

柱面非线性麦克斯韦方程组的行波解

胡亮 罗懋康

Traveling wave solutions of the cylindrical nonlinear Maxwell's equations

Hu Liang Luo Mao-Kang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **66**, 130302 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.130302

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.130302>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I13>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

粗糙海面与其上方多目标复合散射的混合算法

Hybrid algorithm for composite electromagnetic scattering from the multi-target on and above rough sea surface

物理学报.2017, 66(5): 050301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.050301>

分形粗糙面合成孔径雷达成像研究

Synthetic aperture radar image of fractal rough surface

物理学报.2016, 65(7): 070301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.070301>

扩展性微动目标回波模拟与特征参数提取研究

Research on extended micro-motion target echo simulation and characteristic extraction

物理学报.2015, 64(21): 210301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210301>

基于压缩感知的一维海面与二维舰船复合后向电磁散射快速算法研究

A new fast algorithm based on compressive sensing for composite electromagnetic back scattering from a 2D ship located on a 1D rough sea surface

物理学报.2015, 64(6): 060301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.060301>

导电磁管道外任意放置线圈激励下脉冲涡流场时域解析解

Analytical solutions to pulsed eddy current field excited by a differently oriented probe coil outside a conducting ferromagnetic pipe

物理学报.2014, 63(24): 240301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240301>

柱面非线性麦克斯韦方程组的行波解

胡亮 罗懋康[†]

(四川大学数学学院, 成都 610065)

(2017年2月3日收到; 2017年4月16日收到修改稿)

柱面电磁波在各种非均匀非线性介质中的传播问题具有重要的研究价值. 对描述该问题的柱面非线性麦克斯韦方程组进行精确求解, 则是最近几年新兴的研究热点. 但由于非线性偏微分方程组的极端复杂性, 针对任意初边值条件的精确求解在客观上具有极高的难度, 已有工作仅解决了柱面电磁波在指数非线性因子的非色散介质中的传播情况. 因此, 针对更为确定的物理场景, 寻求能够精确描述其中更为广泛的物理性质的解, 是一种更为有效的处理方法. 本文讨论了具有任意非线性因子与幂律非均匀因子的非色散介质中柱面麦克斯韦方程组的行波精确解, 理论分析表明这种情况下柱面电磁波的电场分量 E 已不存在通常形如 $E = g(r - kt)$ 的平面行波解; 继而通过适当的变量替换与求解相应的非线性常微分方程, 给出电场分量 $E = g(\ln r - kt)$ 形式的广义行波解, 并以例子展示所得到的解中蕴含的类似于自陡效应的物理现象.

关键词: 柱面电磁波, 非线性介质, 行波解, 自陡

PACS: 03.50.De, 02.30.Jr

DOI: 10.7498/aps.66.130302

1 引言

电磁波按波面的形状一般有三种基本类型: 平面波, 柱面波和球面波. 传统的非线性光学一般研究平面波与各种物质相互作用产生的非线性效应^[1-3]. 柱面电磁波是几种基本的电磁波之一, 它在各种非均匀非线性介质中的传播问题是一个重要又有趣的课题, 可用于地球物理探测、微带天线技术^[4,5]、铁电体分析^[6]等领域. 但由于柱面坐标系下的麦克斯韦方程组非常复杂, 一直以来人们对柱面非线性光学研究进展缓慢, 寻找合适的数学和物理方法处理柱面电磁波在各种非均匀非线性介质中的传播问题也成为一难题^[7].

最近, Petrov 和 Kudrin^[6,7] 求出了柱面坐标系下具有指数非线性因子的非色散介质中麦克斯韦方程组的精确解, 自此以后, 柱面电磁波与相关的非线性光学现象获得了大量的关注与研究, 各种研究成果也层出不穷. 例如, Xiong 等^[8,9] 将 Petrov 和 Kudrin 的结果进行了推广, 指出他们的求解方

法也适用于指数非线性因子与幂律非均匀因子相结合的介质; Xiong 等^[10-12] 还讨论了柱面电磁波的二次谐波产生、和频与差频的产生等非线性光学现象; Chen 等^[13] 研究了初值对柱面非线性麦克斯韦方程组精确解的影响; Ranjbar 和 Bahari^[14] 则研究了柱面电磁波的四波混频效应. 这些研究成果的基础都是 Petrov 和 Kudrin 所得到的精确解. 实际上, 精确解在解释与预言物理现象、开发新的近似计算方法等方面扮演着非常重要的角色^[15-17]. 然而, 目前人们还无法求出其他非线性介质中柱面电磁波的精确解.

柱面非线性麦克斯韦方程组没有一般的精确求解方法^[18,19], 这时寻找满足某个特定条件的、有物理意义的解, 是一种可行的途径. 本文主要讨论电磁波理论特别是孤立波理论中极为重要的一类解——行波解^[20-25]. 从已有的资料看来, 目前对柱面非线性麦克斯韦方程组行波解的研究尚未展开. 在 Petrov 和 Kudrin 工作的基础上, 我们提出一种方法来求得在具有任意非线性因子与幂律非均匀因子的非色散介质中传播的柱面电磁波

[†] 通信作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

的行波精确解, 并研究其物理性质和意义. 本文的组织结构如下: 第二部分介绍所使用的物理模型; 第三部分先指出所讨论模型的电场分量已不存在通常形如 $E = g(r - kt)$ 的平面行波解, 然后给出 $E = g(\ln r - kt)$ 形式的广义行波精确解^[26]; 第四部分讨论所得的广义行波解与平面行波解的异同; 第五部分进行总结.

2 柱面电磁波模型

本文使用文献^[6—14, 18, 19, 27]工作中相同的物理模型. 考虑一个无损耗、非磁性介质中的电磁场, 并假设介质拥有一个对称轴, 将对称轴设为 z 轴, 建立柱面坐标系 (r, ϕ, z) . 我们进一步假设电磁场与 ϕ 和 z 无关, 且电场部分平行于对称轴 z , 同时忽略色散效应, 那么我们可以得到如下的柱面麦克斯韦方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(r, t)}{\partial r} + \frac{H(r, t)}{r} &= \frac{\partial D(r, t)}{\partial t} = \varepsilon(r, E) \frac{\partial E(r, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial E(r, t)}{\partial r} &= \mu_0 \frac{\partial H(r, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

这里 μ_0 是真空磁导率; r, t 分别表示半径和时间; E, H, D 分别表示电场、磁场和电位移; $\varepsilon(r, E) = dD/dE$ 是介质的介电函数, 不同的 $\varepsilon(r, E)$ 所描述的介质性质也有所不同. 在本文中, 我们研究非均匀非线性介质

$$\varepsilon(r, E) = \varepsilon_0 r^{-2} f(E), \quad (2)$$

其中 ε_0 是真空电容率, f 是任意可导函数. 这个介电函数表明我们要研究的介质具有幂律非均匀因

子 r^{-2} , 而非线性因子可以是任意的. 实际上, 随着材料科学的发展, 现在通过超材料几乎可以构造出具有任何性质的介质^[28—31]. 当非线性因子 $f(E)$ 取成指数函数的形式: $f(E) = \exp(\alpha E)$, 其中 α 是描述介质特性的常数, 方程组 (1) 就变成 Petrov 和 Xiong 等所讨论的情况^[6—14, 18, 19, 27].

3 行波解

本文只考虑电场分量 $E(r, t)$ 的行波精确解, 这时磁场分量 $H(r, t)$ 的解可通过对方程组 (1) 积分得到. 我们指出方程组 (1) 与 (2) 不存在形如 $E(r, t) = g(r - kt)$ 的非平凡平面行波解, 其中 g 为任意可导函数, k 为表示波速的任意常数. 这里非平凡意味着 E 不恒为常数, 以及 $k \neq 0$.

实际上, 消去麦克斯韦方程组 (1) 与磁场 H 有关的项后, 我们得到如下二阶非线性偏微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + r^{-1} \frac{\partial E}{\partial r} - \varepsilon_0 \mu_0 r^{-2} f(E) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ - \varepsilon_0 \mu_0 r^{-2} f'(E) \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

若是电场 E 具有形式 $E = g(r - kt)$, 令 $w = r - kt$, 将 $E = g(w)$ 代入偏微分方程 (3), 经过一些计算后可得:

$$\begin{aligned} g''(w)r^2 + g'(w)r \\ - \varepsilon_0 \mu_0 k^2 [f(g)g''(w) - f'(g)(g'(w))^2] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

方程 (4) 可以看成关于变量 r 的代数方程, 解出 r 得到:

$$r = \begin{cases} \frac{-g'(w) \pm \sqrt{[g'(w)]^2 + 4\varepsilon_0 \mu_0 k^2 [f(g)g''(w) - f'(g)(g'(w))^2]g''(w)}}{2g''(w)} & g''(w) \neq 0, \\ \frac{\varepsilon_0 \mu_0 k^2 [f(g)g''(w) - f'(g)(g'(w))^2]}{g'(w)} & g''(w) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

这个等式与此前 $w = r - kt$ 的定义相矛盾, 从而表明 $E = g(w) = g(r - kt)$ 的假设不能成立.

在 Petrov 和 Kudrin 工作^[6] 的基础上, 由柱面电磁波相比平面电磁波多出的 $\frac{1}{r}H(r, t)$ 一项, 我们寻找形如 $E = g(\ln r - kt)$ 的广义行波解. 对方程组 (1) 与 (2) 使用如下变量替换: $u = \ln(r/r_0), v = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} t/r_0, \xi = \frac{E}{(\text{N/C})}, \eta = \frac{\sqrt{\mu_0 r} H}{r_0 \sqrt{\varepsilon_0} (\text{N/C})}$, 其中 r_0 是一个具有长度量纲的

常数, (N/C) 是国际单位制下电场强度的单位. 我们可以得到如下的无量纲方程组:

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = f(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \eta}{\partial v}. \quad (6)$$

对方程组 (6) 消去 η 变量, 可得:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} - f'(\xi) \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2 - f(\xi) \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = 0. \quad (7)$$

无量纲方程 (7) 可以求得平面行波解. 实际上, 设 $\xi = \xi(u - kv)$, 其中 k 为表示波速的无量纲常数, 代

入 (7) 式后有

$$(1 - k^2 f(\xi))\xi'' - k^2 f'(\xi)(\xi')^2 = 0, \quad (8)$$

化简非线性常微分方程 (8), 可得

$$\frac{d \ln |\xi'(u - kv)|}{d(u - kv)} = -\xi'(u - kv) \frac{d \ln |1 - k^2 f(\xi)|}{d\xi}. \quad (9)$$

微分方程 (9) 的解可由隐函数表示:

$$c_1(u - kv) + c_2 = \xi - k^2 \int f(\xi) d\xi, \quad (10)$$

其中 c_1, c_2 是任意常数. (10) 式给出了方程组 (6) 中 ξ 函数的平面行波解. 我们将 (10) 式中 u, v 分别由原来的变量 r, t 替换, 便可得到柱面非线性麦克斯韦方程组 (1) 与 (2) 的广义行波解:

$$\begin{aligned} \frac{E}{(N/C)} &= \xi = c_1(u - kv) + c_2 + k^2 \int f(\xi) d\xi \\ &= c_1 \left(\ln \frac{r}{r_0} - k \frac{c_0}{r_0} t \right) + c_2 + k^2 \int f(\xi) d\xi \\ &= g \left(\ln \frac{r}{r_0} - k \frac{c_0}{r_0} t \right). \end{aligned} \quad (11)$$

这里 $c_0 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ 表示真空光速, 函数 g 是由非线性因子 $f(\xi)$ 决定的函数; 其他符号如前所述, (N/C) 表示电场 E 在国际单位制下的单位, c_1 及 c_2 表示任意常数, r_0 表示一个具有长度量纲的常数, k 则是表示波速的无量纲常数. 注意若 k 取负值, 那么随着时间的增加柱面波会向半径减小的方向传播; 反之, 则向半径增大的方向传播. 在忽略反射的情况下, 如果激发柱面行波 (11) 的激励源在柱心处, 则行波会向外 (半径增大的方向) 传播, 此时 $k > 0$; 如果激励源在 $r = R$ 处, 为便于讨论, 我们将介质 (2) 的边界取为 R , 则对于 R 之内的区域而言, 行波是向内 (半径减少的方向) 传播的, 此时 $k < 0$. 向外传播的柱面行波 (11) 相当于向内传播情况的时间反演, 即对于柱心处的激励源, 我们可以找到一个边界 $r = R$ 处的镜像源, 该镜像源在 R 之内激发的行波按时间 t 负方向的演化等价于柱心源激发的行波按时间 t 的演化, 因此接下来我们只讨论源在边界处的情况. 此时由源激发的柱面行波 (11) 的初始加速度必定要满足

$$\frac{\partial_t E(r, t)|_{t=0}}{(N/C)} = |k| \frac{c_0}{r_0} g' \left(\ln \frac{r}{r_0} \right),$$

而边界值要满足

$$\frac{E(r, t)|_{r=R}}{(N/C)} = g \left(\ln \frac{R}{r_0} + |k| \frac{c_0}{r_0} t \right).$$

4 解的物理意义

我们在这一部分讨论所获得的行波解 (11) 的物理意义. 考虑一个半径为 R 的圆柱形腔体, 其中填满非均匀非线性非色散介质 $\epsilon(r, E) = \epsilon_0 c_0^2 r^{-2} E^2 (E^2 - 1)^{-1}$, 这种介质的典型代表是铁电体 [32,33]. 取 $r_0 = 1(\text{m})$, $k = \left[-\frac{c_0}{(\text{m/s})} \right]^{-1}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, 其中 (m), (m/s) 分别为国际单位制下长度和速度的单位. 则由 (11) 式可得柱面电磁波 (1) 式电场分量的行波解为

$$E = \tanh(\ln r + t), \quad (12)$$

由此解可以很容易构造出所需的初边值条件:

$$\begin{aligned} E(r, t)|_{t=0} &= \frac{r - r^{-1}}{r + r^{-1}}, \\ \partial_t E(r, t)|_{t=0} &= 1 - \left(\frac{r - r^{-1}}{r + r^{-1}} \right)^2, \\ E(r, t)|_{r=R} &= \tanh(\ln R + t), \end{aligned}$$

其中各物理量的单位已被消除, E, r 与 t 分别表示无量纲的电场、半径与时间.

若介质的介电函数取为 $\epsilon(r, E) = \epsilon_0 c_0^2 r^{-2} \left(1 + \frac{1}{2E\sqrt{-\ln E}} \right)$, 其他条件不变, 则相应的行波解为

$$E = \exp[-(\ln r + t)^2], \quad (13)$$

初边值条件为

$$\begin{aligned} E(r, t)|_{t=0} &= \exp[-(\ln r)^2], \\ \partial_t E(r, t)|_{t=0} &= -2(\ln r) \exp[-(\ln r)^2], \\ E(r, t)|_{r=R} &= \exp[-(\ln R + t)^2]. \end{aligned}$$

同样, E, r 与 t 分别表示无量纲的电场、半径与时间.

图 1 显示的是不同时刻 E 与 $\ln r$ 的关系, 图 1(a) 是通过行波解 (12) 绘制的, 图 1(b) 则是通过行波解 (13) 绘制的, 取边界 $R = e^5$. 可以看到, 在 $t = 0$ 时, 两个子图中 $E(r, 0) = \frac{r - r^{-1}}{r + r^{-1}}$ 和 $E(r, 0) = \exp[-(\ln r)^2]$ 分别对应于解 (12) 和 (13) 初始时刻各点的电场状态; 经过时间 t_0 后, 解 (12) 和 (13) 分别为 $E(r, t_0) = \tanh(\ln r + t_0)$ 和 $E(r, t_0) = \exp[-(\ln r + t_0)^2]$, 在 $(\ln r, E)$ 平面上, 它相当于将 0 时刻各子图的图形分别向左平移 $1 \times t_0$ 的距离; 随着时间的推移, 波形还要不断以常速度 1 向左传播. 这说明, 如果以 $\ln r$ 为横轴, 我们获得的行波解与普通的平面行波无异.

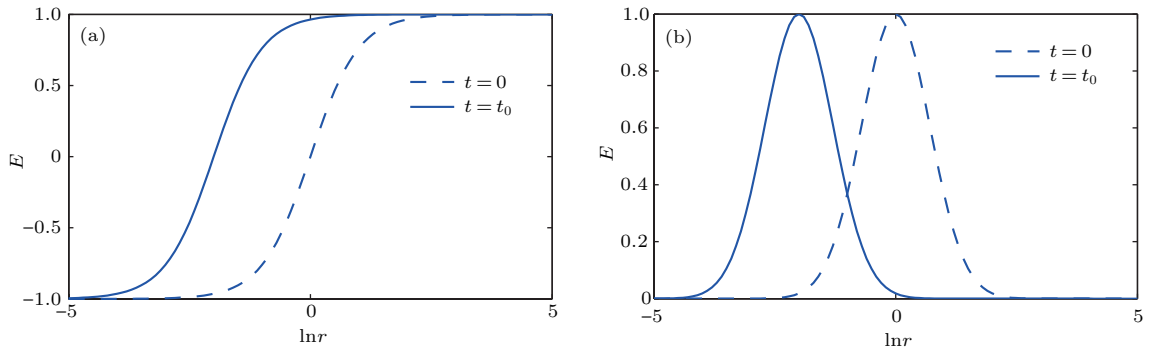


图1 (a) 行波解 (12) 的电场与 $\ln r$ 在不同时刻的关系; (b) 行波解 (13) 的电场与 $\ln r$ 在不同时刻的关系
 Fig. 1. (a) The electric field of traveling wave solution (12) as function of $\ln r$ at various times; (b) the electric field of traveling wave solution (13) as function of $\ln r$ at various times.

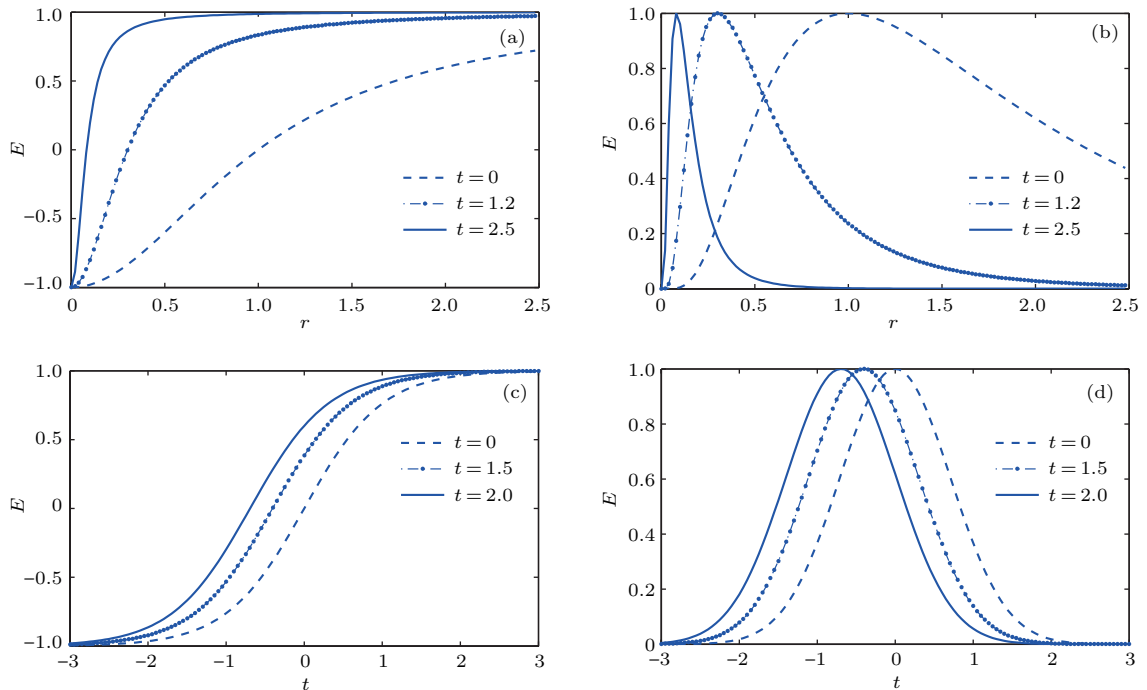


图2 (a) 行波解 (12) 的电场与 r 在不同时刻的关系; (b) 行波解 (13) 的电场与 r 在不同时刻的关系; (c) 行波解 (12) 的电场与 t 在不同位置处的关系; (d) 行波解 (13) 的电场与 t 在不同位置处的关系
 Fig. 2. (a) The electric field of traveling wave solutions (12) as function of r at various times; (b) the electric field of traveling wave solutions (13) as function of r at various times; (c) the electric field of traveling wave solutions (12) as function of t at different locations; (d) the electric field of traveling wave solutions (13) as function of t at different locations.

图2(a)和图2(b)则分别显示解(12)和解(13)不同时刻下 E 与 r 的关系,取边界 $R = 2.5$.可以看到,两个子图中电场的波形都随着时间的演化不断变得陡峭.这是由于空间各点的电场波形向柱面对称轴行进,也就是在此关系图中向左推进的速度并不是统一的,半径 r 小的地方向左推进的速度慢,而半径 r 大的地方向左推进的速度快.这一现象与传统非线性光学的自陡效应^[34,35]类似,但产生的原因并不相同:自陡效应形成的原因是波形的传播速度受到电场强度的影响,而在这里波形

传播速度的变化是由柱面电磁波的广义行波解含有的 $\ln r$ 项所引起的.随着时间的推移,各个子图中电场的波形越来越陡峭,最终坡度会近乎垂直于横轴;理论上经过无限长时间后,在 $r = 0$ 处,电场将出现间断,形成电磁冲击波^[36,37].图2(c)和图2(d)分别为解(12)和解(13)不同位置处 E 与 t 的振动曲线.可以发现,对这两个子图而言,不同位置处各自的振动曲线实际上是一样的,相互之间相当于按时间轴进行平移.这进一步说明我们得到的广义行波解具有行波的性质.值得注意的是,这

两个子图同样体现出各位置处的振动曲线推进速度的不一致性,以图 2(d)为例,从 $r = 2$ 处推进到 $r = 1.5$ 处所需时间为 $\ln \frac{4}{3}$,而从 $r = 1.5$ 处推进到 $r = 1$ 处所需时间为 $\ln \frac{3}{2}$,即离柱心越近处推进速度越慢.

显然,不论 (11) 式中的函数 g 取何种形式,只要波速参数 $k < 0$,电场的波形在半径越小的地方就会推进得越慢,而在半径越大的地方推进得越快,从而波形会变得越来越陡;理论上当时间 $t = +\infty$ 时,在 $r = 0$ 处会形成冲击波.

5 结 论

柱面非线性麦克斯韦方程组的求解是目前的研究热点与前沿之一,但由于它在数学上的极端复杂性,在任意初边值条件下,目前人们只对一类非线性形式给出了精确解,进一步的研究遇到了很大的困难.在本文中,我们在某些特定的初边值条件下,针对更为广泛的非线性情形,讨论柱面非线性麦克斯韦方程组的行波精确解.通过研究发现所讨论的柱面电磁模型没有普通的平面行波解,而是存在一种广义的行波解.这个广义的行波解有着独特的性质:随着位置的不同,电场波形的传播速度也不同,从而会形成某种类似于自陡的现象.通过设计特殊的结构与合适的激励源,我们的工作在实际中对铁电体分析、新型材料的电磁性质研究等有一定意义,在理论上则为柱面非线性麦克斯韦方程组的研究提供了新的思路与结论.

感谢陈凯杰博士和张霄博士的讨论和帮助.

参考文献

[1] Ye P X 2007 *Nonlinear Optical Physics* (Vol. 1) (Beijing: Peking University Press) pp17–18 (in Chinese) [叶佩弦 2007 非线性光学物理 (北京:北京大学出版社) 第17—18页]

[2] Yao B, Zheng Q H, Peng J H, Zhong R N, Xiang T, Xu W S 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 118401

[3] Zhang M, Li L S, Zheng N, Shi Q F 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 077802

[4] Chew W C 1990 *Waves and Fields in Inhomogeneous Media* (New York: Van Nostrand Reinhold) p161

[5] Ertürk V B, Rojas R G 2003 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **51** 739

[6] Petrov E Y, Kudrin A V 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 190404

[7] Kudrin A V, Petrov E Y 2010 *JETP* **110** 537

[8] Xiong H, Si L G, Huang P, Yang X 2010 *Phys. Rev. E* **82** 057602

[9] Xiong H, Si L G, Ding C, Lü X Y, Yang X, Wu Y 2012 *Phys. Rev. E* **85** 016602

[10] Xiong H, Si L G, Ding C, Yang X, Wu Y 2011 *Phys. Rev. A* **84** 043841

[11] Xiong H, Si L G, Guo J F, Lü X Y, Yang X 2011 *Phys. Rev. A* **83** 063845

[12] Xiong H, Si L G, Ding C, Yang X, Wu Y 2012 *Phys. Rev. E* **85** 016606

[13] Chen S Y, Li T, Xie J B, Xie H, Zhou P, Tian Y F, Xiong H, Si L G 2013 *Phys. Rev. E* **88** 035202

[14] Ranjbar M, Bahari A 2016 *Opt. Commun.* **375** 19

[15] Zhang S Y, Ma X R, Zhang S G, Chen L, Wang X Y, Mu K L, Wang S 2014 *Chin. Phys. B* **23** 060304

[16] Zhang C Q, Ruan C J, Zhao D, Wang S Z, Yang X D 2014 *Chin. Phys. B* **23** 088401

[17] Liu L X, Shao C G 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 111401

[18] Es'kin V A, Kudrin A V, Petrov E Y 2011 *Phys. Rev. E* **83** 067602

[19] Xiong H, Si L G, Yang X X, Wu Y 2015 *Sci. Reports* **5** 11071

[20] Grenfell B T, Bjornstad O N, Kappey J 2001 *Nature* **414** 716

[21] Shi L F, Zhu M, Zhou X C, Wang W G, Mo J Q 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 130201 (in Chinese) [石兰芳, 朱敏, 周先春, 汪维刚, 莫嘉琪 2014 物理学报 **63** 130201]

[22] Xu Y H, Han X L, Shi L F, Mo J Q 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 090204 (in Chinese) [许永红, 韩祥临, 石兰芳, 莫嘉琪 2014 物理学报 **63** 090204]

[23] Harko T, Mak M K 2015 *J. Math. Phys.* **56** 111501

[24] Sardar A, Husnine S M, Rizvi S T R, Younis M, Ali K 2015 *Nonlinear Dynam.* **82** 1317

[25] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett. A* **372** 417

[26] Shu Y Q 2011 *Ph. D. Dissertation* (Lanzhou: Lanzhou University) (in Chinese) [舒雅琴 2011 博士学位论文 (兰州: 兰州大学)]

[27] Petrov E Y, Kudrin A V 2012 *Phys. Rev. E* **85** 055202

[28] Silva A, Monticone F, Castaldi G, Galdi V, Alù A, Engheta N 2014 *Science* **343** 160

[29] Eidini M, Paulino G H 2015 *Sci. Adv.* **1**

[30] Ma G, Sheng P 2016 *Sci. Adv.* **2**

[31] Fan W, Yan B, Wang Z B, Wu L M 2016 *Sci. Adv.* **2**

[32] Chen H W, Yang C R, Fu C L, Zhao L, Gao Z Q 2006 *Appl. Surf. Sci.* **252** 4171

[33] Fong D D, Stephenson G B, Streiffer S K, Eastman J A, Auciello O, Fuoss P H, Thompson C 2004 *Science* **304** 1650

[34] Han S H, Park Q H 2011 *Phys. Rev. E* **83** 066601

[35] Shafeeqe Ali A K, Porsezian K, Uthayakumar T 2014 *Phys. Rev. E* **90** 042910

[36] Reed E J, Soljačić M, Gee R, Joannopoulos J D 2007 *Phys. Rev. B* **75** 174302

[37] Grischkowsky D, Duling III I N, Chen J C, Chi C C 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 1663

Traveling wave solutions of the cylindrical nonlinear Maxwell's equations

Hu Liang Luo Mao-Kang[†]

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

(Received 3 February 2017; revised manuscript received 16 April 2017)

Abstract

Study on propagation of cylindrical electromagnetic waves in various inhomogeneous and nonlinear media is of fundamental importance, which can be described by the cylindrical nonlinear Maxwell's equations. In recent years, finding exact solutions for these equations has emerged as a popular research topic. The exact solutions play an irreplaceable role in understanding and predicting physical phenomena, and developing numerical calculation methods, and so on. However, due to the extreme complexity of nonlinear partial differential equations, exact solutions of the cylindrical Maxwell's equations were only able to be obtained in a nonlinear and nondispersive medium whose dielectric function is an exponential function in previous researches. Actually, there is no general method at present which can exactly solve arbitrary cylindrical nonlinear Maxwell's equations. Therefore, finding physically admissible solutions meeting certain particular condition for the cylindrical nonlinear Maxwell's equations might be feasible.

In this paper, we discuss the traveling wave solutions which are very important in electromagnetic theory, especially in solitary wave theory. To our knowledge, research on obtaining traveling wave solutions of the cylindrical nonlinear Maxwell's equations is still lacking. The main conclusions in this paper are listed as follows.

Firstly, we introduce the cylindrical nonlinear Maxwell's equations mentioned in some previous publications, which can describe cylindrical electromagnetic waves propagation in inhomogeneous nonlinear and nondispersive media. In this paper, we focus on the nondispersive media with arbitrary nonlinearity and power-law inhomogeneity.

Secondly, we point out that the electric field component E of the model has no plane traveling wave solutions $E = g(r - kt)$, after theoretical analysis and study. Then generalized traveling wave solutions in form of $E = g(\ln r - kt)$ for the electric field component are obtained by finding correct variable substitution and solving second-order nonlinear ordinary differential equation.

Finally, we provide two examples to show the physical meanings of our generalized traveling wave solutions. We find that the transmitting speeds of vibrations vary with different points of the electric field. Actually, the transmitting speed of the vibration of a certain point closer to the cylinder center is lower. As a result, we observed a physical phenomenon similar to that of "self-steepening".

Our work can be used to analyze the electromagnetic properties of ferroelectric materials and new materials. Theoretically, it can also provide an approach to studying the cylindrical nonlinear Maxwell's equations.

Keywords: cylindrical electromagnetic waves, nonlinear media, traveling wave solutions, self-steepening

PACS: 03.50.De, 02.30.Jr

DOI: 10.7498/aps.66.130302

[†] Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn