

非对称型簇发振荡吸引子结构及其机理分析

吴天一 陈小可 张正娣 张晓芳 毕勤胜

Structures of the asymmetrical bursting oscillation attractors and their bifurcation mechanisms

Wu Tian-Yi Chen Xiao-Ke Zhang Zheng-Di Zhang Xiao-Fang Bi Qin-Sheng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 110501 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.110501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.110501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I11>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

α 稳定噪声下一类周期势系统的振动共振

Vibrational resonance in a periodic potential system with α stable noise

物理学报.2017, 66(10): 100501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.100501>

计算相位响应曲线的方波扰动直接算法

A direct algorithm with square wave perturbation for calculating phase response curve

物理学报.2017, 66(9): 090501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.090501>

利用慢特征分析法提取层次结构系统中的外强迫

Extracting the driving force signal from hierarchy system based on slow feature analysis

物理学报.2017, 66(8): 080501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.080501>

复杂网络谱粗粒化方法的改进算法

Improved algorithm of spectral coarse graining method of complex network

物理学报.2017, 66(6): 060502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.060502>

弹性需求下的网络交通流逐日动态演化

Day-to-day dynamical evolution of network traffic flow with elastic demand

物理学报.2017, 66(6): 060501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.060501>

非对称型簇发振荡吸引子结构及其机理分析*

吴天一¹⁾²⁾ 陈小可¹⁾ 张正娣³⁾ 张晓芳¹⁾ 毕勤胜^{1)†}¹⁾(江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)²⁾(镇江船艇学院, 镇江 212003)³⁾(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2016年12月9日收到; 2017年1月16日收到修改稿)

旨在揭示频域不同尺度耦合时非对称动力系统簇发振荡的特点及其分岔机理, 并进一步揭示快子系统多平衡点共存导致的不同簇发模式及其产生原因. 以经典的蔡氏振子为例, 通过引入非对称控制项及周期变化的电流源, 选取适当参数, 构建存在频域两尺度耦合的非对称动力系统模型. 当周期激励频率远小于系统的固有频率时, 将整个周期激励项视为慢变参数, 得到随慢变参数变化的快子系统平衡曲线及其不同的分岔点以及分岔行为. 重点分析了三种不同周期激励幅值下典型的非对称簇发振荡及吸引子结构, 揭示其相应的产生机理. 指出外激励幅值的变化不仅会引起不同稳定平衡点吸引域的变化, 也会使得慢变量穿越不同分岔点的时间间隔发生变化, 导致系统产生不同形式的簇发振荡.

关键词: 非对称系统, 簇发振荡, 分岔机理, 吸引子结构**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Pq**DOI:** 10.7498/aps.66.110501

1 引言

不同尺度耦合系统的研究最早可以追溯到 Poincaré 研究行星轨道时提出的奇异摄动方程^[1], 但是直到诺贝尔奖获得者 Hodgkin 和 Huxley 建立了快慢两尺度神经元放电模型 (H-H 模型), 成功地再现了其中的簇发放电行为, 不同尺度耦合系统的复杂性才引起了学术界的高度重视^[2].

所谓不同尺度耦合, 指的是所考察的对象涉及多个尺度, 这些尺度可以是时间上的, 也可以是空间上的, 当然也可以是时空尺度混合的^[3]. 不同尺度之间的耦合, 从其无量纲数学模型的形式上, 大致可以分为两类, 一类是时域上的, 即存在不同量级向量场分量之间的耦合, 另一类是频域上的, 即耦合系统不同频率之间存在量级差距^[4].

导致不同尺度耦合的因素不仅可能来自于真实时间上的快慢效应, 如催化反应中存在不同量级

的反应速率^[5], 也可能来自于几何上的尺度效应, 如航天器中船体和太阳能帆板之间的耦合^[6], 输电塔线体系中塔线之间的耦合^[7], 还有其他诸如系统内部的物理效应、系统结构效应等^[8]. 通过无量纲变化后, 在相应的数学模型中出现不同的状态变量或其组合之间在变化速率上的量级差异^[9].

不同尺度耦合动力系统通常表现为大幅振荡与微幅振荡的组合, 如绳系卫星中的张弛振荡 (空间上的多尺度)^[10] 和催化反应中的混合模态振荡 (时间上的多尺度)^[11]. 自诺贝尔奖获得者 Hodgkin 和 Huxley 建立了两时间尺度神经元模型 (H-H 模型) 以来, 这种特殊的振荡形式统一称为簇发振荡, 当状态变量处于静止或微幅振荡时, 称为沉寂态或静息态, 而表现为大幅振荡时, 则称为激发态. 系统状态在沉寂态和激发态之间来回变化的振荡模式, 称为簇发振荡^[12].

针对不同尺度耦合动力系统, 国内外学者开展了大量的研究工作. 由于缺乏有效的分析方法,

* 国家自然科学基金 (批准号: 11472115, 11472116) 和国家自然科学基金重点项目 (批准号: 11632008) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

起初大都围绕着快慢耦合系统的模型分析、近似求解、数值仿真和实验分析等方面,直到Linzell快慢分析方法的引入,相关工作才上升到机理分析的层次^[13].以Izhikevich为代表的一些学者,深入探讨了含一维慢子系统的低维耦合系统中的各种簇发振荡及其分岔机理^[14].然而由于Linzell快慢分析方法仅对含一维慢变量的自治耦合系统有效,同时高维系统存在诸如高余维分岔等现象,迄今为止,相关工作大都是针对含一维慢变量及三维以内快子系统的自治耦合系统开展的,如Shimizu等^[15]探讨了弱周期激励下两维BVP振子的簇发振荡,Shilnikov和Kolomiets^[16]给出了两快一慢三维Hindmarsh-Rose模型中Hopf分岔下的不同簇发.近年来,针对典型的非自治系统——周期激励系统,当周期激励频率与系统固有频率之间存在量级差距,即包含频域上的不同尺度时,本课题组开展了富有成效的研究工作,提出了转换相图的分析方法,揭示了多种形式的簇发振荡及其产生机理^[17–22].

必须指出的是,目前大部分工作是针对时域上的不同尺度耦合,也即快慢耦合系统开展的,如振幅调谐的簇发振荡^[23],而对于频域上的不同尺度耦合,即系统含两个或以上存在量级差距的频率时的簇发振荡,研究尚不深入.同时,所考察的簇发振荡基本上含有对称结构,导致从沉寂态到激发态或从激发态返回沉寂态的形式相对单一,如旋转机械中的簇发振荡^[24].为探讨存在频域两尺度耦合的非对称动力系统的复杂动力学行为,本文以经典的蔡氏振子为例,通过引入非对称结构的控制器和周期激励电流源,构建存在频域两尺度耦合的非对称动力系统模型,重点探讨不同周期激励幅值下各种典型的非对称簇发振荡的吸引子结构及其相应的产生机理.

2 数学模型

蔡氏电路由于存在丰富的非线性现象一直是广泛应用于证实许多非线性理论或控制方案的经典模型之一.为保证原系统的对称性,在其控制器的设计中,一般采用由奇次向量场决定的控制项.偶次向量场会破坏系统的对称性,如引入二次项控制器,其混沌结构存在非对称性^[25],而引入非对称分段光滑的控制器时,则吸引子存在非对称多涡卷

结构^[26].因此考虑如下二次项控制器^[16]下广义蔡氏振子的不同尺度耦合效应:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + f(x) + w, \\ \dot{y} = x - y + z + u, \\ \dot{z} = -y, \\ \dot{u} = 1 - u^2 + y, \end{cases} \quad (1)$$

式中 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 是状态变量, u 为非对称结构的反馈控制项, $f(x) = -x(x^2 - 1)(x^2 - \beta)$ 为非线性模块, $w = A \sin(\Omega t)$ 为周期外激励项.当激励振幅 $A = 0$,即外激励项不存在时,自治系统((1)式)会按照其固有频率振荡.为考察频域上的不同尺度效应,取定激励频率 $\Omega \ll \omega$,其中 ω 为固有频率,此时系统((1)式)会存在各种复杂的簇发振荡现象.

3 分岔分析

当 $\Omega \ll \omega$ 时,系统((1)式)的状态变量主要按照固有频率振荡.在固有频率所对应的任一个周期 $T = [t_0, t_0 + 2\pi/\omega]$ 内,激励项 w 将从 W_A 变化到 W_B ,其中 $W_A = A \sin(\Omega t_0)$, $W_B = A \sin(\Omega t_0 + 2\pi\Omega/\omega)$.由于 $\Omega/\omega \ll 1$,因此 $W_A \approx W_B$,也就是说,在固有频率的任一周期内,激励项 w 的变化非常小,虽然从更长的时间来看, w 会在 $-A$ 和 $+A$ 之间变化.整个外激励项 w 可以视为一个慢变参数.下面我们分析系统((1)式)随慢变参数 w 变化的分岔行为.

系统((1)式)的平衡点 $E_{\pm}$ 可以表示为 $E_{\pm}(x_0, y_0, z_0, u_0) = (x_0, 0, \pm 1 - x_0, \mp 1)$,其中 x_0 满足 $f(x_0) + w - x_0 = 0$,其相应的特征方程可以表示为

$$E_+ : \lambda^4 + (4 - S)\lambda^3 + (4 - 3S)\lambda^2 + 2(1 - S)\lambda + 2(1 - S) = 0, \quad (2)$$

$$E_- : \lambda^4 - S\lambda^3 + (S - 4)\lambda^2 + 2(S - 1)\lambda + 2(S - 1) = 0, \quad (3)$$

式中 $S = df(x_0)/dx = -5x_0^4 + 3(\beta + 1)x_0^2 - \beta$.由Routh-Hurwitz准则可知,当 $S < (3 - \sqrt{13})/2$ 时, E_+ 为稳定的焦点.当 $S = (3 - \sqrt{13})/2$ 时,产生超临界Hopf分岔,导致周期振荡,其相应的分岔频率 $\varpi = \sqrt{(2 - 2S)/(4 - S)} \approx 0.7782$.当 $S = 1$ 时,产生Fold分岔,导致轨迹在不同平衡点之间跳跃. E_- 为不稳定鞍点.

图1所示为 $\beta = 2.0$ 时系统随慢变参数 w 变化的平衡曲线, 其中粗线表示稳定的平衡曲线, 细线表示不稳定平衡曲线. 从图1可以看出, 随着 w 的变化, 系统平衡点的数目在一、三和五之间变化.

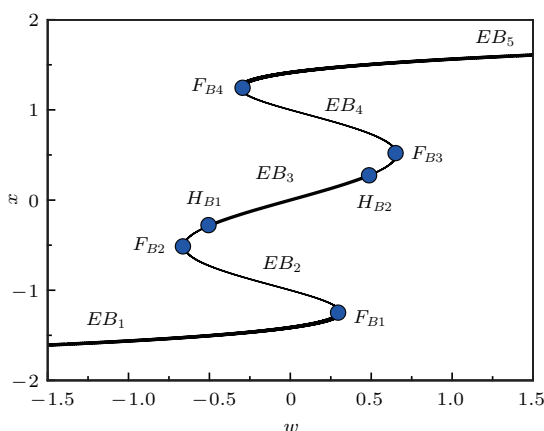


图1 系统随慢变参数 w 变化的平衡曲线及分岔点图
Fig. 1. Equilibrium branches as well as bifurcation points with the variation of the slowly-varying parameter w .

当 $w = 0.3083$ 时, 稳定平衡曲线 EB_1 与不稳定平衡曲线 EB_2 在Fold分岔点 F_{B1} 相遇, 平衡线 EB_3 由两Hopf分岔点 H_{B1} 和 H_{B2} ($w = \pm 0.4626$)分为三段, 两分岔点 H_{B1} 和 H_{B2} 之间为稳定焦点, 其他两段为不稳定鞍点, 分别与不稳定平衡曲线 EB_2 和 EB_4 在Fold分岔点 F_{B2} ($w = -0.6569$)和 F_{B3} ($w = 0.6569$)相遇. 不稳定平衡曲线 EB_4 和稳定平衡曲线 EB_5 在Fold分岔点 F_{B4} ($w = -0.3083$)相遇.

4 周期簇发振荡

由于存在频域上的不同尺度, 系统会产生一些特殊的振荡形式. 从图1可以发现, 当 $A < 0.3083$ 时, 平衡曲线不含有分岔点, 数值模拟发现, 此时系统轨迹表现为周期振荡, 其振荡频率为外激励频率, 不存在快慢两尺度相互作用导致的簇发振荡. 当 $A > 0.3083$ 时, 系统会出现复杂的簇发振荡行为. 为考察系统的不同尺度效应, 本文分析三种典型情形, 即 $A = 0.6, 3.0, 6.0$ 时系统的复杂动力学特性.

4.1 情形一: $A = 0.6$

图2所示为 $A = 0.6$ 时系统的周期振荡相图. 从图1可以看出, 当 $A = 0.6$, 即 $w \in [-0.6, 0.6]$ 时,

快子系统最多可存在三个稳定的平衡点, 分别位于平衡曲线 EB_1 , EB_3 和 EB_5 上, 系统轨迹则围绕这三个稳定的平衡点振荡(图2). 结合图3中 x 的时间历程可以发现, 由于慢变量 w 变化非常缓慢, 轨迹沿稳定的平衡曲线 EB_5 运动到快子系统的Fold分岔点 F_{B4} 时, 产生跳跃现象, 使得轨迹趋向稳定平衡曲线 EB_3 .

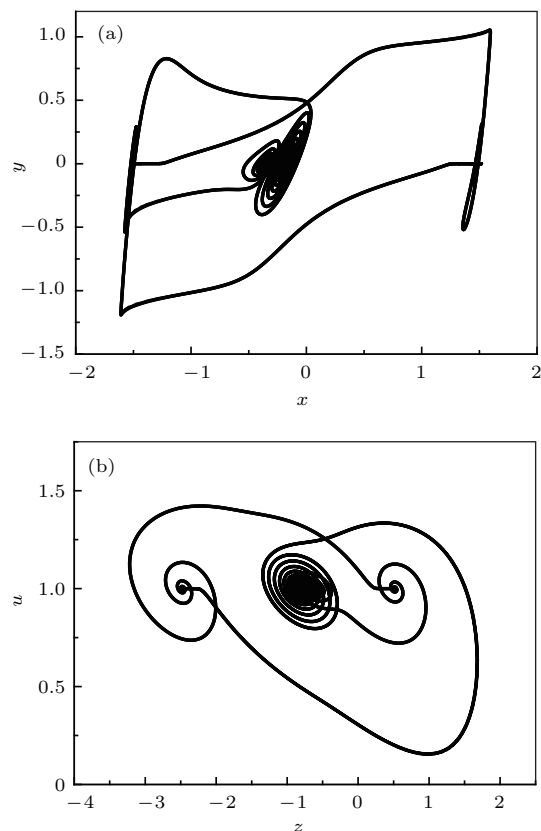


图2 $A = 0.6$ 时的相图 (a) x - y 平面上的相图; (b) z - u 平面上的相图

Fig. 2. Phase portrait for $A = 0.6$: (a) Phase portrait on the x - y plane; (b) phase portrait on the z - u plane.

分岔点 F_{B4} 与 $w = -0.3083$ 所对应的位于 EB_3 上的快子系统平衡点之间距离较大, 导致轨迹发生大幅振荡, 随着慢变量 w 的继续减小, 振荡幅值逐渐减小, 轨迹逐渐稳定于 EB_3 , 并沿平衡曲线 EB_3 继续运动. 当轨迹抵达Hopf分岔点 H_{B1} 时, 产生围绕 EB_3 的振荡, 振荡幅值随 w 的继续减小而逐渐增加. 当振荡幅值增大到一定值时, 轨迹转向围绕 EB_1 振荡, 并逐渐稳定到 EB_1 上.

为进一步揭示该周期簇发振荡的分岔机理, 图4分别给出了 w - x 平面上的相图及其与快子系统平衡曲线的叠加图.

假设轨迹从 w 的最小值 $w = -0.6$, 即 A_1 点出发(图4(a)), 由于受稳定的平衡曲线 EB_1 的影

响, 此时轨迹几乎严格沿 EB_1 运动, 表现为沉寂态 QS_1 . 当轨迹运动到分岔点 F_{B1} 附近时, 由 Fold 分岔产生跳跃现象, 导致大幅振荡, 进入激发态 SP_1 . 随慢变参数 w 的增加, 振荡幅值减小, 并逐渐趋于稳定平衡曲线 EB_5 , 而后几乎严格沿 EB_5 运动, 进入沉寂态 QS_2 .

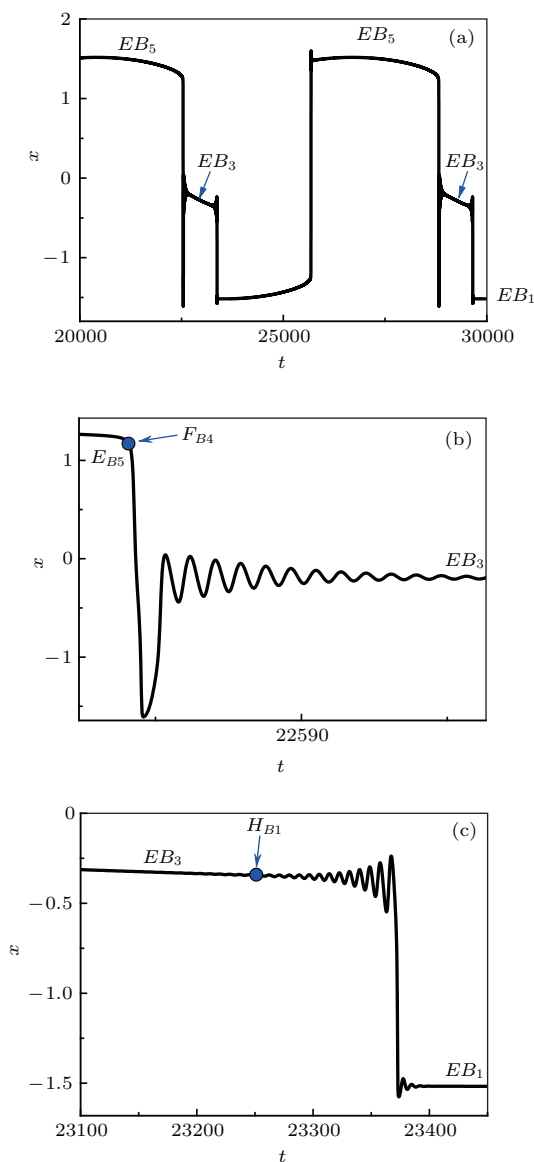


图3 $A = 0.6$ 时 x 的时间历程

Fig. 3. Time history of x for $A = 0.6$.

当慢变量 w 到达其最大值 $w = 0.6$, 即 A_3 点处, w 会随时间的推进而减小, 使得轨迹在 A_3 点调头, 几乎严格沿 EB_5 运动, 直到抵达分岔点 F_{B4} 附近, 由 Fold 分岔产生跳跃现象, 导致大幅振荡, 进入围绕稳定平衡曲线 EB_3 振荡的激发态 SP_2 . 随着慢变量 w 的减小, 振荡幅值减小, 并逐渐稳定于平衡曲线 EB_3 , 进入沉寂态 QS_3 .

当轨迹沿 EB_3 运动到分岔点 H_{B1} 时, 由 Hopf 分岔产生围绕 EB_3 的振荡, 随着 w 的减小振荡幅值逐渐增加, 进入激发态 SP_3 . 图 5 所示为从激发态 SP_3 回到沉寂态 QS_1 的分岔机理.

当轨迹处于大幅振荡的激发态 SP_3 时, 随着 w 减小, 激发态振荡幅值逐渐增加, 当振荡幅值增加

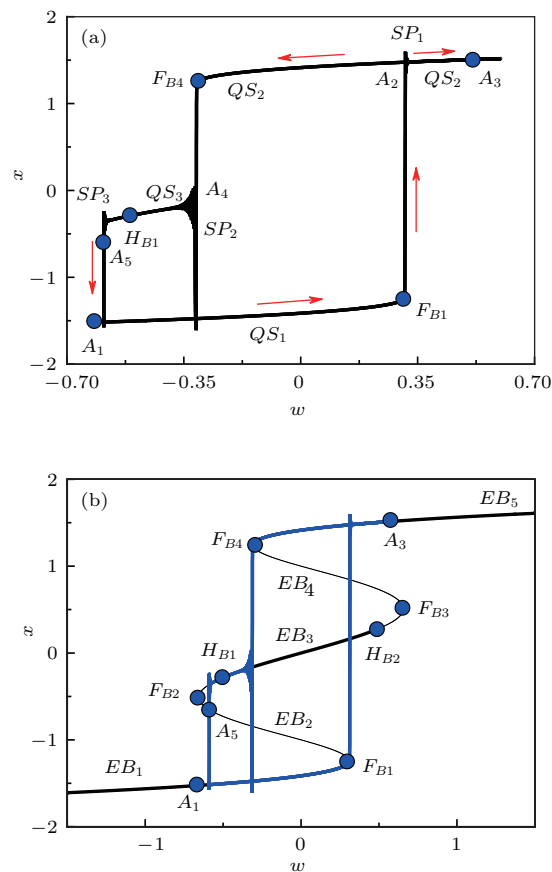


图4 (网刊彩色)(a) $A = 0.6$ 时 $w-x$ 平面上的转换相图; (b) $A = 0.6$ 时 $w-x$ 平面上快子系统平衡曲线与转换相图的叠加图

Fig. 4. (color online) (a) Transformed phase portrait on the $w-x$ plane when $A = 0.6$; (b) overlap of equilibrium orbit and transformed phase portrait on the $w-x$ plane when $A = 0.6$.

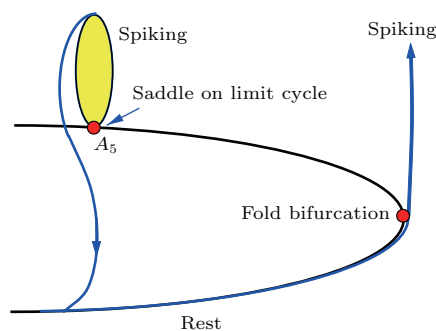


图5 (网刊彩色) 激发态 SP_3 到沉寂态 QS_1 的分岔机理
Fig. 5. (color online) Bifurcation mechanism of the spiking state SP_3 to the quiescent state QS_1 .

到一定程度时, 与位于 EB_2 上的不稳定鞍点相互作用, 产生 Saddle on limit cycle 分岔, 导致从 Hopf 分岔点 H_{B1} 分岔出的极限环失稳, 轨迹产生跳跃现象, 为快子系统稳定的平衡曲线 EB_1 吸引, 进入沉寂态 QS_1 , 并几乎严格沿 EB_1 运动, 随后抵达慢变量 w 的极小值 $w = -0.60$, 即回到出发点 A_1 , 完成一个周期的簇发振荡. 根据沉寂态和激发态相互转化的分岔模式可以将其称为非对称 Fold/Fold-Hopf 型簇发.

4.2 情形二: $A = 3.0$

随着激励幅值的增加, 簇发振荡吸引子的结构也会发生变化. 图 6 所示为 $A = 3.0$ 时簇发振荡分别在 x - y 和 z - u 平面上的相图, 从图中可以看出, 与 $A = 0.6$ 时的相图不同, 轨迹不会收敛到快子系统的稳定平衡曲线 EB_3 上, 而是围绕该平衡曲线产生大幅振荡.

从图 7 的时间历程可以发现, 轨迹几乎严格按照平衡曲线 EB_1 运动, 由 Fold 分岔跳跃到稳定平

衡曲线 EB_5 上, 又由 Fold 分岔, 产生跳跃现象, 轨迹转向围绕稳定平衡曲线 EB_3 振荡. 当轨迹尚未收敛到稳定曲线 EB_3 上时, 由于产生 Hopf 分岔, 轨迹发生围绕该平衡曲线的振荡, 且振荡幅值随着时间的推进逐渐增加, 轨迹由 Saddle on limit cycle 分岔跳向稳定平衡曲线 EB_1 .

图 8(a) 所示为 $A = 3.0$ 时系统轨迹的转换图与快子系统平衡曲线的叠加图, 图 8(b) 为其局部放大图.

假设轨迹从慢变量 w 的最小值 $w = -3.0$, 即 A_1 点出发, 从图 8(a) 可以看出, 轨迹几乎严格沿稳定平衡曲线 EB_1 运动, 处于沉寂态 QS_1 . 当轨迹抵达分岔点 F_{B1} 时, 由 Fold 分岔产生跳跃现象, 轨迹跳向稳定平衡曲线 EB_5 , 由于 Fold 分岔点与平衡曲线 EB_5 之间的距离较大, 产生大幅振荡, 进入激发态 SP_1 (图 8(b)). 随着 w 的增加, 轨迹逐渐稳定到平衡曲线 EB_5 , 并几乎严格沿 EB_5 运动, 进入沉寂态 QS_2 , 直到抵达慢变量 w 的最大值 $w = 3.0$, 即 A_3 点.

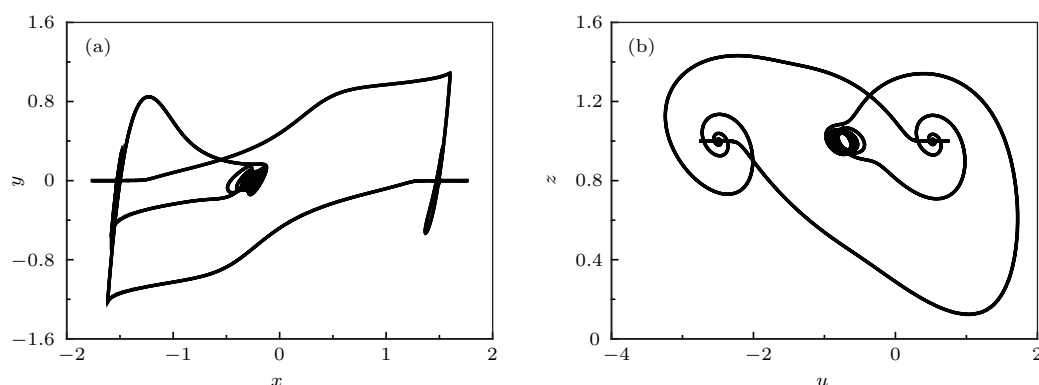


图 6 $A = 3.0$ 时的相图 (a) x - y 平面上的相图; (b) z - u 平面上的相图

Fig. 6. Phase portrait for $A = 3.0$: (a) Phase portrait on the x - y plane; (b) phase portrait on the z - u plane.

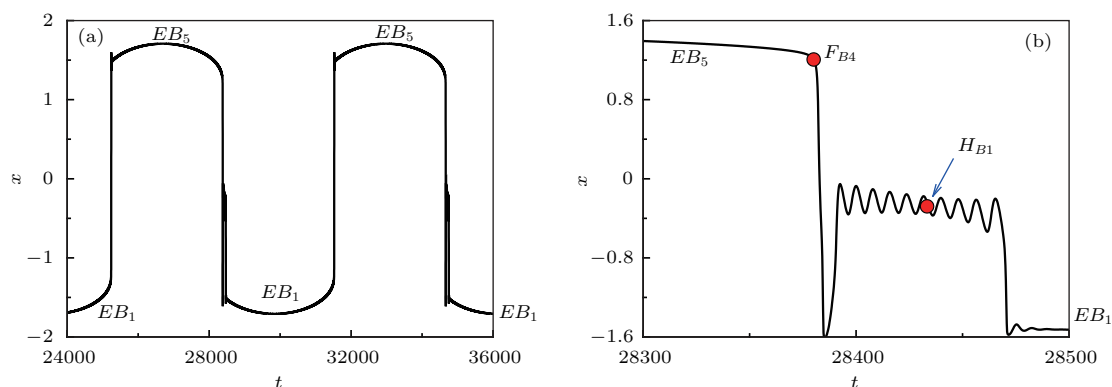


图 7 $A = 3.0$ 时 x 的时间历程

Fig. 7. Time history of x for $A = 3.0$.

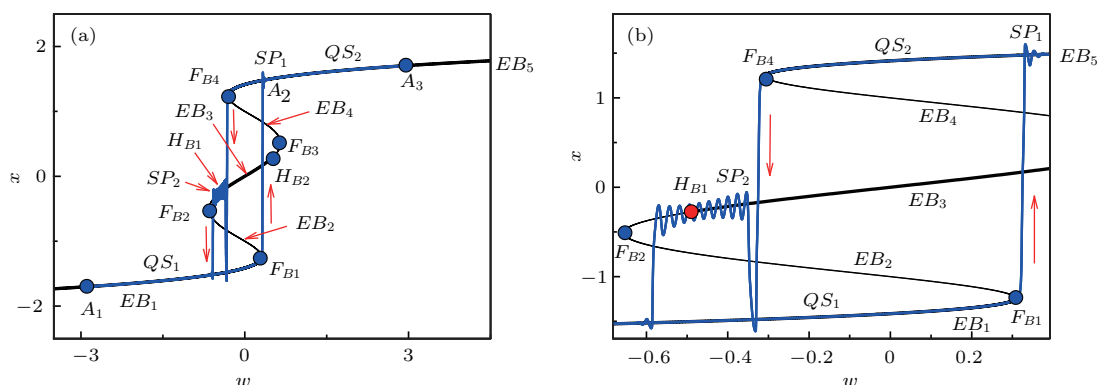


图8 (网刊彩色) $A = 3.0$ 时 w - x 平面上 (a) 快子系统平衡曲线与转换相图的叠加图及 (b) 其局部放大图
Fig. 8. (color online) (a) Overlap of equilibrium orbit and transformed phase portrait on the w - x plane and (b) locally enlarged diagram of the overlap when $A = 3.0$.

随着时间的继续增加, 慢变量 w 减小, 导致轨迹在 A_3 点调头, 并几乎严格沿稳定平衡曲线 EB_5 运动, 依然处于沉寂态 QS_2 , 直到抵达分岔点 F_{B4} , 由 Fold 分岔产生跳跃现象, 导致轨迹转向稳定平衡曲线 EB_3 , 产生大幅振荡, 进入激发态 SP_2 . 随着 w 的减小, 振荡幅值逐渐减小, 直到抵达分岔点 H_{B1} , 由 Hopf 分岔, 导致振荡幅值随 w 的减小而增加.

当振荡幅值增加到一定程度时, 轨迹由 Saddle on limit cycle 分岔跳向稳定平衡曲线 EB_1 , 并随慢变量 w 的继续减小而逐渐稳定到稳定平衡曲线 EB_1 上, 进入沉寂态 QS_1 , 直到轨迹回到出发点 A_1 , 完成一个周期的振荡.

必须指出的是, 该簇发振荡与图4中簇发振荡结构大致相似, 最大区别在于围绕平衡曲线 EB_3 附近的轨迹结构. 由快子系统在分岔点 F_{B4} 时的慢变量值 $w = -0.3083$ 可知, 此时在平衡曲线 EB_3 上的 x 值为 $x_0 = -0.1632$, 其相应的特征值可以计算为 $\lambda_1 = -2.2683$, $\lambda_2 = -3.3063$, $\lambda_{3,4} = -0.0946 \pm 0.8533I$, 表明该快子系统平衡点为稳定焦点.

在稳定平衡线 EB_3 失稳的 Hopf 分岔点 $x_H = -0.2678$ 处, 相应快子系统平衡点的特征值分别为 $\lambda_1 = -2.7221$, $\lambda_2 = -1.5807$, $\lambda_{3,4} = \pm 0.7882I$. 从图9可以看出, 此时激发态 SP_2 振荡频率随时间变化而变化, 当轨迹从沉寂态 QS_2 进入激发态时, 振荡频率的理论值大致接近在平衡曲线 EB_3 相应平衡点处的一对共轭特征值的虚部, 即 $\Omega_{L2} \approx 2\pi/0.8533 = 7.3634$, 这与图9中的数值结果 $\Omega_{P2} = 2\pi/T_2 \approx 7.3713$ 符合良好. 当轨迹经过 Hopf 分岔点时, 其振荡频率的理论值 $\Omega_{L1} \approx 2\pi/0.7882 = 7.9716$, 也与数值模拟结果

$\Omega_{P1} = 2\pi/T_1 \approx 7.9654$ 大致符合.

为进一步说明导致上述两周期簇发振荡在快子系统稳定平衡曲线 EB_3 附近出现结构差别的原因, 图10分别给出了两激励幅值下系统及慢变量 w 随时间变化的历程. 由上述分析可知, 当慢变量 $w = -0.3083$ 时, 轨迹产生 Fold 分岔, 而在 $w = -0.4626$ 时, 则产生 Hopf 分岔. 从图10(b)可以看出, 当 $A = 0.6$ 时, 慢变量 w 分别到达两分岔点的时间间隔 $T_2 = 317.68$, 而当 $A = 3.0$ 时, 时间间隔 $T_1 = 51.83$, 这与图10(a)中两真实轨迹之间时间上的距离 $T_{S1} = 313.54$ 及 $T_{S2} = 53.16$ 均符合良好.

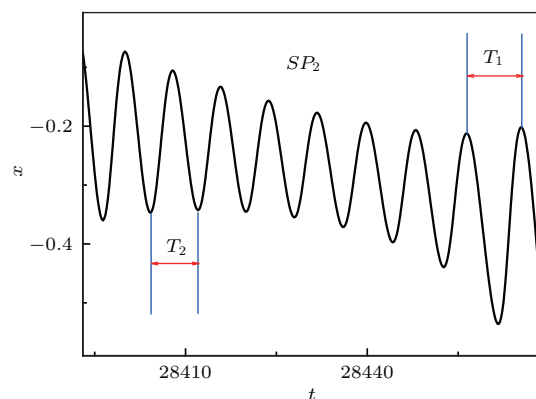


图9 $A = 3.0$ 时 x 的时间历程局部放大图

Fig. 9. Locally enlarged time history of x for $A = 3.0$.

从图10可以发现, 虽然快子系统的平衡曲线及其相应的分岔点位置与外激励幅值无关, 但是, 随着外激励振幅的增加, 轨迹从沉寂态 QS_2 由 Fold 分岔进入激发态, 抵达 Hopf 分岔点所需时间会越来越短. 当 $A = 0.6$ 时, 由于慢变量抵达 Hopf 分岔点需要较长的时间, 因而随着时间的增加, 从 QS_2 由 Fold 分岔导致的激发态的振荡越来越小, 能够

逐渐稳定到快子系统的稳定平衡曲线 EB_3 上. 当外激励幅值较大, 如 $A = 3.0$ 时, 由于慢变量抵达 Hopf 分岔点的时间非常短, 轨迹虽然受稳定平衡曲线 EB_3 的吸引, 但尚未收敛到该平衡曲线, 就又发生 Hopf 分岔, 使得振荡幅值随慢变量的减小而逐渐增加, 图 4 中 QS_3 消失, SP_2 和 SP_3 合并为一个激发态, 即图 9 中的 SP_2 .

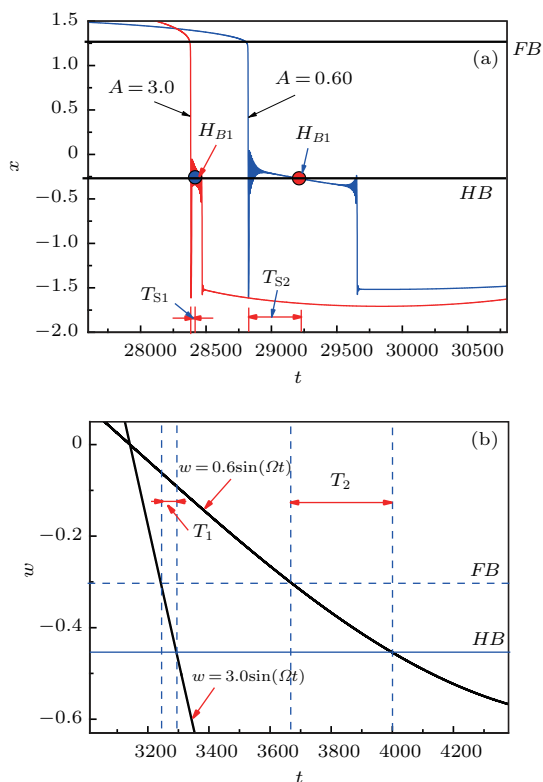


图 10 (网刊彩色) 不同激励幅值下的时间历程 (a) 轨迹的时间历程; (b) 慢变量 w 随时间的变化

Fig. 10. (color online) Time histories with different exciting amplitudes: (a) Time history of portrait; (b) time history of slowly-varying parameter w .

4.3 情形三: $A = 6.0$

随着外激励幅值的继续增加, 簇发振荡的吸引子结构还会发生变化. 图 11 所示为 $A = 6.0$ 时簇发振荡分别在 x - y 和 z - u 平面上的相图, 从图中可以看出, 吸引子结构与前两种情形不同, 主要是轨迹围绕稳定平衡曲线 EB_3 部分的结构消失, 从而表现为分别围绕稳定平衡曲线 EB_1 和 EB_5 振荡的点-点型簇发振荡.

图 12 为状态变量 x 的时间历程, 从图中可以看出, 几乎严格沿稳定平衡曲线 EB_1 运动的轨迹, 由 Fold 分岔产生跳跃现象, 导致轨迹趋向稳定平衡曲线 EB_5 , 当轨迹逐渐稳定于 EB_5 后, 便几乎严格沿该平衡曲线运动, 直到再次发生 Fold 分岔, 跳向稳

定平衡曲线 EB_1 .

通过图 12 中时间历程的计算可以发现, 由稳定平衡曲线 EB_1 跳向 EB_5 产生振荡的频率 $\Omega_{M1} = 2\pi/T_1 = 0.8791$, 由 EB_5 跳向 EB_1 产生振荡的频率 $\Omega_{M2} = 2\pi/T_2 = 0.8763$, 分别近似于快子系统位于稳定平衡曲线 EB_5 和 EB_1 上与该跳跃点对应的平衡点的特征值一对共轭复根的虚部, 也就是说, 两振荡过程分别近似等于从不同跳跃点出发向各种稳定平衡曲线逐渐逼近的过程.

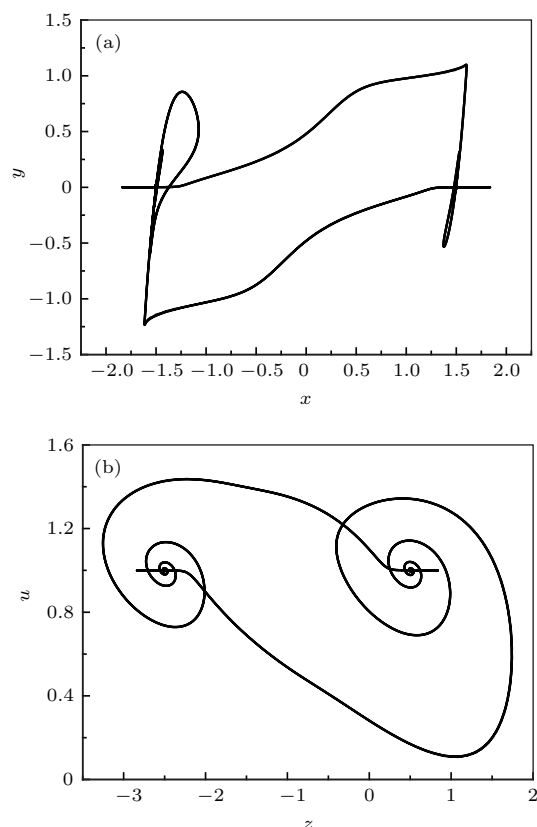


图 11 $A = 6.0$ 时的相图 (a) x - y 平面上的相图; (b) z - u 平面上的相图

Fig. 11. Phase portrait for $A = 6.0$: (a) Phase portrait on the x - y plane; (b) phase portrait on the z - u plane.

为进一步揭示该周期簇发振荡的产生机理, 图 13(a) 给出了 $A = 6.0$ 时系统轨迹的转换相图与快子系统平衡曲线的叠加图, 图 13(b) 为其局部放大图.

假设轨迹从慢变量 w 的最小值 $w = -6.0$, 即图 13(a) 中的 A_1 点出发, 轨迹几乎严格沿稳定平衡曲线 EB_1 运动, 表现为沉寂态 QS_1 , 直到轨迹抵达分岔点 F_{B1} , 由 Fold 分岔跳向 EB_5 , 产生大幅振荡, 进入激发态 SP_1 , 振荡幅值随慢变量 w 的增加而逐渐减小, 直至收敛于稳定平衡曲线 EB_5 , 进入沉寂态 QS_2 .

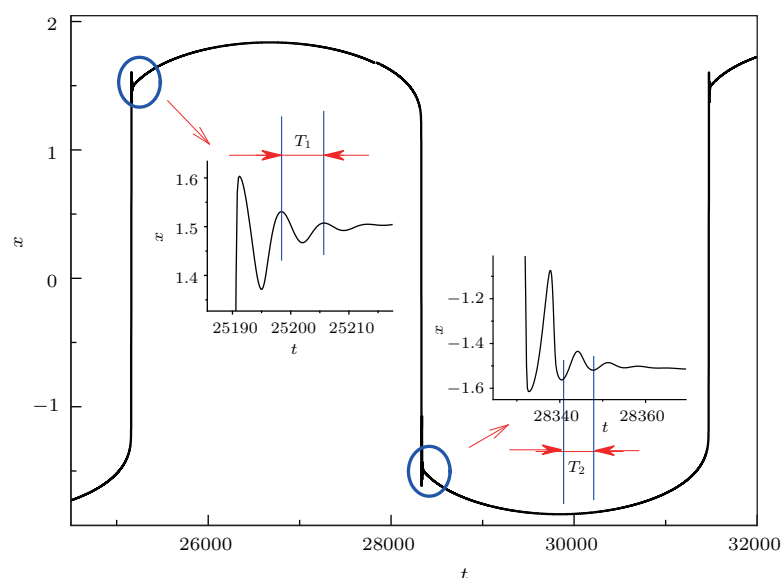

 图 12 $A = 6.0$ 时 x 的时间历程

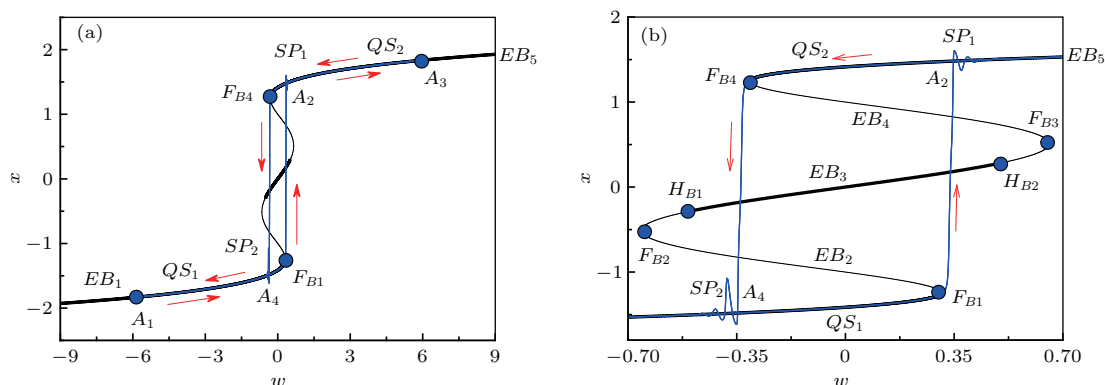
 Fig. 12. Time history of x for $A = 6.0$.

 图 13 (网刊彩色) $A = 6.0$ 时 (a) w - x 平面上快子系统平衡曲线与转换相图的叠加图及 (b) 其局部放大图

 Fig. 13. (color online) (a) Overlap of equilibrium orbit and transformed phase portrait on the w - x plane and (b) locally enlarged diagram of the overlap when $A = 6.0$.

沿稳定平衡曲线 EB_5 运动的轨迹在慢变量 w 达到其最大值 $w = 6.0$, 即图 13(a) 中的 A_3 点时, 由于慢变量随时间的增加而减小, 轨迹在 A_3 点处调头, 继续沿 EB_5 运动, 直到抵达分岔点 F_{B4} , 由 Fold 分岔跳向 EB_1 , 产生大幅振荡, 进入激发态 SP_2 , 振荡幅值随慢变量 w 的增加而逐渐减小, 收敛于稳定平衡曲线 EB_1 , 进入沉寂态 QS_1 , 直至抵达出发点 A_1 , 完成一个周期的振荡. 从簇发振荡分类的角度来看, 该簇发振荡可以称为非对称点-点型 Fold/Fold 簇发.

必须指出的是, 从分岔点 F_{B1} 和 F_{B4} 产生的 Fold 分岔均不趋向稳定平衡曲线 EB_3 . 产生这一现象的主要原因是, 当外激励幅值较大时, 系统能量的交换力度迅速增强, 导致能量居中的稳定平衡

曲线 EB_3 的吸引域快速收缩, 即分岔点 F_{B1} 和 F_{B4} 跳出了稳定平衡曲线 EB_3 的吸引域, 这也可以通过以分岔点为初值对快子系统进行的数值仿真得到证实.

5 结 论

存在频域两尺度的动力系统在非对称控制器作用下会引发各种模式的非对称簇发振荡. 当激励频率远小于系统的固有频率时, 整个外激励项可以视为慢变参数. 在考察系统随外激励幅值变化的动力学演化过程时, 虽然快子系统存在一致的平衡曲线及相应的分岔图, 但随着外激励幅值的变化, 簇发振荡的结构及其产生机理存在差异. 一方面, 外激励幅值的变化会引起不同稳定平衡曲线吸引域

的变化, 另一方面, 也会使得慢变量穿越不同分岔点的时间间隔发生变化, 从而导致系统产生不同形式的簇发振荡.

参考文献

- [1] Cardin P T, de Moraes J R, da Silva P R 2015 *J. Math. Anal. Appl.* **423** 1166
- [2] Hodgkin A L, Huxley A F 1990 *Bull. Math. Biol.* **52** 25
- [3] Sánchez A D, G. Izús G, Erba M G, Deza R R 2014 *Phys. Lett. A* **378** 1579
- [4] Rakaric Z, Kovacic I 2016 *Mech. Syst. Signal Process.* **81** 35
- [5] Chumakov G A, Chumakova N A 2003 *Chem. Eng. J.* **91** 151
- [6] Jia F L, Xu W, Li H N, Hou L Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 100503 (in Chinese) [贾飞蕾, 徐伟, 李恒年, 侯黎强 2013 物理学报 **62** 100503]
- [7] Yang S C, Hong H P 2016 *Eng. Struct.* **123** 490
- [8] Cai Z Q, Li X F, Zhou H 2015 *Aerosp. Sci. Technol.* **42** 384
- [9] Li X H, Hou J Y 2016 *Int. J. Non-Linear Mech.* **81** 165
- [10] Yu B S, Jin D P, Pang Z J 2014 *Sci. Sin. Phys. Mech. Astron.* **44** 858 (in Chinese) [余本嵩, 金栋平, 庞兆君 2014 中国科学: 物理学 力学 天文学 **44** 858]
- [11] Bi Q S 2012 *Sci. China Ser.* **E10** 2820
- [12] Kim S, Lim W 2016 *Neural Networks* **79** 53
- [13] Izhikevich E M 2000 *Int. J. Bifurcation Chaos* **10** 1171
- [14] Izhikevich E M 2003 *Trends Neurosci.* **26** 161
- [15] Shimizu K, Saito Y, Sekikawa M, Inaba N 2012 *Physica D* **241** 1518
- [16] Shilnikov A, Kolomiets M 2008 *Int. J. Bifurcation Chaos* **18** 2141
- [17] Han X J, Xia F B, Ji P, Bi Q S, Kurths J 2016 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Si.* **36** 517
- [18] Bi Q S, Zhang R, Zhang Z D 2014 *Appl. Math. Comput.* **243** 482
- [19] Yu Y, Zhang Z D, Bi Q S, Gao Y 2016 *Appl. Math. Model* **40** 1816
- [20] Zhang X F, Wu L, Bi Q S 2016 *Chin. Phys. B* **25** 070501
- [21] Xing Y Q, Chen X K, Zhang Z D, Bi Q S 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 090501 (in Chinese) [邢雅清, 陈小可, 张正娣, 毕勤胜 2016 物理学报 **65** 090501]
- [22] Zheng S, Han X J, Bi Q S 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Si.* **16** 1998
- [23] Vo T, Kramer M A, Kaper T J 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 268101
- [24] Zvonko R, Ivana K 2016 *Mech. Syst. Signal Process.* **81** 35
- [25] Milicevic K, Nyarko E K, Biondic I 2016 *Nonlinear Dyn.* **81** 51
- [26] Srinivasan K, Chandrasekar V K, Pradeep R G 2016 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Si.* **39** 156

Structures of the asymmetrical bursting oscillation attractors and their bifurcation mechanisms*

Wu Tian-Yi¹⁾²⁾ Chen Xiao-Ke¹⁾ Zhang Zheng-Di³⁾ Zhang Xiao-Fang¹⁾ Bi Qin-Sheng^{1)†}

1) (Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

2) (Zhenjiang Watercraft College, Zhenjiang 212003, China)

3) (Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 9 December 2016; revised manuscript received 16 January 2017)

Abstract

The main purpose of this study is to investigate the characteristics as well as the bifurcation mechanisms of the bursting oscillations in the asymmetrical dynamical system with two scales in the frequency domain. Since the slow-fast Hodgkin-Huxley model was established to successfully reproduce the activities of neuron, the complicated dynamics of the system with multiple time scales has become a hot research topic due to the wide engineering background. The dynamical system with multiple scales often presents periodic oscillations coupled by large-amplitude oscillations at spiking states and small-amplitude oscillations at quiescent states, which are connected by bifurcations. Up to now, most of the reports concentrate on bursting oscillations in the symmetric systems, in which there exists only one form of spiking oscillations and quiescence, respectively. Here we explore some typical forms of bursting behavior in an asymmetrical dynamical system with periodic excitation, in which there exists an order gap between the exciting frequency and the natural frequency. As an example, based on the typical Chua's oscillator, by introducing an asymmetrical controller and a periodically changed current source, and choosing suitable parameter values, we establish an asymmetrical dynamical system with two scales in the frequency domain. Since the exciting frequency is much smaller than the natural frequency, the whole periodic exciting term can be regarded as a slowly-varying parameter, leading to the fast subsystem in autonomous form. Since all the equilibrium curves and relevant bifurcations are presented in the form related to the slowly-varying parameter, the transformed phase portraits describing the evolution relationship between the state variables and the slowly-varying parameter are employed to account for the mechanism of the bursting oscillations. With the variation of the slowly-varying parameter, different equilibrium states and relevant bifurcations in the fast subsystem are presented. It is found that for different parameter values, multiple balance curves of the fast subsystem may coexist, which affect the structure of the bursting attractor. For the other parameters fixed to certain values, the balance curve with the variation of the slowly-varying parameter is presented. Three typical cases with different exciting amplitudes are considered, corresponding to different situations of coexistence of equilibrium states in the fast subsystem. In the first case, there exist at most three stable equilibrium points in the fast subsystem. Bursting attractor that oscillates around the three points can be observed, in which fold and Hopf bifurcations lead to the alternations between spiking states and quiescent states, while in the second case, saddle on the limit cycle bifurcation may cause the repetitive spiking oscillations to jump to the equilibrium curve. In the third case with relatively large exciting amplitude, only two equilibrium curves may involve the bursting oscillations, in which fold bifurcations lead to the alternation between the quiescent states and spiking states. Unlike the structures of bursting oscillations in the symmetric system, different

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11472115, 11472116) and the Major National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11632008).

† Corresponding author. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

forms of asymmetrical bursting oscillations with different periodic exciting amplitudes can be observed, the mechanisms of which are presented. It is pointed out that the change of the external exciting amplitude, does not only cause the variation of the attracting basins corresponding to different stable equilibrium branches, but also leads to the change of the temporal intervals when the trajectory passes different bifurcation points, respectively, which results in different patterns of bursting oscillations. Furthermore, since the slowly-varying parameter determined by the whole exciting term changes between two extreme values determined by the amplitude, the trajectory of the bursting oscillations of the transformed phase portrait returns at the two extreme values. The properties of equilibrium branches between the two extreme values determine the forms of the moving attractors.

Keywords: asymmetrical system, bursting oscillation, bifurcation mechanism, attractor structure

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: [10.7498/aps.66.110501](https://doi.org/10.7498/aps.66.110501)