物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

从离散Wigner函数的角度探讨量子相干性度量

林银 黄明达 於亚飞 张智明

Investigating quantum coherence from discrete Wigner function

Lin Yin Huang Ming-Da Yu Ya-Fei Zhang Zhi-Ming

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 66, 110301 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.110301
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.110301
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I11

从离散Wigner函数的角度探讨量子相干性度量*

林银 黄明达 於亚飞† 张智明

(华南师范大学, 广东省微纳光子功能材料与器件重点实验室 (信息光电子科技学院), 广东省量子调控工程与材料重点实验室, 广州 510006)

(2016 年 11 月 29 日收到; 2017 年 3 月 1 日收到修改稿)

量子相干性是量子信息处理的基本要素, 在量子计算中扮演着重要的角色. 为了便于讨论量子相干性在量子计算中的作用, 本文从离散 Wigner 函数角度对量子相干性进行了探讨. 首先对奇素数维量子系统的离散 Wigner 函数进行了分析, 分离出表征相干性的部分, 提出了一种可能的基于离散 Wigner 函数的量子相干性度量方法, 并对其进行了量子相干性度量规范的分析; 同时也比较了该度量与 l_1 范数相干性度量之间的关系. 重要的是, 这种度量方法能够明确给出量子相干性程度与衡量量子态量子计算加速能力的负性和之间不等式关系, 由此可以解析地解释量子相干性仅是量子计算加速的必要条件.

关键词: 量子相干性度量, 量子计算加速, 离散 Wigner 函数

PACS: 03.65.Aa, 03.65.Ta, 03.65.Yz, 03.67.Ac **DOI:** 10.7498/aps.66.110301

1 引 言

量子相干性作为量子力学的重要性质之一, 在量子计算和量子信息等领域扮演着重要的角色, 因此如何在理论上度量量子相干性程度一直是一个热点问题. 通常, 人们定性地认为相干效应是由选定基矢下量子态密度矩阵的非对角元引起的. 近期, 类比纠缠度量, 文献 [1, 2] 提出一个严格的量子相干性度量的资源理论框架, 并验证相对熵相干性度量及 l_1 范数相干性度量满足该框架要求. 在此框架下, 对合适的相干度量方法, 非相干态的度量值为零, 而且通过非相干信道后量子态的相干性度量值不会增加. 在此框架的基础上, 一系列相干性度量方案被提出和验证, 例如文献 [3] 中提出用可观测量度量相干性并设计了实验方案; 文献 [4] 提出通过纠缠度量相干性的方案; 文献 [5] 提出利用内在随机度量相干性, 以及文献 [6] 中讨论了用保真度和迹距离度量量子相干性. 同时, 文献 [7, 8] 讨论了量子相干性和其他量子关联形式 (量子失谐, 量子纠缠) 之间的关系.

Wigner 函数是研究连续变量量子系统的非经典性质的一个重要的工具. 近年来人们将其推广到有限维 Hilbert 空间来研究离散量子系统的非经典性质, 称作离散 Wigner 函数 [9–16]. 离散 Wigner 函数可用于判定对稳定子量子计算提供量子计算加速的资源, 如不能够提供稳定子量子计算加速的量子态的 Wigner 函数取值非负 [17–19]; 具有非负离散 Wigner 函数的量子操作或量子计算线路都可以通过经典有效模拟实现 [20,21]. 如果能够在离散 Wigner 函数的基础上探讨量子相干性, 将可能在量子相干性及量子计算之间建立解析的联系.

本文的结构如下: 第二部分简单介绍量子相干性度量的资源理论框架和离散 Wigner 函数; 第三部分分析量子态对角项在相空间的表现, 从而建议新的量子相干性度量方法, 并对其进行量子相干性度量规范的分析, 同时探讨其与 l_1 范数度量之间的联系, 最后基于我们的度量方法分析量子相干性在通用稳定子量子计算中的作用; 第四部分对全文进行简短的总结.

* 国家自然科学基金重大项目 (批准号: 91121023)、国家自然科学基金 (批准号: 11574092, 61378012, 60978009)、国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2013CB921804) 和教育部 “长江学者和创新团队发展计划”(批准号: IRT1243) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yfyuks@hotmail.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

2 量子相干性度量与离散Wigner函数

2.1 量子相干性度量

在给定基矢$\{|i\rangle\}_{i=0\cdots d-1}$下的$d$维Hilbert空间中, 非相干态定义为

$$\delta=\sum_{i=0}^{d-1}p_i|i\rangle\langle i|, \tag{1}$$

这里p_i为布居概率. 我们把非相干态的集合记为$\mathcal{I}$, $\delta\in\mathcal{I}$. 除此之外的量子态都为相干态, 如$|\psi_{\rm d}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=0}^{d-1}|i\rangle$为最大相干态. 由非相干态的定义可知量子相干性度量值大小是由基矢选择决定的, 在不同的参考基矢下同一个量子态的相干性大小不同, 也即相干性的大小由所研究的物理问题决定.

类似于纠缠度量理论[23−25]中的局域操作与经典通信, 引入非相干操作研究量子相干性度量的单调性. 非相干操作定义为作用于非相干态不产生相干性的操作, 设有满足$\Sigma_n\boldsymbol{K_n}\boldsymbol{K_n}^\dagger=\boldsymbol{I}$的Kraus算子集合$\{\boldsymbol{K_n}\}$, 若$\boldsymbol{K_n}\mathcal{I}\boldsymbol{K_n}^\dagger\in\mathcal{I}$, 该Kraus算子为非相干操作. 非相干操作可分为两种情况: 第一种为没有后选择的非相干的正定保迹映射(ICPTP), 输出的量子态为$\varPhi_{\rm ICPTP}(\rho)=\Sigma_n\boldsymbol{K_n}\rho\boldsymbol{K_n}^\dagger$; 第二种考虑后选择测量, 测量后的结果可以保留, 那么对应第n个Kraus操作后的输出态可以相应地写为$\rho_n=\boldsymbol{K_n}\rho\boldsymbol{K_n}^\dagger/p_n$, 相应概率$p_n={\rm Tr}(\boldsymbol{K_n}\rho\boldsymbol{K_n}^\dagger)$. 上述的非相干操作定义保证了其作用于非相干输入态不会产生相干性.

有了以上关于非相干态、相干态以及非相干操作的定义, Baumgratz等[2]根据量子资源理论提议下面3个条件作为量子相干性度量的准则. 一个合适的量子相干性度量C是从量子态ρ到一个非负实数的映射, 并遵循以下准则:

(C1)对于所有的非相干态相干性度量值为0, 即$C(\rho)=0$, 当且仅当$\rho\in\mathcal{I}$;

(C2)量子相干性度量的凸性, 即

$$\sum_n p_nC(\rho_n)\geqslant C\left(\sum_n p_n\rho_n\right);$$

p_n为混合概率, $p_n\geqslant 0$且$\sum_n p_n=1$;

(C3)量子相干性度量的单调性, 经过非相干操作后量子态的相干性不会增加. 考虑是否有后选择测量, 可分为弱单调性

$$C(\rho)\geqslant C(\varPhi_{\rm ICPTP}(\rho))({\rm C3a}),$$

和强单调性

$$C(\rho)\geqslant\sum_n p_nC(\rho_n)({\rm C3b}).$$

其中由(C3b)和(C2)可得到(C3a)[2].

2.2 离散Wigner函数

Wigner函数是研究连续变量系统量子态非经典性的重要工具[22]. 为了进一步研究有限维Hilbert空间量子态在相空间的分布, 人们提出和研究了离散Wigner函数的概念, 由于定义离散Wigner函数的出发点不同, 其定义众多. 其中较为主流的有两种: 一种是由Wootters[9]提出, 后来由Gibbons等[10], Cormick等[11]和Galvao[12]发展而来的基于共同无偏基的广义Wigner函数. 另一种是由Buot[13]提出, Cross[14]和Baron[15]加以发展的基于Weyl-Heisenberg算子的Wigner 函数, 该定义适用于奇素数维量子系统. 最近文献[16]证明上述两种定义方法在Clifford变换下是等价的. 下面我们介绍基于Weyl-Heisenberg算子的离散Wigner函数的定义方式.

对于一个奇素数d维的Hilbert 空间, 选择集合$\{|n\rangle\}_{n=0}^{d-1}$作为其标准正交基矢. 定义广义泡利矩阵$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Z}$:

$$\boldsymbol{X}=\sum_{n=0}^{d-1}|n+1\mod d\rangle\langle n|,$$

$$\boldsymbol{Z}=\sum_{n=0}^{d-1}\omega^{\rm n}|n\rangle\langle n|,$$

这里$\omega\equiv{\rm e}^{2\pi{\rm i}/d}$. 通过算符$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Z}$定义$d^2$个Weyl-Heisenberg算子:

$$\boldsymbol{D}(a,b)\equiv\omega^{-ab(d+1)/2}\boldsymbol{X}^{\rm a}\boldsymbol{Z}^{\rm b}, \tag{2}$$

其中, $(a,b)\in\mathbb{Z}_{\rm d}\times\mathbb{Z}_{\rm d}$. 我们定义相空间点算子为

$$\boldsymbol{A}_{(a,b)}=\boldsymbol{D}(a,b)\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{(0,0)}}\boldsymbol{D}^\dagger(a,b), \tag{3}$$

其中$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{(0,0)}}=\sum_{n=0}^{\rm d}|-n\rangle\langle n|$.

对一个密度矩阵为$\rho=\sum_{i,j=0}^{d-1}k_{i,j}|i\rangle\langle j|$的量子系统, 它的离散Wigner函数是一个在空间$\mathbb{Z}_{\rm d}\times\mathbb{Z}_{\rm d}$上的准概率分布表示, 这个相空间则可以看作为$d\times d$的格子, 每个格子的值由下式给出:

$$W_\rho(a,b)=\frac{1}{d}{\rm Tr}(\rho\boldsymbol{A}_{(a,b)}). \tag{4}$$

由于相空间点算子厄米, Wigner函数为实数. 对相空间中每列值求和, 即 $\sum_{a=0}^{d-1} W_\rho(a,b) = p_b$, 则 p_b 表示将系统投影到基矢 $|b\rangle$ 上的概率.

3 利用离散Wigner函数分析量子相干性

3.1 基于离散Wigner函数的量子相干性度量

在连续变量领域中, 利用Wigner函数来度量量子相干叠加性的思想已经被提出和研究, 如文献[26]利用连续变量Wigner函数有效地度量宏观量子叠加态. 在连续变量Wigner函数表示的相空间中, 宏观量子叠加态会呈现出两个或多个可区分的峰并且在它们之间会有一定的振荡模式, 这就类似于经典相干现象中的干涉条纹. 文献[26]中通过相应频率下相干条纹的复振幅, 即特征函数模方来度量宏观量子叠加性. 也有文献试图在离散相空间讨论量子干涉, 如文献[27]研究了干涉现象在离散相空间中的表示, 对于两个稳定子态构成的相干叠加态, 其干涉条纹分布在整个相空间中.

量子态 $\rho = \sum_{i,j}^{d-1} k_{i,j}|i\rangle\langle j|$ 的离散特征函数定义为

$$\chi(a,b) = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{D}^\dagger(a,b)\rho)$$
$$= \frac{1}{d}\omega^{-ab(d+1)/2}\sum_{n=0}^{d-1}\omega^{\mathrm{bn}}\,\mathrm{Tr}(|n\rangle\langle n-a|\rho). \quad (5)$$

当 $a=0$ 时, 特征函数的值只与密度矩阵的对角元有关, 与非对角元无关. 我们知道量子相干性是由密度矩阵的非对角元产生的. 为了不使密度矩阵对角元对度量造成影响, 我们令 $a=0$ 的离散特征函数值为0, 把这样处理后的离散特征函数记为 $\chi'(a,b)$, 对其做离散傅里叶变换:

$$W'_\rho(a,b) = \frac{1}{d}\sum_{a'=0,b'=0}^{d-1}\exp\left(-\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}(ab'-ba')\right) \times \chi'(a',b'), \quad (6)$$

这里 (a,b) 是离散Wigner函数的相空间, (a',b') 是特征函数的相空间. 我们发现上式可以直接通过离散Wigner函数得到. 对密度矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 我们分离出其对角部分, 定义正定厄米矩阵为 $\rho^{\mathrm{diag}} = \sum_{i=0}^{d-1} k_{i,i}|i\rangle\langle i|$, 表示对应于量子态 ρ 的非相干态, 相应的离散Wigenr函数记为 $W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(a,b)$, 则

$$W'_\rho(a,b) = W_\rho(a,b) - W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(a,b)$$
$$= \frac{1}{d}\mathrm{Tr}((\rho-\rho^{\mathrm{diag}})\boldsymbol{A}_{(a,b)}). \quad (7)$$

从(7)式我们可以看到, $W'_\rho(a,b)$ 是密度矩阵非对角项在相空间上的准概率分布, 反映了量子态 $\rho = \sum_{i,j}^{d-1} k_{i,j}|i\rangle\langle j|$ 中相干叠加性. 参考 l_1 范数度量[1]我们可以用

$$C_{\mathrm{W}}(\rho) = \sum_{a,b=0}^{d-1}|W_\rho(a,b) - W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(a,b)|$$
$$= \frac{1}{d}\sum_{a,b=0}^{d-1}|\mathrm{Tr}((\rho-\rho^{\mathrm{diag}})\boldsymbol{A}_{(a,b)})| \quad (8)$$

度量量子态 ρ 在标准基中的量子相干性大小.

3.2 离散Wigner函数相干性度量的度量规范分析

基于离散Wigner函数量子相干性度量能很好地符合Baumgratz标准(C1)和(C2). 从定义中显然可以看出这种度量满足(C1), 对于凸性条件(C2), 量子态处于混合态 $\rho = \sum_n p_n\rho_n$, 我们有

$$C_{\mathrm{W}}\left(\sum_n p_n\rho_n\right)$$
$$= \sum_{a,b}\frac{1}{d}\left|\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{A}_{(a,b)}\left(\sum_n p_n\rho_n\right) - \sum_n p_n\rho_n^{\mathrm{diag}}\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_n p_n\sum_{a,b}\frac{1}{d}|\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_{(a,b)}(\rho_n-\rho_n^{\mathrm{diag}}))|$$
$$= \sum_n p_n C_{\mathrm{W}}(\rho_n).$$

从而 $C_{\mathrm{W}}(\rho)$ 的凸性得证.

量子相干性度量 $C_{\mathrm{W}}(\rho)$ 在计算基测量下符合相干性度量准则(C3). 我们对单体系统和多体系统分别进行讨论. 首先看单体系统, 初始量子态 $\rho = \sum_{\boldsymbol{u}} W_\rho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}$ 经过计算基测量后形式为 $\sum_i |i\rangle\langle i|\rho|i\rangle\langle i| = \sum_i\sum_{\boldsymbol{u}} W_\rho(\boldsymbol{u})\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}|i\rangle\cdot|i\rangle\langle i|$, 明显只有对角元素, 是非相干态, 所以满足准则(C3). 再看多体系统的情况, 整个系统在Hilbert空间可分为 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 两个部分, 我们对最后一个粒子进行计算基测量, 则第 i 个测量算子 $\boldsymbol{M}_i = I\otimes|i\rangle\langle i|$, 测量前

的状态为 $\rho = \sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} W_\rho(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}\otimes\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}$, 则测量后情况为

$$
\begin{aligned}
&(I\otimes|i\rangle\langle i|)\rho(I\otimes|i\rangle\langle i|)\\
&=\sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} W_\rho(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}|i\rangle\cdot\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}\otimes|i\rangle\langle i|\\
&=\sum_{\boldsymbol{u}}\left(\sum_{\boldsymbol{v}} W_\rho(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}|i\rangle\right)\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}\\
&\quad\otimes\sum_{\boldsymbol{w}}\left(\frac{1}{d}\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}|i\rangle\right)\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}},
\end{aligned}
$$

经过测量后第 i 个输出态的概率为

$$p_i=\mathrm{Tr}((I\otimes|i\rangle\langle i|)\rho(I\otimes|i\rangle\langle i|)).$$

经过测量后第 i 个输出态为

$$\rho_i=(I\otimes|i\rangle\langle i|)\rho(I\otimes|i\rangle\langle i|)/p_i.$$

相应的离散 Wigner 函数可表示为

$$
\begin{aligned}
W_{\rho_i}(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{w})=&\frac{1}{p_i}\left(\sum_{\boldsymbol{v}} W_\rho(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}|i\rangle\right)\\
&\times\left(\frac{1}{d}\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}|i\rangle\right).
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
&W_{\rho_i^{\mathrm{diag}}}(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{w})\\
&=\frac{1}{p_i}\left(\sum_{\boldsymbol{v}} W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}|i\rangle\right)\left(\frac{1}{d}\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}|i\rangle\right).
\end{aligned}
$$

下面证明条件 (C3b).

$$
\begin{aligned}
&\sum_i p_i C_{\mathrm{W}}(\rho_i)\\
&=\sum_i p_i\sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}}\left|\frac{1}{p_i}\left(\sum_{\boldsymbol{v}} W_\rho(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}|i\rangle\right)\right.\\
&\quad\times\left(\frac{1}{d}\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}|i\rangle\right)\\
&\quad-\frac{1}{p_i}\left(\sum_{\boldsymbol{v}} W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}|i\rangle\right)\\
&\quad\left.\times\left(\frac{1}{d}\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}|i\rangle\right)\right|\\
&=\sum_i\sum_{\boldsymbol{u}}\left(\frac{1}{d}\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}|i\rangle\right)\left|\sum_{\boldsymbol{v}} W_\rho(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}|i\rangle\right.\\
&\quad\left.-\sum_{\boldsymbol{v}} W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}|i\rangle\right|\\
&\leqslant\sum_i\sum_{\boldsymbol{u}}\sum_{\boldsymbol{v}}|W_\rho(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}|i\rangle\\
&\quad-W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}|i\rangle|\\
&=\sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\left(\sum_i\langle i|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}}|i\rangle\right)\\
&\quad\times|W_\rho(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})-W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})|\\
&=\sum_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}|W_\rho(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})-W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v})|\\
&=C_{\mathrm{W}}(\rho).
\end{aligned}
$$

由以上证明结果可得 C_{W} 相干性度量在计算基测量情况下满足强单调性, 即准则 (C3b).

由于 $\rho-\rho^{\mathrm{diag}}$ 非正定, 更严格地证明非相干操作下 $C_{\mathrm{W}}(\rho)$ 满足相干性度量准则 (C3) 存在困难, 但我们可以从数值上给出验证. 下面基于 3 维量子系统, 数值验证 $C_{\mathrm{W}}(\rho)$ 相干性度量满足准则 (C3) 中不等式 $C_{\mathrm{W}}(\rho)\geqslant\sum_{n=1}^{3}p_n C_{\mathrm{W}}(\rho_n)$. 三维 qurit 量子系统的密度矩阵可以通过 $SU(3)$ 生成元表示 [28] 如下:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\rho}=\frac{1}{3}\times\\
&\begin{pmatrix}
1+\sqrt{3}n_3+n_8 & \sqrt{3}n_1-\mathrm{i}\sqrt{3}n_2 & \sqrt{3}n_4-\mathrm{i}\sqrt{3}n_5\\
\sqrt{3}n_1+\mathrm{i}\sqrt{3}n_2 & 1-\sqrt{3}n_3+n_8 & \sqrt{3}n_6-\mathrm{i}\sqrt{3}n_7\\
\sqrt{3}n_4+\mathrm{i}\sqrt{3}n_5 & \sqrt{3}n_6+\mathrm{i}\sqrt{3}n_7 & 1-2n_8
\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

以上的 8 个系数 $n_i, i=1,\cdots,8$ 是 $SU(3)$ 群 8 个生成元对应的系数. 基于离散 Wigner 函数的相干性度量为

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{W}}=&\left|\frac{2n_6}{3\sqrt{3}}\right|+\left|\frac{1}{9}(-\sqrt{3}n_6+3n_7)\right|\\
&+\left|\frac{1}{9}(-\sqrt{3}n_6-3n_7)\right|\\
&+\left|\frac{2n_4}{3\sqrt{3}}\right|+\left|\frac{1}{9}(-\sqrt{3}n_4-3n_5)\right|\\
&+\left|\frac{1}{9}(-\sqrt{3}n_4+3n_5)\right|\\
&+\left|\frac{2n_1}{3\sqrt{3}}\right|+\left|\frac{1}{9}(-\sqrt{3}n_1+3n_2)\right|\\
&+\left|\frac{1}{9}(-\sqrt{3}n_1-3n_2)\right|.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

考虑三维量子系统的非相干操作为

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{n}}=\sum_{i=0}^{2}c_i|i\rangle\langle i+n-1|,\tag{11}$$

其中 $c_i\in\mathbb{C}$, $n=1,2,3$, 并且满足 $\sum_{i=0}^{2}|c_i|^2=1$. c_i 是复数, 写成 $c_0=t_1+\mathrm{i}t_2$, 其他的以此类推. 在有后选择的情况下, 经过非相干信道后第 n 个输出态为 $\rho_n=\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{n}}\rho\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{n}}^{\dagger}/p_n$, $p_n=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{n}}\rho\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{n}}^{\dagger})$. 根据 C_{W} 的定义, 我们可以计算非相干操作后系统的相干性

度量 $\sum_{n=1}^{3} p_n C_{\mathrm{W}}(\rho_n)$ 的表达式. 下面我们选择两种的量子态, 通过数值验证相干性度量 C_{W} 符合准则 (C3b).

我们选取两种不同的量子态, 分别观察它们的度量结果. 图1选取的量子态为最大相干态 $\rho = (\langle 0| + \langle 1| + \langle 2|)/\sqrt{3}$, 其中图1(a) 和图1(b) 分别是系统经过不同参数下非相干操作的度量情况, 两种情况下红线始终处于蓝线上方, 表明 C_{W} 度量满足不等式 $C_{\mathrm{W}}(\rho) \geqslant \sum_{n=1}^{3} p_n C_{\mathrm{W}}(\rho_n)$, 即符合相干性度量标准 (C3b). 图2选取的量子态为混合量子态

$$\rho^p = \frac{1-p}{3} I + \frac{p}{3}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)(\langle 0| + \langle 1| + \langle 2|),$$

p 是最大相干态和最大混态所占的比例. 由于图2(a) 和图2(b) 是在不同参数非相干操作下的度量情况, 从图2中可以看出绿色曲面始终处于蓝色曲面上方, 说明 C_{W} 度量满足不等式 $C_{\mathrm{W}}(\rho^p) \geqslant \sum_{n=1}^{3} p_n C_{\mathrm{W}}(\rho_n^p)$, 即符合相干性度量标准 (C3b).

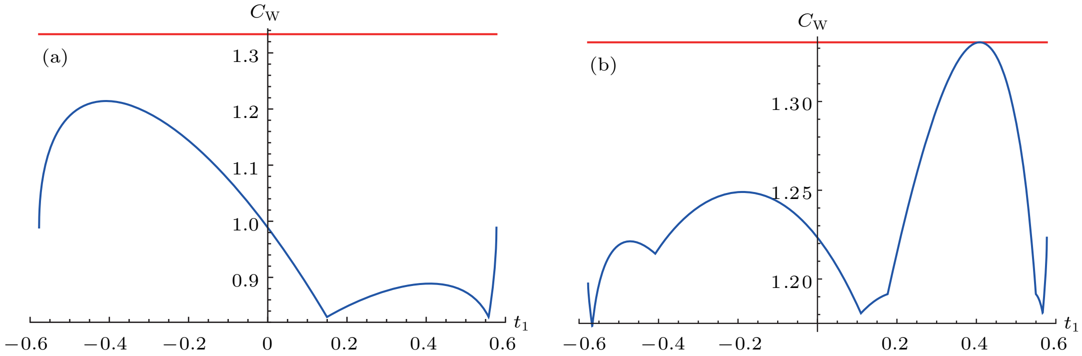

图1 (网刊彩色) 最大相干态经过非相干操作前后的度量情况 (红线为最大相干态的度量值, 蓝线为经过有后选择非相干操作下 $\sum_{n=1}^{3} p_n C_{\mathrm{W}}(\rho_n)$ 的值) (a) 非相干操作的参数, $t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = 1/\sqrt{6}$, t_1, t_2 变化, $t_2 = \sqrt{1/3 - t_1^2}$; (b) 非相干操作的参数, $t_2 = t_4 = t_5 = t_6 = 1/\sqrt{6}, t_3 = \sqrt{1/3 - t_1^2}$

Fig. 1. (color online) The quantum coherence C_{W} of maximally coherent state under the incoherent operations (the red curve depicts the quantum coherence before incoherent operations, the blue curve represents the quantum coherence after incoherent operations where post-selection is enabled): (a) Parameters of incoherent operations, $t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = 1/\sqrt{6}$, $t_2 = \sqrt{1/3 - t_1^2}$; (b) parameters of incoherent operations, $t_2 = t_4 = t_5 = t_6 = 1/\sqrt{6}, t_3 = \sqrt{1/3 - t_1^2}$.

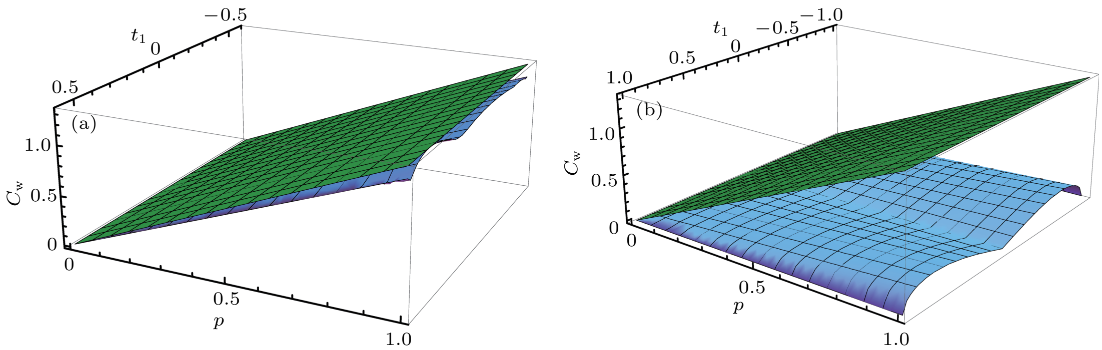

图2 (网刊彩色) 量子态 $\rho^p = \frac{1-p}{3} I + \frac{p}{3}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)(\langle 0| + \langle 1| + \langle 2|)$ 经过非相干操作前后相干性度量值对比 (绿色曲面代表未经过非相干操作的度量结果, 蓝色曲面代表经过有后选择下非相干操作的度量结果) (a) 非相干操作参数, $t_2 = t_4 = t_5 = t_6 = 1/\sqrt{6}, t_3 = \sqrt{1/3 - t_1^2}$; (b) 非相干操作参数, $t_2 = t_4 = t_5 = t_6 = 0, t_3 = \sqrt{1 - t_1^2}$

Fig. 2. (color online) The quantum coherence C_{W} of $\rho^p = \frac{1-p}{3} I + \frac{p}{3}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)(\langle 0| + \langle 1| + \langle 2|)$ under the incoherent operations (the green surface shows the quantum coherence before incoherent operations, The blue surface the quantum coherence after incoherent operations where post-selection is enabled): (a) Parameters of incoherent operations: $t_2 = t_4 = t_5 = t_6 = 1/\sqrt{6}$, $t_3 = \sqrt{1/3 - t_1^2}$; (b) parameters of incoherent operations: $t_2 = t_4 = t_5 = t_6 = 0, t_3 = \sqrt{1 - t_1^2}$.

3.3 离散Wigner函数相干性度量与l_1范数相干性度量

l_1范数相干性度量[1]定义为密度矩阵非对角元模和:

$$C_{l_1}=\sum_{i,j,i\neq j}|\rho_{i,j}|. \tag{12}$$

其中$|\rho_{i,j}|$为密度矩阵元的模, 在文献[2]中已经证明这种方案符合资源理论的相干性度量结构. 离散Wigner函数相干性度量与l_1范数相干性度量是从不同的角度对量子系统的相干性进行度量, 它们之间也存在一定的联系. 这里令量子态的密度矩阵为$\boldsymbol{\rho}=\sum_{i,j}^{d-1}k_{i,j}|i\rangle\langle j|$, 则:

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{W}}&=\sum_{a,b=0}^{d-1}|W_{\rho}(a,b)-W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(a,b)|\\
&=\frac{1}{d}\sum_{a,b}^{d-1}\left|\sum_{i,ji\neq j}^{d-1}k_{i,j}\sum_{n}^{d-1}\omega^{2bn}\langle a-n|i\rangle\langle j|n+a\rangle\right|\\
&=\frac{1}{d}\sum_{b}^{d-1}\sum_{\mathrm{a}}^{d-1}\left|\sum_{n=1}^{d-1}\sum_{a-n,a+n}\omega^{2bn}k_{a-n,a+n}\right|\\
&\leqslant\frac{1}{d}\sum_{b}^{d-1}\sum_{\mathrm{a}}^{d-1}\sum_{n=1}^{d-1}\sum_{a-n,a+n}|\omega^{2bn}k_{a-n,a+n}|\\
&\leqslant\frac{1}{d}\sum_{b}^{d-1}\left(\sum_{\mathrm{a}}^{d-1}\sum_{n=1}^{d-1}\sum_{a-n,a+n}|k_{a-n,a+n}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\times\left(\sum_{\mathrm{a}}^{d-1}\sum_{n=1}^{d-1}\sum_{a-n,a+n}|\omega^{2bn}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\sqrt{d(d-1)}\left(\sum_{\mathrm{a}}^{d-1}\sum_{n=1}^{d-1}\sum_{a-n,a+n}|k_{a-n,a+n}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\sqrt{d(d-1)}\sum_{\mathrm{a}}^{d-1}\sum_{n=1}^{d-1}\sum_{a-n,a+n}|k_{a-n,a+n}|\\
&=\sqrt{d(d-1)}\sum_{i\neq j}^{d-1}|k_{i,j}|\\
&=\sqrt{d(d-1)}C_{l_1},
\end{aligned}$$

系数$D=\sqrt{d(d-1)}$是一个随系统维度变化的值. 上述证明过程中的第二个不等式是基于离散形式的Hölder不等式, 第三个不等式是基于不等式$\left(\sum_i|a_i|^2\right)^{1/2}\leqslant\sum_i|a_i|$. 以上证明过程解析地给出了奇素数$d$维情况下量子态的相干性度量$C_{\mathrm{W}}$和$C_{l_1}$之间的不等式关系. 下面在三维量子系统中对二者进行数值比较, 我们在量子态ρ^p中进行比较. 图3给出了ρ^p分别在C_{W}度量和C_{l_1}度量下的相干性度量值随参数p的变化情况.

随着p的增大, 即最大相干态的比例增大, ρ^p的相干性也增加, 所以度量值变大, 满足$\sqrt{6}C_{l_1}\geqslant C_{\mathrm{W}}$.

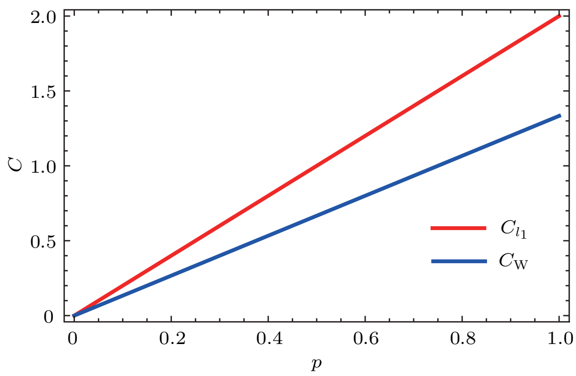

图3 (网刊彩色) 蓝线表示基于离散Wigner函数相干性度量$C_{\mathrm{W}}(\rho^p)$, 红线表示l_1范数相干性度量$C_{l_1}(\rho^p)$

Fig. 3. (color online) The blue curve depicts quantum coherence C_{W} of ρ^p, the red curve represents the l_1 norm coherence of ρ^p.

3.4 基于C_{W}分析量子相干性在通用量子计算中的作用

通过稳定子量子计算模型我们可以将量子计算加速的资源锁定于量子态的非经典性质[17–21]. 量子态的通用计算能力(提供稳定子量子计算加速的能力)可以通过离散Wigner函数负值的绝对值之和来度量[18], 我们称为负性和, 记为N_{W},

$$N_{\mathrm{W}}=\frac{1}{2}\left(\sum_{a,b}|W_{\rho}(a,b)|-1\right). \tag{13}$$

由负性和的定义可以得到量子相干性度量C_{W}和N_{W}的不等式关系, 即

$$\begin{aligned}
N_{\mathrm{W}}&=\frac{1}{2}\left(\sum_{a,b}|W_{\rho}(a,b)|-\sum_{a,b}|W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(a,b)|\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{a,b}(|W_{\rho}(a,b)|-|W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(a,b)|)\right)\\
&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{a,b}|W_{\rho}(a,b)-W_{\rho^{\mathrm{diag}}}(a,b)|\\
&=\frac{1}{2}C_{\mathrm{W}}\leqslant C_{\mathrm{W}}.
\end{aligned}$$

在稳定子量子计算理论中, 量子变换由Clifford操作实现, 此不等式说明: 如果对于一个量子态, 存在一组Clifford操作, 使得此操作下的量子态的量子相干性$C_{\mathrm{W}} = 0$, 则此量子态的量子相干性不能向稳定子量子计算提供量子加速. 文献[14]指出Clifford操作下量子态Wigner函数的各个格点取值相互换, 即$W_{\boldsymbol{U}\rho\boldsymbol{U}^{\dagger}}(\boldsymbol{v}') = W_{\rho}(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{v}'$分别为经过Clifford操作前后的离散相空间, 因此负性和N_{W}的值不变. 但经过Clifford操作后量子态对角矩阵发生变化: $\boldsymbol{U}\rho^{\mathrm{diag}}\boldsymbol{U}^{\dagger} \neq (\boldsymbol{U}\rho\boldsymbol{U}^{\dagger})^{\mathrm{diag}}$, 从而引起$C_{\mathrm{W}}$的变化, 即$C_{\mathrm{W}}(\rho) = \sum_{\boldsymbol{v}'}|W_{\boldsymbol{U}\rho\boldsymbol{U}^{\dagger}}(\boldsymbol{v}') - W_{\boldsymbol{U}\rho^{\mathrm{diag}}\boldsymbol{U}^{\dagger}}(\boldsymbol{v}')| \neq \sum_{\boldsymbol{v}'}|W_{\boldsymbol{U}\rho\boldsymbol{U}^{\dagger}}(\boldsymbol{v}') - W_{(\boldsymbol{U}\rho\boldsymbol{U}^{\dagger})^{\mathrm{diag}}}(\boldsymbol{v}')| = C_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{U}\rho\boldsymbol{U}^{\dagger})$. 由$C_{\mathrm{W}}$和$N_{\mathrm{W}}$的不等式关系说明负性和是Clifford操作下量子相干性的最小值, 同时也表明量子态的相干性是其具有量子计算加速能力的必要条件.

4 结 论

本文讨论了奇素数维量子系统的离散Wigner函数, 在离散相空间中分离出表征量子相干性的部分, 从而建议了一种可能的量子相干性度量方法. 我们证明了该方法满足资源理论相干性度量框架中的准则(C1)和(C2), 并且证明了在计算基测量下满足准则(C3b), 同时通过数值模拟验证了3维量子系统在对应非相干操作下也符合准则(C3b). 另外, 本文还给出了这种度量方法与l_1范数度量之间的联系. 更重要的是我们明确得到了该度量与衡量量子态计算加速能力的负性和之间的不等式关系, 从而解析地解释量子相干性仅是量子计算加速的必要条件. 本文在讨论强单调性证明时仅考虑一些特殊情况下的非相干操作及特定维度的量子态, 对于任意奇素数维量子系统在任意非相干操作下的单调性证明还有待进一步研究.

参考文献

[1] Aberg J 2006 arXiv:quant-ph/0612146v1
[2] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401
[3] Girolami D 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 170401
[4] Streltsov A, Singh U, Dhar H S, Bera M N, Adesso G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 020403
[5] Yuan X, Zhou H Y, Cao Z, Ma X F 2015 *Phys. Rev. A* **92** 022124
[6] Shao L H, Xi Z J, Fan H, Li Y M 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042120
[7] Xi Z J, Li Y M, Fan H 2015 *Sci. Rep.* **5** 10922
[8] Yao Y, Xiao X, Ge L, Sun C P 2015 *Phys. Rev. A* **92** 022112
[9] Wootters W K 1987 *Ann. Phys.* **176** 1
[10] Gibbons K S, Hoffman M J, Wootters W K 2004 *Phys. Rev. A* **70** 062101
[11] Cormick C, Galvao E F, Gottesman D, Paz J P, Pittenger A O 2006 *Phys. Rev. A* **73** 012301
[12] Galvao E F 2005 *Phys. Rev. A* **71** 042302
[13] Buot F A 1974 *Phys. Rev. B* **10** 3700
[14] Gross D 2006 *J. Math. Phys.* **47** 122107
[15] Baron T 2009 *EPL* **88** 10002
[16] Zhu H J 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 040501
[17] Veitch V, Ferrie C, Gross D, Emerson J 2012 *New J. Phys.* **14** 113011
[18] Veitch V, Mousavian S A H, Gottesman D, Emerson J 2014 *New J. Phys.* **16** 013009
[19] Galvao E F 2005 *Phys. Rev. A* **71** 042302
[20] Mari A, Eisert J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 230503
[21] Pashayan H, Wallman J J, Bartlett S D 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 070501
[22] Zhang Z M 2015 *Quantum Optics* (Beijing: Science Press) pp111–116 (in Chinese) [张智明 2015 量子光学 (北京: 科学出版社) 第111—116页]
[23] Vedral V, Plenio M B 1998 *Phys. Rev. A* **57** 1619
[24] Plenio M B, Virmani S 2007 *Quantum Inf. Comput.* **7** 1
[25] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A, Knight P L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
[26] Lee C W, Jeong H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 220401
[27] Cormick C, Paz J P 2006 *Phys. Rev. A* **74** 062315
[28] Thew R T, Nemoto K, White A G, Munro W J 2002 *Phys. Rev. A* **66** 012303

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 66, No. 11 (2017) 110301

Investigating quantum coherence from discrete Wigner function*

Lin Yin Huang Ming-Da Yu Ya-Fei† Zhang Zhi-Ming

(*Guangdong Provincial Key Laboratory of Nanophotonic Functional Materials and Devices (SIPSE), Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

(Received 29 November 2016; revised manuscript received 1 March 2017)

Abstract

Quantum coherence is an essential ingredient in quantum information processing and plays an important role in quantum computation. Therefore, it is a hot issue about how to quantify the coherence of quantum states in theoretical framework. The coherence effect of a state is usually described by the off-diagonal elements of its density matrix with respect to a particular reference basis. Recently, based on the established notions from quantitative theory of entanglement, a resource theory of coherence quantification has been proposed [1,2]. In the theory framework, a proper measure of coherence should satisfy three criteria: the coherence should be zero for all incoherent state; the coherence should not increase under mixing quantum states; the coherence should not increase under incoherent operations. Then, a number of coherence measures have been suggested, such as l_1 norm of coherence and the relative entropy of coherence [2]. Wigner function is known as an important tool to study the non-classical property of quantum states for continuous-variable quantum systems. It has been generalized to finite-dimensional Hilbert spaces, and named as discrete Wigner function [9−16]. The magic property of quantum states, which promotes stabilizer computation to universal quantum computation, can be generally measured by the absolute sum of the negative items (negativity sum) in the discrete Wigner function of the observed quantum states. In this paper we investigate quantum coherence from the view of discrete Wigner function. From the definition of the discrete Wigner function of the quantum systems with odd prime dimensions, for a given density matrix we analyze in phase space the performance of its diagonal and off-diagonal items. We find that, the discrete Wigner function of a quantum state contains two aspects: the true quantum coherence and the classical mixture, where the part of classical mixture can be excluded by only considering the discrete Wigner function of the diagonal items of the density matrix. Thus, we propose a possible measure method for quantum coherence from the discrete Wigner function of the off-diagonal items of the density matrix. We show that the proposed measure method satisfies the criteria (C1) and (C2) of coherence measure perfectly. For the criteria (C3), we give a numerical proof in three-dimensional quantum system. Meanwhile, we compare the proposed coherence measure with l_1 norm coherence, and get an inequality relationship between them. Finally, an inequality is obtained to discuss the relation between quantum coherence and the negativity sum of discrete Wigner function, which shows that the quantum coherence is only necessary but not sufficient for quantum computation speed-up.

Keywords: quantum coherence measure, quantum computation speed-up, discrete Wigner function

PACS: 03.65.Aa, 03.65.Ta, 03.65.Yz, 03.67.Ac **DOI:** 10.7498/aps.66.110301

* Project supported by the Major Research Plan of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 91121023), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11574092, 61378012, 60978009), the National Basic Research Program of China (Grant No. 2013CB921804), and the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University of Ministry of Education of China (Grant No. IRT1243).

† Corresponding author. E-mail: yfyuks@hotmail.com