, Li X 2012 *Clin. Neurophysiol.* **123** 681

[23] Selesnick I W, Baraniuk R G, Kingsbury N G 2005 *IEEE Signal Proc. Mag.* **22** 123

[24] Nelson J, Kingsbury N 2012 *IET Signal Process.* **6** 484

[25] Nafornita C, Isar A, Nelson J D B 2014 *Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Image Processing* New York, USA, January 28, 2014 p2689

[26] Macek W M, Wawrzaszek A 2011 *Nonlinear Proc. Geoph.* **18** 287

[27] Cheng Q 2012 *Nonlinear Proc. Geoph.* **19** 57

[28] Sezer A 2012 *Sci. Iran.* **19** 1456

[29] Cao G, Xu W 2016 *Physica A* **444** 505

[30] Arshad S, Rizvi S A R 2015 *Physica A* **419** 158

[31] Sun K, Jin G, Wang C Y, Ma C W, Qian W P, Gao M G 2015 *J. Electr. Inform. Technol.* **37** 982 (in Chinese) [孙康, 金钢, 王超宇, 马超伟, 钱卫平, 高梅国 2015 电子与信息学报 **37** 982]

[32] Lin P L, Huang P W, Lee C H, Wu M T 2013 *Pattern Recogn.* **46** 3279

Dual-tree complex wavelet transform based multifractal detrended fluctuation analysis for nonstationary time series*

Du Wen-Liao[1)†] Tao Jian-Feng[2)] Gong Xiao-Yun[1)] Gong Liang[2)] Liu Cheng-Liang[2)]

1) (*School of Mechanical and Electronic Engineering, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China*)

2) (*School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China*)

(Received 17 November 2015; revised manuscript received 21 January 2016)

Abstract

Multifractal detrended fluctuation analysis is an effective tool for dealing with the non-uniformity and singularity of nonstationary time series. For the serious issues of the trend extraction and the inefficient computation in the traditional polynomial fitting based multifractal detrended fluctuation analysis, based on the dual-tree complex wavelet transform, a novel multifractal analysis is proposed. To begin with, as the dual-tree complex wavelet transform has the anti-aliasing and nearly shift-invariance, it is first utilized to decompose the signal through the pyramid algorithm, and the scale-dependent trends and the fluctuations are extracted from the wavelet coefficients. Then, using the wavelet coefficients, the length of the non-overlapping segment on a corresponding time scale is computed through the Hilbert transform, and each of the extracted fluctuations is divided into a series of non-overlapping segments whose sizes are identical. Next,

* Project supported by the Young Scientists Fund of the National Nature Science Foundation of China (Grant Nos. 51205371, 51405453, 11202125), the National Key Technology Research and Development Program of China (Grant Nos. 2015BAF32B04, 2014BAD08B00), and the Doctoral Starting up Foundation of Zhengzhou University of Light Industry, China (Grant No. 2013BSJJ033).

† Corresponding author. E-mail: dwenliao@zzuli.edu.cn

on each scale, the detrended fluctuation function for each segment is calculated, and the overall fluctuation function can be obtained by averaging all segments with different orders. Finally, the generalized Hurst index and scaling exponent spectrum are determined from the logarithmic relations between the overall detrended fluctuation function and the time scale and the standard partition function, respectively, and then the multifractal singularity spectrum is calculated with the help of Legendre transform. We assess the performance of the dual-tree-complex wavelet transform based multifractal detrended fluctuation analysis (MFDFA) procedure through the classic multiplicative cascading process and the fractional Brownian motions, which have the theoretical fractal measures. For the multiplicative cascading process, compared with the traditional polynomial fitting based MFDFA methods, the proposed multifractal approach defines the trends and the length of non-overlapping segments adaptively and obtains a more precise result, while for the traditional MFDFA method, for the negative orders, no matter the generalized Hurst index, scaling exponents spectrum, or the multifractal singularity spectrum, the acquired results each have a significant deviation from the theoretical one. For the time series with different sizes, the proposed method can also give a stable result. Compared with the other adaptive method such as maximal overlap discrete wavelet transform based MFDFA and the discrete wavelet transfrom based MFDFA, the proposed approach obtains a very accurate result and has a fast calculation speed. For another time series of fractional Brownian motions with different Hurst indexes of 0.4, 0.5 and 0.6, which represent the anticorrelated, uncorrelated, correlated process, respectively, the results of the proposed method are consistent with those analytical results, while the results of the polynomial fitting based MFDFA methods are most greatly affected by the order of the fitting polynomial. The method in this article provides a valuable reference for how to use the dual-tree complex wavelet transform to realize the multifractal detrended fluctuation analysis, and we can benefit from the signal self-adaptive trend extraction and the high computation efficiency.

Keywords: nonstationary time series, multifractal, detrended fluctuation analysis, dual-tree complex wavelet transform

PACS: 05.45.Df, 05.10.–a, 64.60.al, 05.45.Tp **DOI:** 10.7498/aps.65.090502