

基于旋转场曲率的二维剪切梁单元建模

张大羽 罗建军 郑银环 袁建平

Analysis of planar shear deformable beam using rotation field curvature formulation

Zhang Da-Yu Luo Jian-Jun Zheng Yin-Huan Yuan Jian-Ping

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 114501 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.114501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.114501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I11>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

α 稳定噪声下一类周期势系统的振动共振

Vibrational resonance in a periodic potential system with α stable noise

物理学报.2017, 66(10): 100501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.100501>

基于绝对节点坐标法的大变形柔性梁几种动力学模型研究

Several dynamic models of a large deformation flexible beam based on the absolute nodal coordinate formulation

物理学报.2016, 65(9): 094501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.094501>

基于无网格点插值法的旋转悬臂梁的动力学分析

A meshfree method based on point interpolation for dynamic analysis of rotating cantilever beams

物理学报.2015, 64(3): 034501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.034501>

旋转柔性悬臂梁动力学的 Bezier 插值离散方法研究

Bezier interpolation method for the dynamics of rotating flexible cantilever beam

物理学报.2014, 63(15): 154501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.154501>

平面柔性梁的刚-柔耦合动力学特性分析与仿真

Analysis and imitation of dynamic properties for rigid-flexible coupling systems of a planar flexible beam

物理学报.2011, 60(2): 024502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.024502>

基于旋转场曲率的二维剪切梁单元建模*

张大羽¹⁾ 罗建军^{1)†} 郑银环²⁾ 袁建平¹⁾

1) (西北工业大学航天学院, 航天飞行动力学技术重点实验室, 西安 710072)

2) (武汉理工大学机电工程学院, 武汉 430070)

(2016年12月31日收到; 2017年4月6日收到修改稿)

对二维剪切梁单元进行研究, 利用平面旋转场理论推导了精确曲率模型. 采用几何精确梁理论构建了剪切梁单元弹性力矩阵. 通过绝对节点坐标方法建立了系统的非线性动力学方程, 提出基于旋转场曲率的二维剪切梁单元, 并分别引入经典二维剪切梁单元和基于位移场曲率的二维剪切梁单元进行比较研究. 首先, 静力学分析证明了所提模型的正确性; 其次, 特征频率分析验证了模型可与理论解符合, 收敛精度高, 并且能准确地预测单元固有频率对应的振型; 最后, 在非线性的动力学问题上, 通过与 ANSYS 结果对比分析, 证明了该模型可有效处理柔性大变形问题, 并且与经典二维剪切梁单元相比具有缓解剪切闭锁的优势. 因此, 本文提出的基于旋转场曲率的二维剪切梁单元在处理几何非线性问题中具有较大的应用潜力.

关键词: 绝对节点坐标法, 旋转场曲率, 几何精确梁理论, 剪切闭锁

PACS: 45.10.-b, 05.45.-a, 45.05.+x

DOI: 10.7498/aps.66.114501

1 引言

近年来, 空间碎片清理技术在航天界受到广泛的关注^[1]. 世界主要航天大国针对主动俘获碎片技术均投入了大量的人力财力进行研究, 其中飞网、绳系机械爪等柔性俘获装置越来越多地出现在空间飞行器上. 由于该类俘获装置具有超轻、易变形及强几何非线性等特点, 在执行抓捕碎片过程中自身会产生柔性大变形, 使飞行器的姿态稳定及精确控制面临极大的挑战^[2]. 梁单元是这类俘获装置结构中的基本单元. 针对其大变形问题, 采用传统基于小变形假设的梁变形理论不能真实地反映大变形、大位移等特点, 如运动弹性动力学分析、一次近似耦合模型^[3]、一次精确模型^[4,5]、高次耦合模型^[6]. 而 Shabana^[7] 提出了绝对节点坐标法 (absolute nodal coordinate formulation, ANCF), 该方法采用绝对位置坐标和变形梯度描述物体的刚体运动和柔性变形, 适用于处理大变形、大转动多体

系统的建模问题. 此外, 该方法不采用转动角坐标, 并且所有节点坐标均定义在惯性系中, 因此构建出的质量矩阵为常数阵, 不存在柯氏加速度项和离心加速度项, 惯性力中也不存在变形和转动的附加耦合项.

进入 21 世纪以来, 已有越来越多的学者关注 ANCF 方法的研究. 田强等^[8] 对近年来 ANCF 方法的研究做了系统的评述. 在 ANCF 剪切梁单元研究中, Omar 和 Shabana^[9] 基于连续介质力学理论最先提出了经典的二维 ANCF 全参数剪切梁有限元单元, 该单元采用 x 向三次插值, y 向线性插值, 这会导致严重的剪切闭锁问题, 给数值计算带来困难. 随后, 很多学者针对该闭锁问题对此单元进行改进, 更好地提升了单元的性能. Hussein 等^[10] 研究了二维 ANCF 全参数剪切梁单元中变形模态耦合情况, 并采用 Hellinger-Reissner 变分原理解决剪切闭锁问题. 随后, 他们还将该研究思路应用到三维 ANCF 剪切梁单元和 ANCF 板单元^[11]. García-Vallejo 等^[12] 提出了二维三节点 ANCF 剪

* 国家自然科学基金重大项目 (批准号: 61690210, 61690211) 和国家自然科学基金 (批准号: 61603304, 11472213) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jjluo@nwpu.edu.cn

切梁单元, 不同于传统二维 ANCF 剪切梁单元的完备位移场, 该单元的位移场是不完备的三次插值多项式, 在此处理下剪切力呈二次分布并且梁截面在弯曲作用时不会发生收缩, 解决了闭锁问题, 动力学仿真验证了二维三节点 ANCF 剪切梁的有效性. Tian 等^[13] 采用 García-Vallejo 开发的 locking-free ANCF 剪切梁单元进一步研究了考虑关节间隙的二维剪切梁动力学模型, 丰富了绝对节点坐标法的单元类型. Gerstmayr 等^[14] 基于绝对节点坐标法, 采用 Reissner 非线性梁理论重新构造了二维剪切梁单元的弹性力矩阵, 公式中的轴向力、剪切力和弯曲力表述成显示解耦形式. 此外, 他定义了厚度方向应变能用以表征横截面的变形, 并准确地描述了剪切梁横截面固有频率对应的振型. Gerstmayr 定义这种弹性力解耦形式的梁单元为几何精确梁单元 (geometrically exact beam element), 该方法对各类型应变能的积分只沿梁的中心线, 各个变形模态之间互不影响, 该处理可以有效缓解剪切闭锁. Nachbagauer 等^[15] 只采用梁轴线上的梯度值 $\mathbf{r}_x|_{\eta=0}$ 和 $\mathbf{r}_y|_{\eta=0}$ 作为变形自由度, 分别开发出线性和二次 ANCF 非全参数二维剪切梁单元. 由于新单元的梯度 $\mathbf{r}_y|_{\eta=0}$ 不能表征梁横截面的变形, 因此该处理成为解决剪切闭锁问题的一种新思路. 随后他们还开发出了三维 ANCF 剪切梁单元, 解决了三维 ANCF 剪切梁单元存在的闭锁问题并显示出高阶收敛性^[16]. Gerstmayr 和 Shabana^[17] 针对 ANCF 剪切梁的闭锁现象又提出了两种解决方法: 一种为在 ANCF 剪切梁单元基础上对其形函数中分别引入 x^2y 和 x^2z 的插值项, 开发了高阶三维 ANCF 梁单元, 新增的插值项是截面关于轴向 x 的二次函数, 这会使弯曲应变变成 x 的线性函数, 并与截面对 x 的二阶导同阶, 消除了剪切闭锁现象, 更好地描述了截面的几何变形; 另一种方法是将原有三维 ANCF 单元降阶并退化成三维低阶 ANCF 索单元, 该单元中没有 y 方向梯度, 相比原三维 ANCF 梁单元的自由度数减少了一半, 计算效率大幅提升, 同时系统中也没有与剪切变形相关的刚度项, 故剪切闭锁问题不存在. Dufva 等^[18] 通过截面转角描述二维 ANCF 剪切梁单元的精确位移场, 梁轴向应变和弯曲应变由截面转角表征, 而剪切变形采用单独的线性插值, 该单元采用应变场混合插值技术解决了剪切闭锁问题. Mikkola 等^[19]

在二维 ANCF 非全参数梁的基础上通过定义截面方向上的力平衡条件引入剪切变形, 开发出一种新的二维 ANCF 剪切梁单元. 新单元中因不含截面梯度自由度, 计算效率远高于传统二维 ANCF 全参数剪切梁单元, 并且也不存在数值计算时由截面梯度引起的高频问题. 他们提出的新单元与传统 Timoshenko 梁单元弯曲模态和轴向模态符合度良好, 证明了新单元不存在曲率闭锁问题. Vesa-Ville 等^[20] 在二维 ANCF 非全参数梁单元的基础上采用对梁 y 向变形场独立插值技术, 提出了一种基于混合插值的二维 ANCF 剪切梁单元, 节点坐标由位移场、截面方向和截面变形场组成, 可捕捉到剪切变形. 动力学仿真结果表明该单元具有更高的精度和收敛性. 章孝顺等^[21] 对二维 ANCF 非全参数梁单元的曲率模型进行讨论, 对比了精确曲率模型和两种简化模型, 同时还研究了不同简化模型的适用范围. 以上研究较全面地论述了二维 ANCF 剪切梁的发展历程, 但针对二维剪切梁单元的曲率几何非线性进行的研究较少. 已有的曲率模型大都直接采用二阶曲率公式^[22], 定义在 Frenet 坐标系下, 具有极值性; 且鲜有从旋转场角度研究曲率定义, 并对基于旋转场曲率的二维 ANCF 剪切梁单元进行几何非线性分析、讨论模型的正确性和适用性.

本文进一步针对二维 ANCF 剪切梁的曲率定义进行研究. 基于平面旋转场理论推导得到精确曲率公式, 表征为梁中心线切线方向转角的函数; 采用几何精确梁理论构建系统弹性力矩阵, 提出基于旋转场曲率的二维 ANCF 剪切梁单元模型; 同时引入基于连续介质力学理论的经典 ANCF 剪切梁单元和基于微分几何理论的位移场曲率 ANCF 剪切梁单元作为对比研究. 分别通过静力学分析、特征频率分析以及动力学分析验证了本文所提的基于旋转场曲率的二维 ANCF 剪切梁单元模型在计算柔性机构大变形、大转动问题中的准确性和适用性.

文中第二部分分别建立基于连续介质力学理论的经典剪切梁单元 (模型一)、基于位移场曲率的几何精确剪切单元 (模型二) 和基于旋转场曲率的几何精确剪切梁单元 (模型三); 第三部分引入小变形和非小变形静力学分析、特征频率分析以及非线性动力学分析验证所提单元的有效性; 第四部分为结论.

2 剪切梁模型

2.1 模型一：基于连续介质力学理论的二维 ANCF 剪切梁单元

二维含剪切变形的 ANCF 梁单元最早由 Omar 和 Shabana 提出^[9], 如图 1 所示, 其中 $O-XY$ 为惯性坐标系, l 为梁的长度.

对于二节点的 ANCF 剪切梁单元 i , 其梁上任意一点在惯性系中的绝对位移矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^i &= \begin{bmatrix} r_1^i \\ r_2^i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5x^3 \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5x^3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{S}^i(x, y) \mathbf{e}^i, \end{aligned} \quad (1)$$

梁单元 i 的型函数 $\mathbf{S}^i(x, y)$ 为:

$$\mathbf{S}^i(x, y) = [s_1 \mathbf{I} \ s_2 \mathbf{I} \ s_3 \mathbf{I} \ s_4 \mathbf{I} \ s_5 \mathbf{I} \ s_6 \mathbf{I}],$$

其中 $\mathbf{I}$ 是 2×2 的单位矩阵.

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad s_2 = l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \\ s_3 &= l(\eta - \xi\eta), \quad s_4 = 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ s_5 &= l(-\xi^2 + \xi^3), \quad s_6 = l\xi\eta, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$\xi = x/l, \eta = y/l$.

利用连续介质力学中的变形理论推导得到 ANCF 剪切梁单元 i 的变形梯度张量 $\mathbf{J}^i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^i &= \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1^i}{\partial x} & \frac{\partial r_1^i}{\partial y} \\ \frac{\partial r_2^i}{\partial x} & \frac{\partial r_2^i}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{J}_0^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1x}^i(x, y) \mathbf{e} & \mathbf{S}_{1y}^i(x, y) \mathbf{e} \\ \mathbf{S}_{2x}^i(x, y) \mathbf{e} & \mathbf{S}_{2y}^i(x, y) \mathbf{e} \end{bmatrix} \mathbf{J}_0^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

对于梁单元的初始状态是水平摆放情况, $\mathbf{J}_0$ 为单位阵. Green-Lagrangian 应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^i &= \frac{1}{2} (\mathbf{J}^{iT} \mathbf{J}^i - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{J}_0^{-1})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}^i \mathbf{S}_a \mathbf{e}^i - 1 & \mathbf{e}^i \mathbf{S}_c \mathbf{e}^i \\ \mathbf{e}^i \mathbf{S}_c \mathbf{e}^i & \mathbf{e}^i \mathbf{S}_b \mathbf{e}^i - 1 \end{pmatrix} (\mathbf{J}_0^{-1}), \end{aligned} \quad (5)$$

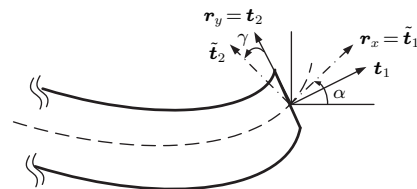


图 1 剪切梁截面变形

Fig. 1. Cross section deformation of shear deformable beam.

其中 x, y 为梁初始构型在单元坐标系内的坐标. 该单元有 12 个绝对节点坐标, 每个节点有 6 个自由度, 包括 2 个位移自由度和 4 个梯度自由度:

$$\mathbf{e}^i = [\mathbf{r}^{iT}(x^i = 0) \quad \mathbf{r}_x^{iT}(x^i = 0) \quad \mathbf{r}_y^{iT}(x^i = 0) \quad \mathbf{r}^{iT}(x^i = l) \quad \mathbf{r}_x^{iT}(x^i = l) \quad \mathbf{r}_y^{iT}(x^i = l)]^T. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_a &= \mathbf{S}_{1x}^{iT} \mathbf{S}_{1x}^i + \mathbf{S}_{2x}^{iT} \mathbf{S}_{2x}^i, \\ \mathbf{S}_b &= \mathbf{S}_{1y}^{iT} \mathbf{S}_{1y}^i + \mathbf{S}_{2y}^{iT} \mathbf{S}_{2y}^i, \\ \mathbf{S}_c &= \mathbf{S}_{1x}^{iT} \mathbf{S}_{1y}^i + \mathbf{S}_{2x}^{iT} \mathbf{S}_{2y}^i. \end{aligned}$$

依据 Voigt 标记规则, 可将 (5) 式改写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = [\varepsilon_1^i \ \varepsilon_2^i \ \varepsilon_3^i]^T, \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^i &= \frac{1}{2} (\mathbf{J}_0^{-1})^T (\mathbf{e}^{iT} \mathbf{S}_a \mathbf{e}^i - 1) (\mathbf{J}_0^{-1}), \\ \varepsilon_2^i &= \frac{1}{2} (\mathbf{J}_0^{-1})^T (\mathbf{e}^{iT} \mathbf{S}_b \mathbf{e}^i - 1) (\mathbf{J}_0^{-1}), \\ \varepsilon_3^i &= \frac{1}{2} (\mathbf{J}_0^{-1})^T (\mathbf{e}^{iT} \mathbf{S}_c \mathbf{e}^i) (\mathbf{J}_0^{-1}). \end{aligned}$$

依据广义胡克定律, ANCF 剪切梁单元 i 的应力张量 $\boldsymbol{\sigma}^i$ 为

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}^i, \quad (7)$$

$\mathbf{E}$ 是材料的弹性系数矩阵. 在平面应变问题中 (plane-strain problem), 对于各向同性的匀质材料 (isotropic homogenous material), 其弹性系数矩阵表达式为

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}, \quad (8)$$

λ, μ 是拉梅常数 (Lame's constants),

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

E, ν 分别是材料的杨氏弹性模量和泊松比. 利用 (6) 式与 (7) 式可得到梁单元 i 的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^i : \boldsymbol{\sigma}^i dV, \quad (9)$$

则其弹性力矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{elastic}}^i &= \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}^i} \right)^T = \left(\mathbf{e}^{iT} \mathbf{K}^i \right)^T \\ &= \left[\mathbf{e}^{iT} [(\lambda + 2\mu) \mathbf{K}_1 + \lambda \mathbf{K}_2 + 4\mu \mathbf{K}_3] \right]^T, \end{aligned} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \frac{1}{4} \int_V (\mathbf{J}_0^{-1})^T \left[\hat{\mathbf{S}}_a (\mathbf{e}^{iT} \mathbf{S}_a \mathbf{e}^i - 1) \right. \\ &\quad \left. + \hat{\mathbf{S}}_b (\mathbf{e}^{iT} \mathbf{S}_b \mathbf{e}^i - 1) \right] (\mathbf{J}_0^{-1}) dV, \\ \mathbf{K}_2 &= \frac{1}{4} \int_V (\mathbf{J}_0^{-1})^T \left[\hat{\mathbf{S}}_a (\mathbf{e}^{iT} \mathbf{S}_b \mathbf{e}^i - 1) \right. \\ &\quad \left. + \hat{\mathbf{S}}_b (\mathbf{e}^{iT} \mathbf{S}_a \mathbf{e}^i - 1) \right] (\mathbf{J}_0^{-1}) dV, \\ \mathbf{K}_3 &= \frac{1}{4} \int_V (\mathbf{J}_0^{-1})^T \left[\hat{\mathbf{S}}_c (\mathbf{e}^{iT} \mathbf{S}_c \mathbf{e}^i) \right] (\mathbf{J}_0^{-1}) dV, \\ \hat{\mathbf{S}}_a &= \mathbf{S}_a + \mathbf{S}_a^T, \quad \hat{\mathbf{S}}_b = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_b^T, \\ \hat{\mathbf{S}}_c &= \mathbf{S}_c + \mathbf{S}_c^T. \end{aligned} \quad (11)$$

经典剪切梁单元模型中轴向伸长变形、剪切变形和弯曲变形相互耦合在一起, 因此曲率公式不是显式形式.

2.2 模型二: 基于位移场曲率的二维几何精确剪切梁单元

根据微分几何理论^[22], 曲率是单位切向量对弧长的一阶导矢的模. 本例中切向量是梁中心线上的位移梯度, 通过位移场推导得到的曲率模型, 本文定义为位移场曲率. 图 1 中梁变形后其截面不再与梁的中心轴线 s 垂直. 根据梁位移场, 梁单元 i 上任意一点变形后的位移为: $\mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i(x, y)$. 其对中心轴线 s 的一阶导为

$$\mathbf{r}_s^i = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\mathbf{r}_x^i}{|\mathbf{r}_x^i|}, \quad (12)$$

对中心线 s 的二阶导为

$$\mathbf{r}_{ss}^i = \frac{\partial \mathbf{r}_s^i}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}_s^i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{r}_x^i}{|\mathbf{r}_x^i|} \right)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s}$$

$$= \left(\frac{\mathbf{r}_{xx}^i}{|\mathbf{r}_x^i|} + \mathbf{r}_x^i \frac{\partial \left(|\mathbf{r}_x^i|^{-1} \right)}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial s}, \quad (13)$$

其中 $|\mathbf{r}_x^i|^{-1} = (\mathbf{r}_x^{iT} \cdot \mathbf{r}_x^i)^{-\frac{1}{2}}$, 则 (13) 式可转换为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ss}^i &= \left(\frac{\mathbf{r}_{xx}^i}{|\mathbf{r}_x^i|} + \mathbf{r}_x^i \frac{\partial \left((\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial s} \\ &= \left(\frac{\mathbf{r}_{xx}^i}{|\mathbf{r}_x^i|} + \mathbf{r}_x^i \left(\frac{-\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_{xx}^i}{|\mathbf{r}_x^i|^3} \right) \right) \frac{\partial x}{\partial s} \\ &= \left(\frac{\mathbf{r}_{xx}^i}{|\mathbf{r}_x^i|} + \mathbf{r}_x^i \left(\frac{-\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_{xx}^i}{|\mathbf{r}_x^i|^3} \right) \right) \frac{1}{|\mathbf{r}_x^i|} \\ &= \frac{\mathbf{r}_{xx}^i}{\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i} - \frac{(\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_{xx}^i) \mathbf{r}_x^i}{(\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i)^2} \\ &= \frac{\mathbf{r}_{xx}^i}{\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i} - \frac{(\mathbf{r}_x^i \mathbf{r}_x^{iT}) \mathbf{r}_{xx}^i}{(\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i)^2} \\ &= \left(\frac{1}{\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i} (\mathbf{I} - \mathbf{r}_s^i \otimes \mathbf{r}_s^i) \right) \mathbf{r}_{xx}^i, \end{aligned} \quad (14)$$

$\otimes$ 代表张量积或外积, 曲率为 $\kappa_{\mathbf{r}_{ss}}^i = |\mathbf{r}_{ss}^i|$.

依据几何精确梁理论, 梁单元 i 的应变势能可由沿中心轴线 s 的轴向应变能 U_a^i , 剪切应变能 U_s^i 和弯曲应变能 U_b^i 组成:

$$\begin{aligned} U^i &= U_a^i + U_s^i + U_b^i \\ &= \frac{1}{2} \int_l EA \Gamma_1^i{}^2 ds + \frac{1}{2} \int_l GA_s \Gamma_2^i{}^2 ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_l EI (\kappa_{\mathbf{r}_{ss}}^i)^2 ds, \end{aligned} \quad (15)$$

E, G, A 分别是梁单元 i 的弹性模量、剪切模量和横截面积; 剪切模量 $G = E/2(1+\nu)$; $A_s = k_s \cdot A$, k_s 是剪切修正因子, 对于横截面是矩形的情况, $k_s = 10(1+\nu)/12+11\nu$; 应变 Γ^i 沿梁中心线的分量 Γ_1^i, Γ_2^i 可由拉格朗日应变张量确定^[10]:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^i &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{r}_x^i|_{\eta=0}{}^T \cdot \mathbf{r}_x^i|_{\eta=0} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\mathbf{r}_y^i{}^T \cdot \mathbf{r}_y^i - 1 \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Gamma_2^i = \mathbf{r}_x^i|_{\eta=0}{}^T \cdot \mathbf{r}_y^i. \quad (17)$$

梁单元 i 的弹性力公式可由应变势能 U^i 对节点坐标 $\mathbf{e}^i$ 求偏导得到:

$$\mathbf{Q}_{\text{elastic}}^i = \frac{\partial U^i}{\partial \mathbf{e}^i} = \frac{\partial U_a^i}{\partial \mathbf{e}^i} + \frac{\partial U_s^i}{\partial \mathbf{e}^i} + \frac{\partial U_b^i}{\partial \mathbf{e}^i}, \quad (18)$$

其中,

$$\frac{\partial U_a^i}{\partial \mathbf{e}^i} = \int_l EA \Gamma_1^i \frac{\partial \Gamma_1^i}{\partial \mathbf{e}^i} ds$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_l EA (\Gamma_1^i)^2 \frac{\partial(ds)}{\partial e^i}, \\
 \frac{\partial U_s^i}{\partial e^i} & = \int_l GA_s \Gamma_2^i \frac{\partial \Gamma_2^i}{\partial e^i} ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_l GA_s (\Gamma_2^i)^2 \frac{\partial(ds)}{\partial e^i}, \\
 \frac{\partial U_b^i}{\partial e^i} & = \int_l EI \kappa_{r_{ss}}^i \frac{\partial \kappa_{r_{ss}}^i}{\partial e^i} ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_l EI (\kappa_{r_{ss}}^i)^2 \frac{\partial(ds)}{\partial e^i}, \\
 ds & = |\mathbf{r}_x^i| dx. \quad (19)
 \end{aligned}$$

应变分量 Γ_1^i, Γ_2^i 对节点坐标 e^i 求导为:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Gamma_1^i}{\partial e^i} & = \mathbf{S}_x|_{\eta=0}^T \mathbf{r}_x^i|_{\eta=0} + \mathbf{S}_y^T \mathbf{r}_y^i, \\
 \frac{\partial \Gamma_2^i}{\partial e^i} & = \mathbf{S}_y^T \mathbf{r}_x^i|_{\eta=0} + \mathbf{S}_x^T \mathbf{r}_y^i. \quad (20)
 \end{aligned}$$

曲率 $\kappa_{r_{ss}}^i$ 对节点坐标 e^i 求导为:

$$\frac{\partial \kappa_{r_{ss}}^i}{\partial e^i} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{r}_{ss}^T \mathbf{r}_{ss}^i \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{r}_{ss}^i}{\partial e^i}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}_{ss}^i}{\partial e^i} & = \frac{\partial \mathbf{r}_{ss}^i}{\partial \mathbf{r}_x^i} \frac{\partial \mathbf{r}_x^i}{\partial e^i} + \frac{\partial \mathbf{r}_{ss}^i}{\partial \mathbf{r}_y^i} \frac{\partial \mathbf{r}_y^i}{\partial e^i} \\
 & = \frac{\partial \mathbf{r}_{ss}^i}{\partial \mathbf{r}_x^i} \mathbf{S}_x^i + \frac{\partial \mathbf{r}_{ss}^i}{\partial \mathbf{r}_y^i} \mathbf{S}_y^i, \quad (22)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}_{ss}^i}{\partial \mathbf{r}_x^i} & = \frac{1}{\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i} (\mathbf{I} - \mathbf{r}_s^i \otimes \mathbf{r}_s^i) \\
 & = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i} - \frac{1}{\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i} \frac{\mathbf{r}_x^i \mathbf{r}_x^{iT}}{|\mathbf{r}_x^i|^2} \\
 & = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i} - \frac{(\mathbf{r}_x^i \mathbf{r}_x^{iT})}{(\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^2}, \quad (23) \\
 \frac{\partial \mathbf{r}_{ss}^i}{\partial \mathbf{r}_x^i} & = \frac{\partial (\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^{-1}}{\partial \mathbf{r}_x^i} (\mathbf{I} - \mathbf{r}_s^i \otimes \mathbf{r}_s^i) \mathbf{r}_{xx}^i \\
 & + (\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^{-1} \frac{\partial (\mathbf{I} - \mathbf{r}_s^i \otimes \mathbf{r}_s^i)}{\partial \mathbf{r}_x^i} \mathbf{r}_{xx}^i \\
 & = \frac{\partial (\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^{-1}}{\partial \mathbf{r}_x^i} (\mathbf{I} - \mathbf{r}_s^i \otimes \mathbf{r}_s^i) \mathbf{r}_{xx}^i \\
 & - (\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^{-1} \frac{\partial (\mathbf{r}_s^i \otimes \mathbf{r}_s^i)}{\partial \mathbf{r}_x^i} \mathbf{r}_{xx}^i \\
 & = -\frac{2\mathbf{r}_{xx}^i}{(\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^2} \mathbf{r}_x^{iT} + \frac{2\mathbf{r}_x^i \mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_{xx}^i \mathbf{r}_x^{iT}}{(\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^3} \\
 & - \frac{2\mathbf{r}_{xx}^i \mathbf{r}_x^i}{(\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^2} \mathbf{I} + \frac{2\mathbf{r}_{xx}^i \mathbf{r}_x^i \mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^{iT}}{(\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^3} \\
 & = -\frac{2\mathbf{r}_{xx}^i}{(\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^2} \mathbf{r}_x^{iT} + \frac{4\mathbf{r}_x^i \mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_{xx}^i \mathbf{r}_x^{iT}}{(\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^3} \\
 & - \frac{2\mathbf{r}_{xx}^i \mathbf{r}_x^i}{(\mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x^i)^2} \mathbf{I}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

$\mathbf{r}_s^i = \frac{\mathbf{r}_x^i}{|\mathbf{r}_x^i|}$, $\mathbf{r}_x^i = [x_1 \ x_2]^T$. (19) 式中的 $\frac{\partial(ds)}{\partial e^i}$ 表达式推导如下:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(ds)}{\partial e^i} & = \frac{\partial(|\mathbf{r}_x^i| dx)}{\partial e^i} = \frac{\partial \left[(\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i)^{\frac{1}{2}} \right]}{\partial e^i} dx \\
 & = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial (\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i)}{\partial e^i} dx = \frac{(\mathbf{S}_x^T \mathbf{r}_x^i)}{|\mathbf{r}_x^i|} dx. \quad (25)
 \end{aligned}$$

2.3 模型三: 基于旋转场曲率的二维几何精确剪切梁单元

曲率也可定义为曲线上某点的切线方向角对弧长的转动率. 通过角度场推导得到的曲率模型, 本文定义为旋转场曲率. 由图1所示, 根据平面旋转场理论, 由 O - XY 逆时针转动到移动矢量

$[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ 的转动矩阵为 $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$, 其中 α 是

$\mathbf{r}_x^i$ 与 OX 轴的夹角, 即梁中线的切线方向角. $\mathbf{r}_x^i$ 沿着梁中心线切线方向, 可体现梁中线弯曲效应. 则单位切向量可写成

$$\hat{\mathbf{r}}_x^i = \frac{\mathbf{r}_x^i}{|\mathbf{r}_x^i|} = [\cos \alpha \ \sin \alpha]^T = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2]^T. \quad (26)$$

由(26)式可知: $\cos \alpha = \hat{x}_1$, 由该式可得到旋转场曲率公式:

$$\begin{aligned}
 \kappa_\alpha^i & = \frac{\partial \alpha}{\partial s} = -\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial s} = -\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} \\
 & = -\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x} \frac{1}{|\hat{\mathbf{r}}_x^i|}, \quad (27)
 \end{aligned}$$

其中 $\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x}$ 是 $\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_x^i}{\partial x}$ 的第一项, $\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_x^i}{\partial x}$ 表达式为

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_x^i}{\partial x} & = \frac{\partial \mathbf{r}_x^i}{\partial \mathbf{r}_x^i} \frac{\partial \mathbf{r}_x^i}{\partial x} \\
 & = \left[\frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i}} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i} \mathbf{r}_x^i \otimes \mathbf{r}_x^i \right) \right] \mathbf{r}_{xx}^i. \quad (28)
 \end{aligned}$$

该模型中的轴向势能与剪切势能与模型二中的表达式相同, 弯曲势能可利用旋转场曲率得到: $U_b^i = \frac{1}{2} \int_l EI \kappa_\alpha^2 ds$. 弯曲势能对节点坐标 e^i 的导数为

$$\frac{\partial U_b^i}{\partial e^i} = \int_l EI \kappa_\alpha^i \frac{\partial \kappa_\alpha^i}{\partial e^i} ds + \frac{1}{2} \int_l EI \kappa_\alpha^i \frac{\partial(ds)}{\partial e^i}. \quad (29)$$

其中 $\frac{\partial \kappa_\alpha^i}{\partial e^i}$ 推导如下:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \kappa_\alpha^i}{\partial e^i} & = \frac{\partial}{\partial e^i} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial e^i} \right) \\
 & = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{-1}{\sin \alpha} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial e^i} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{-1}{\sin \alpha} \right) \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial e^i} - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial e^i} \right). \quad (30)$$

(30) 式中的偏导项分别为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{-1}{\sin \alpha} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-1}{\sin \alpha} \right) \frac{\partial x}{\partial s} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-1}{\sin \alpha} \right) \frac{1}{|\mathbf{r}_x|} \\ &= \frac{-\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x} = \frac{-\hat{x}_1}{\hat{x}_2^3} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_x(1)}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial e^i} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_x^i(1)}{\partial e^i} \\ \Rightarrow \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_x^i}{\partial e^i} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_x^i}{\partial \mathbf{r}_x^i} \frac{\partial \mathbf{r}_x^i}{\partial e^i} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i}} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i} \mathbf{r}_x^i \otimes \mathbf{r}_x^i \right) \right] \mathbf{S}_x^i, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial e^i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_x^i(1)}{\partial e^i} \right) \frac{\partial x}{\partial s} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_x^i}{\partial e^i} \right) \frac{1}{|\mathbf{r}_x^i|} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mathbf{S}_x^i}{\sqrt{\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i}} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i} \mathbf{r}_x^i \otimes \mathbf{r}_x^i \right) \right] \frac{1}{|\mathbf{r}_x^i|} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mathbf{S}_x^i}{|\mathbf{r}_x^i|} - \frac{(\mathbf{r}_x^i \mathbf{r}_x^{iT}) \mathbf{S}_x^i}{|\mathbf{r}_x^i|^3} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mathbf{S}_x^i}{|\mathbf{r}_x^i|} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(\mathbf{r}_x^i \mathbf{r}_x^{iT}) \mathbf{S}_x^i}{|\mathbf{r}_x^i|^3} \right] \\ &= \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}_x^i|} \mathbf{S}_{xx}^i - \frac{1}{|\mathbf{r}_x^i|^3} \mathbf{r}_{xx}^{iT} \mathbf{r}_x^i \mathbf{S}_x^i \right\} - \left\{ \frac{(\mathbf{r}_x^i \mathbf{r}_x^{iT})}{|\mathbf{r}_x^i|^3} \mathbf{S}_{xx}^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2\mathbf{r}_x^i \mathbf{r}_{xx}^{iT})}{|\mathbf{r}_x^i|^3} \mathbf{S}_x^i - \frac{3(\mathbf{r}_x^{iT} \mathbf{r}_x^i) \cdot (\mathbf{r}_x^i \mathbf{r}_{xx}^{iT})}{|\mathbf{r}_x^i|^5} \mathbf{S}_x^i \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

同理, 通过 (26) 式的第二式 $\hat{x}_2 = \sin \alpha$ 也可推导出旋转场曲率 κ_α^i 的表达式.

根据绝对节点坐标方法, 由虚功原理可推导梁单元 i 的动力学方程 [9]:

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{e}}^i = \mathbf{Q}^i_{\text{external}} - \mathbf{Q}^i_{\text{elastic}}, \quad (34)$$

$\mathbf{Q}^i_{\text{elastic}}$ 分别采用模型一至三中的弹性力表达式, $\ddot{\mathbf{e}}^i$ 是节点加速度坐标. 对于 ANCF 剪切梁单元 i , 其单元质量阵公式为

$$\mathbf{M}^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{S}^i(x, y)^T \mathbf{S}^i(x, y) dV^i, \quad (35)$$

其中, ρ^i, V^i 是梁单元 i 的密度和体积. 由 (35) 式可知, 通过绝对节点坐标方法建立的单元质量阵为常

数阵, 不包含科氏力与离心力, 不存在变形和转动耦合附加的惯性力. 通过虚功原理可推导单元的外力阵公式:

$$\mathbf{Q}^i_{\text{external}} = \mathbf{S}^i(x, y)^T \mathbf{F}^i, \quad (36)$$

$\mathbf{F}^i$ 为外力矢量, 外力阵同样为常数矩阵.

3 算例分析

3.1 静力学分析

本节引入典型的悬臂梁受集中载荷问题, 考察所提出基于旋转场曲率的 ANCF 剪切梁模型在静力学分析中的准确性. 图 1 所示为悬臂梁受集中载荷模型, 其物理参数与文献 [14] 相同. 长为 $l = 2$ m, 宽为 $w = 0.1$ m, 高为 $h = 0.5$ m, 杨氏模量为 $E = 2.07 \times 10^5$ GPa, 剪切模量为 $G = 7.96 \times 10^4$ GPa, 泊松比为 $\nu = 0.3$, 以及剪切修正因子为 $k_s = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$.

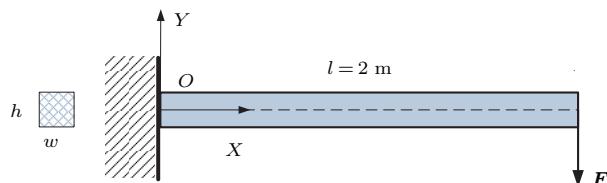


图 2 悬臂梁模型

Fig. 2. Cantilever beam.

考察小变形算例, 设置末端集中力为 $F = -5 \times 10^5 \times h^3$ N. 在小变形假设下, 梁中性层在变形后长度不变, 端点沿 X 方向的变形可以忽略不计. Y 向挠度的理论解 [23] 为 $\delta = \frac{Fl^3}{3EI_z}$, 其中 I_z 为梁截面惯性矩. 通过表 1 的数据对比发现, 由于模型一存在严重的剪切闭锁问题, 其 Y 向位移与理论解误差达到 22%. 而模型二和模型三采用几何精确梁理论构建系统弹性力, 其中轴向力、剪切力和弯曲力相互解耦, 可缓解剪切闭锁, 因此由它们计算的 Y 向位移均可收敛于理论解, 并且收敛速度快. 减小梁的高度至 $h = 0.1$ m, 末端集中力为 $F = -1 \times 10^6 \times h^3$ N, 其他参数不变. 表 2 结果表明模型一的误差为 25%, 而模型二和三可收敛到理论解. 与表 1 相比, 表 2 中变形量增大, 模型二和三需要收敛到理论解的个数增多.

表1 小变形情况下三种弹性力模型计算的端部位移对比1

Table 1. 1st comparison of tip point displacement using three elastic force models in case of small deformation.

划分单元数/个	端点 X 向位移/m	端点 Y 向位移/m
连续介质力学模型 (模型一)		
1	-6.589671×10^{-8}	-4.585537×10^{-4}
100	-1.081793×10^{-7}	-6.055386×10^{-4}
300	-1.081936×10^{-7}	-6.055763×10^{-4}
几何精确梁模型-位移场曲率 (模型二)		
1	-1.247582×10^{-7}	-6.373417×10^{-4}
20	-1.815183×10^{-7}	-7.729469×10^{-4}
几何精确梁模型-旋转场曲率 (模型三)		
1	-1.322880×10^{-7}	-6.373418×10^{-4}
20	-1.814437×10^{-7}	-7.729469×10^{-4}
理论解 [23]	—	-7.729469×10^{-4}

表2 小变形情况下三种弹性力模型计算的端部位移对比2

Table 2. 2nd comparison of tip point displacement using three elastic force models in case of small deformation.

划分单元数/个	端点 X 向位移/m	端点 Y 向位移/m
连续介质力学模型 (模型一)		
1	-2.351629×10^{-7}	-0.001166
100	-3.969978×10^{-7}	-0.001150
300	-3.970496×10^{-7}	-0.001151
几何精确梁模型-位移场曲率 (模型二)		
1	-4.511020×10^{-7}	-0.001165
30	-7.154094×10^{-7}	-0.001549
几何精确梁模型-旋转场曲率 (模型三)		
1	-4.523434×10^{-7}	-0.001166
30	-7.172440×10^{-7}	-0.001549
理论解 [19]	—	-0.001549

表3 非小变形情况下三种弹性力模型计算的端部位移对比

Table 3. Comparison of tip point displacement using three elastic force models in case of non-small deformation.

划分单元数/个	端点 X 向位移/m	端点 Y 向位移/m
连续介质力学模型 (模型一)		
1	-0.049726	-0.397010
100	-0.095631	-0.562668
300	-0.095648	-0.562718
几何精确梁模型-位移场曲率 (模型二)		
1	-0.070542	-0.474796
10	-0.149856	-0.707640
几何精确梁模型-旋转场曲率 (模型三)		
1	-0.078069	-0.485859
5	-0.150970	-0.709624
参考解 [14]	-0.150971	-0.710569

考察非小变形情况, 设置末端集中力为 $F = -5 \times 10^8 \times h^3 \text{ N}$, 其他参数与小变形算例 1 相同. 采用该集中力可导致相对大的变形量. 采用文献 [14] 表 2 中用商业软件计算的解作为非线性大变形下悬臂梁 X, Y 向挠度的参考解. 在大变形情况下, 剪切效应加剧, 另外由于 ANCF 单元在 Y 向上采用线性插值会导致严重的剪切闭锁问题, 所以在在大变形算例中三种模型的收敛精度均不如小变形算例, 见表 3. 数据对比显示模型三的收敛速度和精度最高. 以上算例证明了所提出的模型在静力学分析中的正确性.

3.2 特征频率分析

本节对所提出的 ANCF 剪切梁单元的特征频率进行分析, 选择具有理论解的简支梁作为研究对

象. 简支梁物理参数与文献 [14] 中相同. 其中长为 $l = 2 \text{ m}$, 宽为 $w = 0.4 \text{ m}$, 高为 $h = 0.4 \text{ m}$, 密度为 $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, 杨氏模量为 $E = 1000 \text{ GPa}$, 剪切模量为 $G = 384.62 \text{ GPa}$, 泊松比为 $\nu = 0.3$, 以及剪切修正因子为 $k_s = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}$. 本算例中的边界条件如图 3 所示, 左端的 X, Y 方向位移固定, 右端只固定 Y 方向位移.

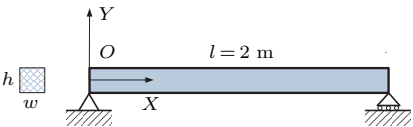


图 3 简支梁模型

Fig. 3. Simply supported beam model.

图 4 为本文模型三在简支边界条件下的固有频率和振型. 因为通过边界条件消除了 3 个自由度,

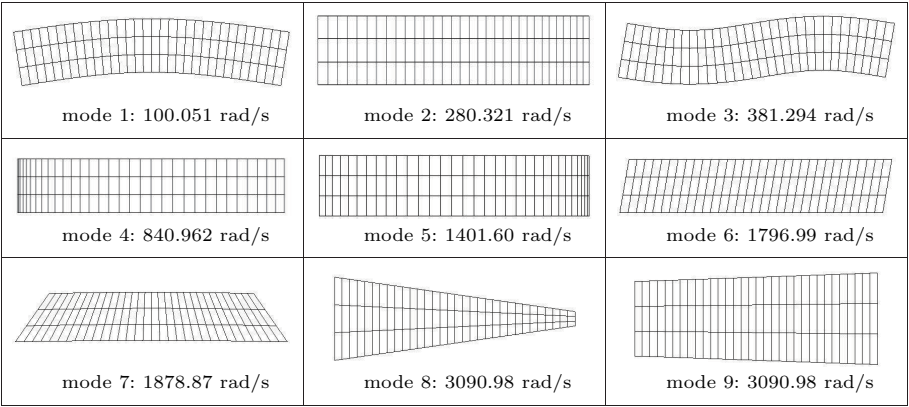


图 4 基于旋转场曲率的简支梁模型的振型和固有频率

Fig. 4. Mode shapes and eigenfrequencies (rad/s) of simply supported beam based on rotation-based curvature.

表 4 3 种弹性力模型下简支梁的弯曲和轴向固有频率 (rad/s) 对比

Table 4. Bending and longitudinal eigenfrequencies (rad/s) of simply supported beam element for different elastic formulation.

划分单元数/个	1 st bend	2 nd bend	1 st axial	2 nd axial	3 rd axial
连续介质力学模型 (模型一)					
1	121.099	717.254	293.929	929.195	2062.58
32	110.313	379.121	293.706	877.411	1449.00
几何精确梁模型-位移场曲率 (模型二)					
1	111.024	839.425	280.319	863.102	1864.36
32	100.052	381.295	280.321	840.962	1401.60
几何精确梁模型-旋转场曲率 (模型三)					
1	111.024	839.425	280.340	863.102	1864.36
32	100.051	381.294	280.321	840.962	1401.60
Timoshenko 梁模型 (理论解)	95.634	332.235	280.321	840.962	1401.60

表5 3种弹性力模型下简支梁的剪切和厚度固有频率 (rad/s) 对比

Table 5. Shearing and thickness eigenfrequencies (rad/s) of simply supported beam element for different elastic formulation.

划分单元数/个	1 st shear	2 nd shear	1 st thickness	2 nd thickness
连续介质力学模型 (模型一)				
1	1916.94	2072.91	3593.71	3679.47
32	1916.94	2051.03	3584.95	3659.39
几何精确梁模型-位移场曲率 (模型二)				
1	1766.97	1878.86	3090.97	3090.97
32	1766.99	1878.87	3090.98	3090.98
几何精确梁模型-旋转场曲率 (模型三)				
1	1796.99	1878.87	3090.98	3090.98
32	1796.99	1878.87	3090.98	3090.98
Timoshenko 梁模型 (理论解)	1766.99	1878.87	3090.98	3090.98

所以共计算出有9种振型和对应的固有频率. ANCF单元的轴向采用三次插值技术产生三种轴向振型 (mode 2, mode 4和mode 5) 和两种弯曲振型 (mode 1和mode 3). 另外, 还存在两种剪切振型 (mode 6和mode 7) 以及 ANCF单元特有的厚度振型 (mode 8和mode 9).

表4为简支梁单元分别采用3种弹性力模型所计算出的弯曲和轴向固有频率的对比, 表5为其剪切和厚度固有频率对比. 由结果可知, 与其他两个模型相比, 本文提出的模型三收敛性更好, 收敛精度可至6位有效数字. 引起二阶弯曲振动频率误差较高是因为本文单元在Y向上采用线性插值, 会导致单元的剪切闭锁问题, 使得变形过程中剪切应变能占据主导, 过多的剪切力导致单元不能发生正常弯曲变形, 造成弯曲刚度增大, 单元变得更“刚”, 从而引起二阶弯曲振动频率增大.

3.3 动力学分析

图5所示为柔性单摆, O点为旋转铰. 该算例是绝对节点坐标方法的一个经典算例. 单摆的物理参数如下: 长为 $l = 1.2$ m, 横截面积为 $A = 0.0016$ m², 截面惯性矩为 $I_z = 8.533 \times 10^{-5}$ m⁴, 密度为 $\rho = 5540$ kg/m³, 杨氏模量为 $E = 7$ GPa, 剪切模量为 $G = 2.69$ GPa, 泊松比以及剪切修正因子与前面算例相同. 如图5所示, 仅固定左端的X,

Y方向位移. 考察在重力作用下单摆的动态响应. 仿真中单摆被划分为12个单元, 仿真时间为1.1 s.

本算例中柔性单摆在其重力作用下进行大范围转动, 运动过程中发生大变形现象. 为对比文中所述的三种剪切梁单元模型处理大变形问题的正确性, 采用ANSYS中两节点平面梁BEAM3单元作为对比. 由图6—图8可见, 在弹性模量为 $E = 7$ GPa时, 三种模型计算的末端横向位移, 中点横向位移和末端端点轨迹均与ANSYS结果符合, 证明它们均能处理大变形问题, 并验证了本文所提模型三的正确性.

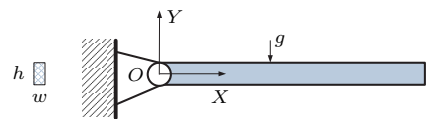


图5 柔性单摆模型

Fig. 5. Flexible pendulum.

为了更好地说明模型三处理柔性大变形的能力, 将弹性模量降低至 $E = 2$ GPa. 在此弹性模量下, 梁将变得更柔, 大变形现象更明显. 图9—图11显示在 $E = 2$ GPa时, 三种模型计算的结果均与ANSYS结果符合. 继续将弹性模量降至 $E = 0.7$ GPa, 由图12可见, 在此低模量下三种模型计算的结果也可与ANSYS结果相近. 以上算例均证明了模型三可用于处理柔性大变形问题.

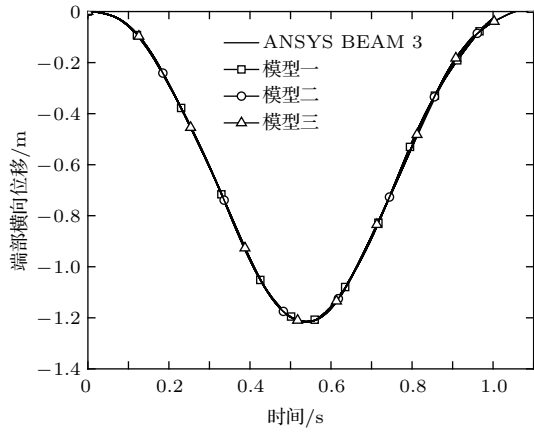

 图6 柔性单摆末端纵向位移 ($E = 7$ GPa)

Fig. 6. The tip vertical displacement of flexible pendulum ($E = 7$ GPa).

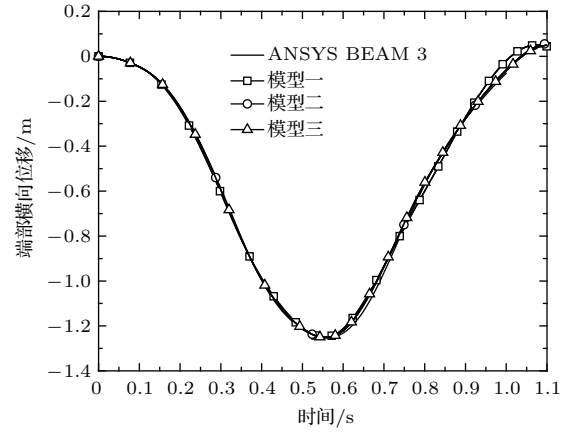

 图9 柔性单摆末端纵向位移 ($E = 2$ GPa)

Fig. 9. The tip vertical displacement of flexible pendulum ($E = 2$ GPa).

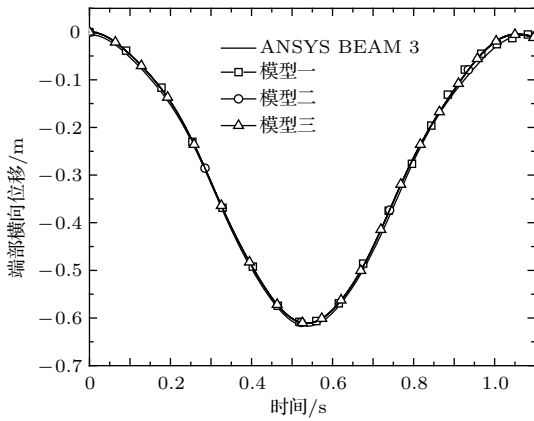

 图7 柔性单摆中点纵向位移 ($E = 7$ GPa)

Fig. 7. The middle vertical displacement of flexible pendulum ($E = 7$ GPa).

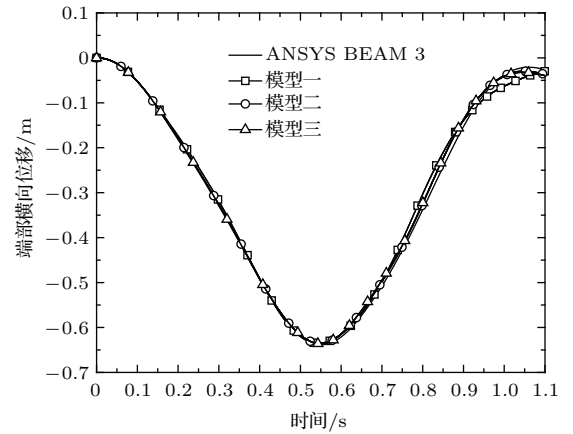

 图10 柔性单摆中点纵向位移 ($E = 2$ GPa)

Fig. 10. The middle vertical displacement of flexible pendulum ($E = 2$ GPa).

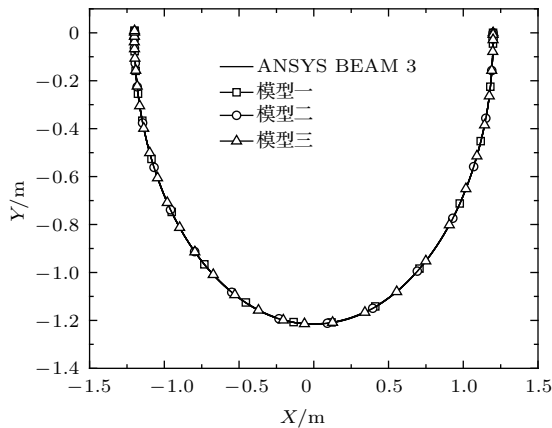

 图8 柔性单摆末端位移 ($E = 7$ GPa)

Fig. 8. The tip-point trajectory of flexible pendulum ($E = 7$ GPa).

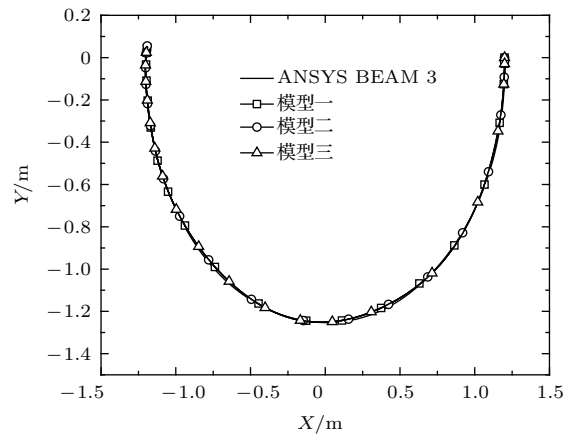

 图11 柔性单摆末端位移 ($E = 2$ GPa)

Fig. 11. The tip-point trajectory of flexible pendulum ($E = 2$ GPa).

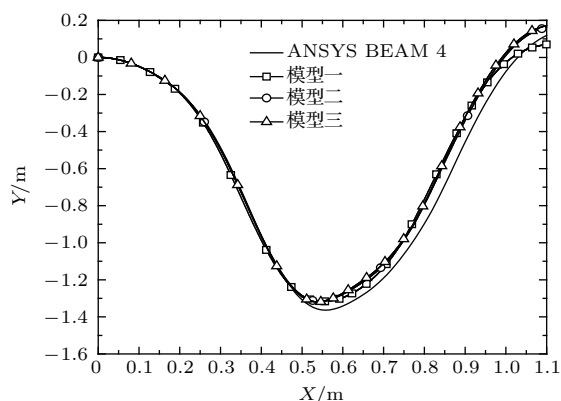

 图 12 柔性单摆末端位移 ($E = 0.7$ GPa)

 Fig. 12. The tip-point trajectory of flexible pendulum ($E = 0.7$ GPa).

图 13—图 15 是模型三在不同弹性模量下的能量变化曲线. 由图可知, 该模型总能量为零, 符合能量守恒定律. 从能量的角度验证了模型三的正确性.

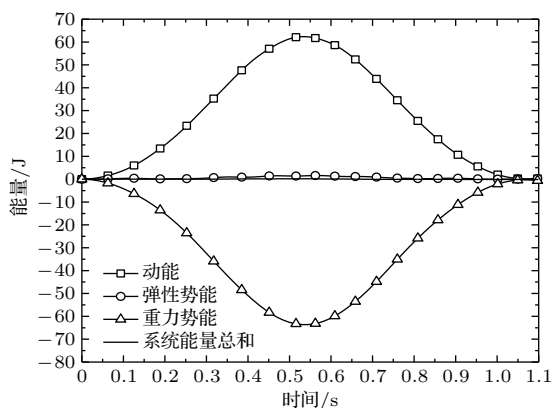

 图 13 系统能量分布 (旋转场曲率模型, $E = 7$ GPa)

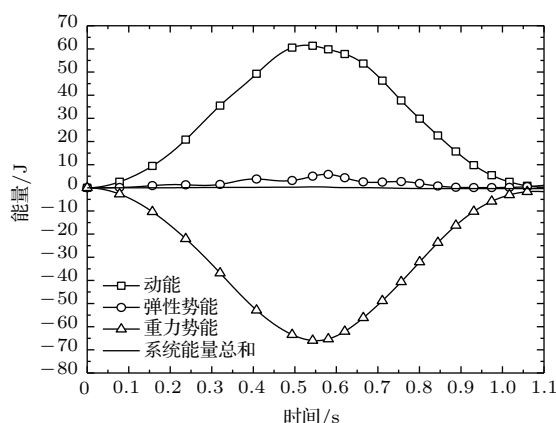
 Fig. 13. The energy distribution of flexible pendulum (RB curvature beam model, $E = 7$ GPa).

 图 14 系统能量分布 (旋转场曲率模型, $E = 2$ GPa)

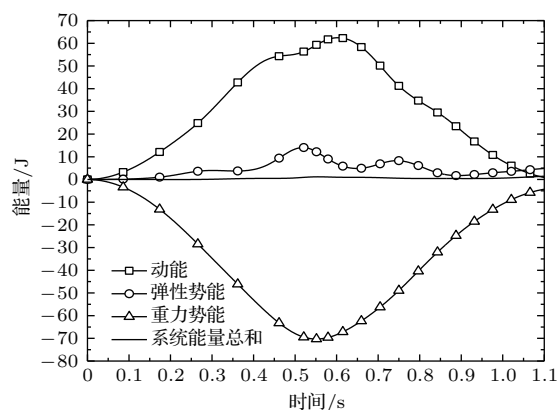
 Fig. 14. The energy distribution of flexible pendulum (RB curvature beam model, $E = 2$ GPa).

 图 15 系统能量分布 (旋转场曲率模型, $E = 0.7$ GPa)

 Fig. 15. The energy distribution of flexible pendulum (RB curvature beam model, $E = 0.7$ GPa).

图 16—图 18 显示了模型一至模型三在不同时刻的构型图, 分别对三种模型取间隔 0.1 s 的空间构型进行对比. 图中绿色实线代表模型一, 蓝色点画线代表模型二, 红色虚线代表模型三. 由图 16 可见, 在 $E = 7$ GPa 时三种模型的运动轨迹一致, 说明在此弹性模量下由几何精确梁理论推导的模型 (模型二和模型三) 和由连续介质力学理论推导的模型 (模型一) 在模拟单摆大变形时的效果基本相同. 随着弹性模量的增大, 模型二与模型三在运动过程中相较模型一显得“更柔”, 主要因为模型一是耦合模型, 而模型二与模型三是解耦模型, 各个变形模态之间互不影响. 所以图 17 和图 18 中模型二和模型三的运动轨迹和空间构型更为接近, 验证了两种不同物理场得到的曲率模型的有效性.

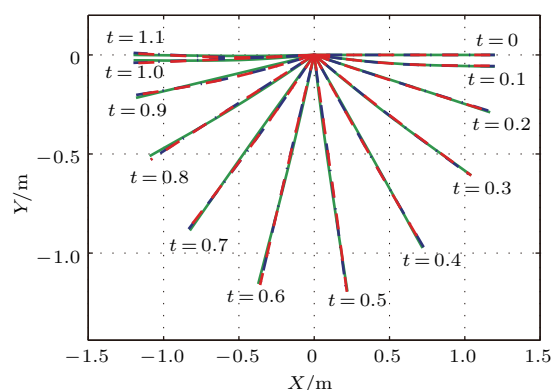

 图 16 (网刊彩色) 柔性单摆各时刻构型图 ($E = 7$ GPa) (绿色实线, 模型一; 蓝色点画线, 模型二; 红色虚线, 模型三)

 Fig. 16. (color online) The configuration of flexible pendulum at each given time ($E = 7$ GPa) (green solid line, 1st model; blue dash dotted line, 2nd model; red dash line: 3rd model).

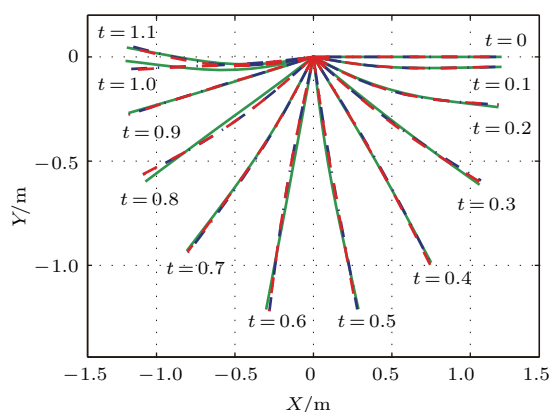


图 17 (网刊彩色) 柔性单摆各时刻构型图 ($E = 2$ GPa)(网刊彩色) (绿色实线: 模型一; 蓝色点画线: 模型二; 红色虚线: 模型三)

Fig. 17. (color online) The configuration of flexible pendulum at each given time ($E = 2$ GPa) (green solid line, 1st model; blue dash dotted line, 2nd model; red dash line, 3rd model).

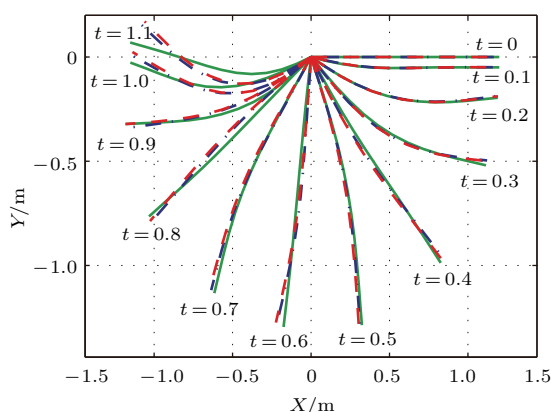


图 18 (网刊彩色) 柔性单摆各时刻构型图 ($E = 0.7$ GPa) (绿色实线, 模型一; 蓝色点画线, 模型二; 红色虚线, 模型三)

Fig. 18. (color online) The configuration of flexible pendulum at each given time ($E = 0.7$ GPa) (green solid line, 1st model; blue dash dotted line, 2nd model; red dash line, 3rd model).

柔性梁在大转动过程中剪切效应逐渐占据主导, 为了进一步研究三种不同的弹性力计算的剪切应变在大转动大变形中的变化, 弹性模量选取 $E = 0.7$ GPa, 其余梁的物理参数不变, 柔性单摆被划分为 40 个单元. 图 19 是单摆最后一个单元内中点的剪切应变变化曲线. 从图中可知, 模型二与模型三得到的剪切应变相近, 而它们均比模型一的剪切应变大, 其最大差异可达到 0.01. 其差异可由图 20 和图 21 解释, 分别是单摆最后一个单元中点的 $\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y$ 方向与大小变化曲线. 由图可知, 模型二

与模型三在 $\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y$ 方向变化上与模型一基本相似, 而 $\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y$ 的幅值变化与模型一有较大差异, 这也是导致图 19 剪切应变差异的主要原因. 绝对节点坐标法中的应变是位移梯度的函数, 例如正应力表达式

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_x - 1, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_y^T \mathbf{r}_y - 1,$$

剪应力表达式 $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_x^T \mathbf{r}_y$. 故图 20 和图 21 中的单元内位移梯度随时间的变化也反映了相应应变在大转动过程中的变化情况. 由图 17 (b) 中可知, 模型二和模型三的 $\mathbf{r}_y$ 数值被限制在 1 附近, 变化范围较小, 因为这两种模型的弹性能中具有沿单元截面方向的能量

$$\frac{1}{2} \int EA (\mathbf{r}_y^T \mathbf{r}_y - 1)^2 ds,$$

它可限制 $\mathbf{r}_y$ 剧烈变化, 确保单元的不可压缩性. 模型一由于是耦合模型, $\mathbf{r}_x$ 与 $\mathbf{r}_y$ 变化相互影响, 所以其 $\mathbf{r}_y$ 幅值的变化范围比模型二和模型三要更明显.

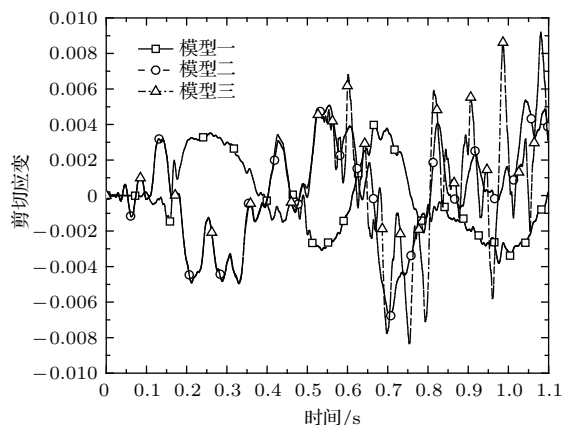


图 19 单摆最后一个单元内中点的剪切应变变化

Fig. 19. Change of shear strain at middle point of last element.

由于 ANCF 剪切梁单元在 x, y 方向上插值阶次的不同将会导致严重的剪切闭锁现象, 采用本文模型一至模型三分别研究各模型缓解剪切闭锁的能力. 表 6 为分别采用三种模型时的单摆中点剪切应变收敛情况, 可以看出采用解耦模型 (模型二和模型三) 得到的剪应变收敛个数比耦合模型 (模型一) 要少, 模型三收敛最快, 证明模型三在缓解剪切闭锁问题上具有较强的优势. 模型一由于各个变形模态相互耦合, 剪切应变收敛最慢.

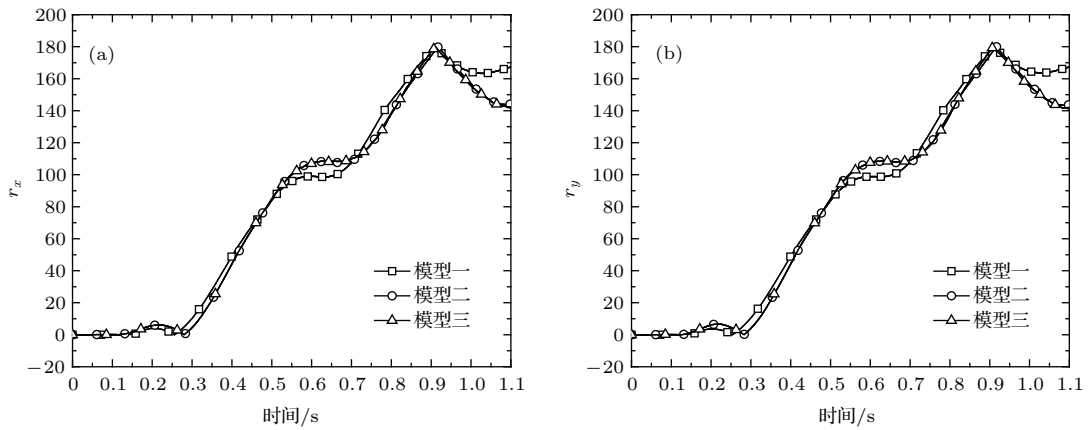


图 20 单摆最后一个单元内中点的 r_x 和 r_y 方向变化 (a) r_x ; (b) r_y

Fig. 20. Orientation of the r_x and r_y vector at middle point of last element: (a) r_x ; (b) r_y .

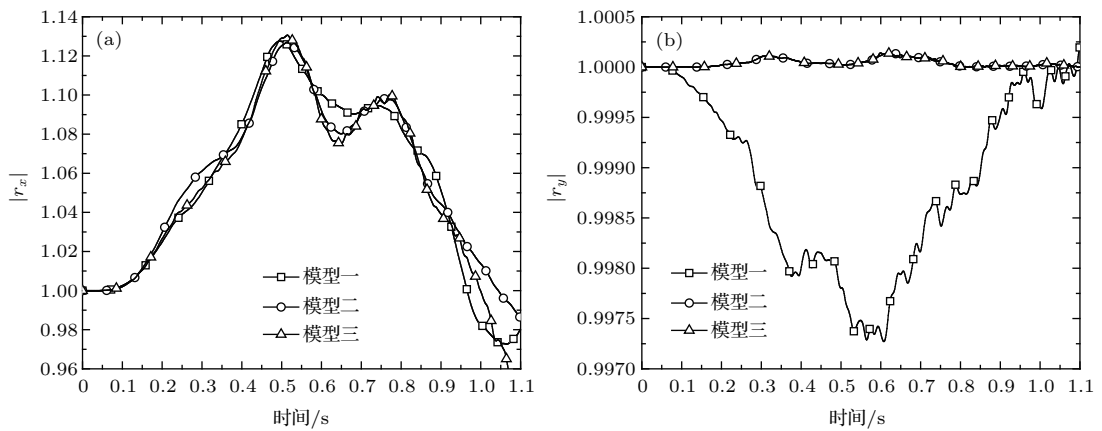


图 21 单摆最后一个单元内中点的 r_x 和 r_y 幅值变化 (a) r_x ; (b) r_y

Fig. 21. Magnitude of the r_x and r_y vector at middle point of last element: (a) r_x ; (b) r_y .

表 6 三种弹性力模型的单摆中点剪切应变收敛对比

Table 6. Comparison of shear strain at middle point using three different elastic force models

剪切应变	收敛单元数 / 个
模型一 (连续介质力学模型)	90
模型二 (几何精确梁模型—位移场曲率)	40
模型三 (几何精确梁模型—旋转场曲率)	30

4 结 论

本文采用梁中心线切线方向角推导了剪切梁的精确曲率公式, 提出了基于旋转场曲率的二维 ANCF 剪切梁单元模型. 通过与传统二维 ANCF 剪切梁单元模型、基于位移场曲率的二维 ANCF 单元模型对比分析, 可得到以下结论:

1) 在静力学分析以及特征频率分析中, 本文提出的模型三与理论解收敛度最好, 效率最高, 且收

敛精度和速度优于模型一;

2) 在动力学分析中, 模型三显示了良好的计算精度, 可有效预测柔性构件运动过程中的大变形现象, 此外, 对比验证了两种不同物理场推导的曲率模型在单元几何非线性分析中的有效性;

3) 动力学分析还验证了模型三可有效缓解剪切闭锁问题, 且在计算柔性梁剪切应变中收敛速度最快.

感谢美国伊利诺伊大学芝加哥分校 Ahmed. A. Shabana 教授的讨论.

参考文献

- [1] Bonnal C, Ruault J M, Desjean M C 2013 *Acta Astronaut.* **85** 51
- [2] Nishida S I, Kawamoto S 2011 *Acta Astronaut.* **68** 113
- [3] Liu J Y, Lu H 2007 *Multibody Syst. Dyn.* **18** 487

- [4] He X S, Song M, Deng F Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044501 (in Chinese) [和兴锁, 宋明, 邓峰岩 2011 物理学报 **60** 044501]
- [5] He X S, Deng F Y, Wang R 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1428 (in Chinese) [和兴锁, 邓峰岩, 王睿 2010 物理学报 **59** 1428]
- [6] Chen S J, Zhang D G, Hong J Z 2013 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **45** 251 (in Chinese) [陈思佳, 章定国, 洪嘉振 2013 力学学报 **45** 251]
- [7] Shabana A A 1997 *Multibody Syst. Dyn.* **1** 189
- [8] Tian Q, Zhang Y Q, Chen L P, Tan G 2010 *Adv. Mech.* **40** 189 (in Chinese) [田强, 张云清, 陈立平, 覃刚 2010 力学进展 **40** 189]
- [9] Omar M A, Shabana A A 2001 *J. Sound Vib.* **243** 565
- [10] Hussein B A, Sugiyama H, Shabana A A 2007 *J. Comput. Nonlinear Dyn.* **2** 146
- [11] Dmitrochenko O N, Hussein B A, Shabana A A 2009 *J. Comput. Nonlinear Dyn.* **4** 21002
- [12] García-Vallejo D, Mikkola A M, Escalona J L 2007 *Nonlinear Dyn.* **50** 249
- [13] Tian Q, Zhang Y Q, Chen L P, Yang J Z 2010 *Nonlinear Dyn.* **60** 489
- [14] Gerstmayr J, Matikainen M K, Mikkola A M 2008 *Multibody Syst. Dyn.* **20** 359
- [15] Nachbagauer K, Pechstein A S, Irschik H, Gerstmayr J 2011 *Multibody Syst. Dyn.* **26** 245
- [16] Nachbagauer K, Gruber P, Gerstmayr J 2013 *J. Comput. Nonlinear Dyn.* **8** 021004
- [17] Gerstmayr J, Shabana A A 2006 *Nonlinear Dyn.* **45** 109
- [18] Dufva K E, Sopanen J T, Mikkola A M 2005 *J. Sound Vib.* **280** 719
- [19] Mikkola A M, Dmitrochenko O, Matikainen M 2009 *J. Comput. Nonlinear Dyn.* **4** 011004
- [20] Vesa-Ville A, Hurskainen T, Matikainen M K, Wang J, Mikkola A M 2016 *J. Comput. Nonlinear Dyn.* **12** 041007
- [21] Zhang X S, Zhang D G, Chen S J, Hong J Z 2016 *Acta Phys. Sin.* **64** 094501 (in Chinese) [章孝顺, 章定国, 陈思佳, 洪嘉振 2016 物理学报 **64** 094501]
- [22] Goetz A 1970 *Introduction to Differential Geometry* (Reading, Massachusetts: Addison Wesley Pub. Co) pp56–58
- [23] Timoshenko S 1940 *Strength of Materials* (Part I Elementary Theory and Problems Second Edition) (New York: D. Van Nostrand Co) pp147–148

Analysis of planar shear deformable beam using rotation field curvature formulation*

Zhang Da-Yu¹⁾ Luo Jian-Jun^{1)†} Zheng Yin-Huan²⁾ Yuan Jian-Ping¹⁾

1) (National Key Laboratory of Aerospace Flight Dynamics, School of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

2) (School of Mechanical and Electronic Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

(Received 31 December 2016; revised manuscript received 6 April 2017)

Abstract

In recent years, research on space debris removal technique has received wide attention in aerospace field. Many novel concepts on active flexible debris remover have been proposed, such as flexible flying net, tethered cable manipulator. In view with the high flexibility and large deformation of this kind of structure, the implementation of attitude control is challenging. An accurate dynamic model of highly flexible structure is important and needed. The beam element is the most common element adopted in flexible remover models. So, in this investigation, a rotation field-based curvature shear deformable beam using absolute nodal coordinate formulation (ANCF) (named RB-curvature ANCF beam) is proposed and its geometrically nonlinear characteristic under large deformation motion is studied. Curvature is first derived through planar rotation transformation matrix between the reference frame and current tangent frame of beam centerline, and written as an arc-length derivative of the orientation angle of the tangent vector. Using the geometrically exact beam theory, the strain energy is expressed as an uncoupled form, and the new curvature is adopted to formulate bending energy. Based on the ANCF, the dynamic equation of beam is established, where mass and external force matrices are constant. In order to validate the performance of proposed beam element, other two types of beams are introduced as the comparative models. One is the classical ANCF fully parameterized shear deformable beam derived by continuum mechanics theory, and the other is position field-based curvature ANCF shear deformable beam (named PB-curvature ANCF beam). The PB-curvature model is evaluated by differentiating unit tangent vector of beam centerline with respect to its arc length quoted from differential geometry theory. A series of static analysis, eigenfrequency tests and dynamic analysis are implemented to examine the performance of the proposed element. In static analysis, both small and non-small deformation cases show that the proposed RB-curvature ANCF beam achieves the faster speed, higher precision and good agreement with analytical solution in the case of cantilever beam subjected to a concentrated tip force, which is compared with other two beam models. The eigenfrequency analysis validates RB-curvature ANCF beam in a simply supported beam case that converges to its analytical solution. Meanwhile, the mode shapes of the proposed ANCF beam could be correctly corresponded to vibration state of element with respect to each different eigenfrequency. In the dynamics test, a flexible pendulum case is used and simulation results show that the proposed RB-curvature ANCF beam accords well with ANSYS BEAM3, classical ANCF shear beam and PB-curvature ANCF beam in vertical displacements of tip point and middle point. Since deformation modes are uncoupled in the cross section of proposed beam element, its shear strain is achieved with much better convergence in the case of lower elastic modulus, and shear locking is significantly alleviated, compared with classical ANCF beam. Therefore, RB-curvature ANCF shear deformable beam element proposed in this paper is able to describe accurately geometric nonlinearity in large deformation problem, and can be a potential candidate in the modeling of flexible / rigid-flexible mechanisms.

Keywords: absolute nodal coordinate formulation, rotation field-based curvature, geometrically exact beam theory, shear locking

PACS: 45.10.-b, 05.45.-a, 45.05.+x

DOI: 10.7498/aps.66.114501

* Project supported by the Major Program of National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61690210, 61690211), and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61603304, 11472213).

† Corresponding author. E-mail: jjluo@nwpu.edu.cn