

逼近积分点数下限的五阶容积卡尔曼滤波定轨算法

李兆铭 杨文革 丁丹 廖育荣

A novel algorithm of fifth-degree cubature Kalman filter for orbit determination at the lower bound approaching to the number of cubature points

Li Zhao-Ming Yang Wen-Ge Ding Dan Liao Yu-Rong

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 66, 158401 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.158401

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.158401>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I15>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种基于社交影响力和平均场理论的信息传播动力学模型

[An information diffusion dynamic model based on social influence and mean-field theory](#)

物理学报.2017, 66(3): 030501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.030501>

基于 Huber 的高阶容积卡尔曼跟踪算法

[Huber-based high-degree cubature Kalman tracking algorithm](#)

物理学报.2016, 65(8): 088401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.088401>

基于广义 M 估计的鲁棒容积卡尔曼滤波目标跟踪算法

[Robust cubature Kalman filter target tracking algorithm based on generalized M-estimation](#)

物理学报.2015, 64(21): 218401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.218401>

微波低通高阻复合材料构件的设计与性能验证

[Design and verification of microwave low frequency band-pass and high frequency band-stop composite structure](#)

物理学报.2015, 64(18): 188401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.188401>

基于石墨烯纳米带的齿形表面等离子体滤波器的研究

[Tooth-shaped plasmonic filter based on graphene nanoribbon](#)

物理学报.2015, 64(10): 108402 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.108402>

# 逼近积分点数下限的五阶容积卡尔曼滤波定轨算法\*

李兆铭<sup>1)</sup> 杨文革<sup>2)†</sup> 丁丹<sup>2)</sup> 廖育荣<sup>2)</sup>

1) (装备学院研究生院, 北京 101416)

2) (装备学院光电装备系, 北京 101416)

(2017年2月27日收到; 2017年5月1日收到修改稿)

为了在保持滤波定轨精度不变的条件下提高定轨计算的实时性, 提出一种新的逼近积分点个数下限的五阶容积卡尔曼滤波定轨算法. 首先, 采用一种数值容积准则对非线性函数的高斯加权积分进行近似, 该准则所需的积分点个数仅比五阶代数精度容积准则积分点个数的理论下限多一个积分点, 并在贝叶斯滤波算法框架下推导出本文算法的更新步骤. 然后, 给出实时定轨所需的状态方程和量测方程, 在状态方程中考虑了  $J_2$  项引力摄动和大气阻力摄动, 在量测方程中利用坐标系转换推导了轨道状态与测量元素之间的非线性关系. 仿真实验结果表明, 本文所提算法在定轨精度方面与已有的五阶滤波算法相当, 但所需的积分点个数最少, 计算实时性最高, 从而验证了本文算法的有效性.

**关键词:** 容积卡尔曼滤波, 五阶代数精度, 积分点, 定轨

**PACS:** 84.30.Vn, 05.10.-a, 02.30.Yy, 05.10.Ln

**DOI:** 10.7498/aps.66.158401

## 1 引言

对低轨卫星进行在轨监视需要实时确定卫星的轨道状态, 地基雷达由于具备全天时、全天候的工作能力而成为空间监视系统中的一类重要的传感器<sup>[1]</sup>. 由于卫星轨道动力学模型具有较强的非线性, 因此, 在数据处理层面, 实时定轨问题的本质便是在考虑轨道摄动的影响下, 利用雷达输出的带噪声的测距、测速和测角数据, 通过非线性滤波算法得到轨道状态的最优估计<sup>[2]</sup>, 具有重要的研究价值.

非线性卡尔曼滤波算法采用递归方法实现对状态向量的估计, 其假设后验概率密度服从高斯分布, 从时间更新与量测更新的五个关键积分可以得到其核心是计算形如“非线性函数  $\times$  高斯概率密度函数”的多维向量积分<sup>[3]</sup>, 一般难以求得该

积分的解析解, 因此研究中经常采用数值容积准则对其进行逼近. 作为非线性滤波的一种重要方法, 容积卡尔曼滤波<sup>[3,4]</sup>(cubature Kalman filter, CKF)采用三阶球面-径向容积准则对非线性函数的高斯加权积分进行近似, 具有比无迹卡尔曼滤波<sup>[5,6]</sup>更高的滤波精度和数值稳定性, 已经在许多领域得到了广泛的应用<sup>[7-10]</sup>. 为了进一步提高非线性滤波精度, Jia等<sup>[11,12]</sup>利用任意阶全对称球面插值准则和矩匹配原理, 提出了五阶容积卡尔曼滤波(fifth-degree cubature Kalman filter, 5-CKF), 将CKF的精度从三阶提高到五阶, 该算法目前已经应用于目标跟踪、惯性导航初始对准和多源数据融合等领域<sup>[13,14]</sup>. 文献<sup>[15]</sup>将强跟踪滤波与5-CKF相结合, 利用渐消因子在线调整协方差矩阵, 有效提高了算法的鲁棒性. 文献<sup>[16]</sup>利用统计线性回归模型近似非线性量测模型, 提出了基于Huber的5-CKF算法. 文献<sup>[17]</sup>利用矩阵对角

\* 国家高技术研究发展计划(批准号: 2015AA7026085)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wengeryang\_3@163.com

化变换代替5-CKF中的Cholesky分解,提高了滤波计算的稳定性. 上述研究虽然改进了5-CKF算法,但并没有在本质上改进算法所采用的五阶容积准则. Wang等<sup>[18]</sup>利用球面单纯形变换群计算球面积分,提出了五阶球面单纯形-径向容积卡尔曼滤波(fifth-degree spherical simplex-radial cubature Kalman filter, 5-SSRCKF),并指出在高维条件下,5-SSRCKF具有比5-CKF更高的滤波精度. Singh和Bhaumik<sup>[19]</sup>指出5-CKF和5-SSRCKF均是采用矩匹配法计算径向积分,而该方法无法保证径向准则的最优性,进而选择采用高阶高斯-拉盖尔公式计算径向积分,提出了高阶容积求积分卡尔曼滤波(high-degree cubature quadrature Kalman filter, HDCQKF).然而,上述滤波算法在提高精度的同时带来了积分点个数的增多,且积分点个数随着系统维数呈多项式增长,一旦算法应用于高维系统,或者处理器性能较低时,可能会造成较重的计算负担,进而降低算法的实时性.卫星轨道的实时确定需要在一个滤波周期内实现对量测信号的解析并输入滤波算法执行,对算法的计算效率和实时应用能力具有较高的要求.因此,研究如何降低五阶滤波定轨算法的计算量是十分必要的.

本文提出一种新的逼近积分点个数下界的5-CKF定轨算法,该算法在近似非线性函数的高斯加权积分时所需的积分点个数仅比五阶容积准则积分点个数的理论下限多一个积分点,从而有效地降低了算法的计算量.仿真实验结果表明,本文所提算法在定轨精度方面与已有五阶滤波算法相当,但所需的积分点最少,实时性最高,从而验证了本文算法的有效性.

## 2 逼近积分点个数下界的五阶容积准则

考虑如下向量函数的积分,

$$I(\mathbf{g}) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (1)$$

(1)式所示的积分一般难以求得解析解,因此在研究中经常采用被积函数在某些确定点上的函数值的加权和来对该积分进行数值逼近,构成如下容积准则,

$$Q(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbf{g}(\mathbf{x}_i), \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{x}_i$  为积分点,  $\omega_i$  为积分权值,  $N$  为积分点个数. 研究中经常采用代数精度来描述积分准则(2)的逼近程度,为使容积准则达到五阶代数精度,需要的积分点个数的理论下限为<sup>[20]</sup>

$$N_{\min} = n^2 + n + 1. \quad (3)$$

目前在5-CKF中常见的容积准则有两种,分别为五阶球面-径向容积准则和五阶球面单纯形-径向容积准则,其积分点个数分别为  $2n^2 + 1$  和  $n^2 + 3n + 3$ . 可以看出,该两种准则的积分点个数与理论下限尚有差距.为了进一步逼近积分点个数的下限,降低数值运算量,提高算法的实时性,文献<sup>[20]</sup>给出了如下容积准则:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{g}) = & A[\mathbf{g}(\eta, \eta, \dots, \eta) + \mathbf{g}(-\eta, -\eta, \dots, -\eta)] \\ & + B \sum_{\text{per}} [\mathbf{g}(\lambda, \xi, \xi, \dots, \xi) \\ & + \mathbf{g}(-\lambda, -\xi, -\xi, \dots, -\xi)] \\ & + C \sum_{\text{per}} [\mathbf{g}(\mu, \mu, \gamma, \dots, \gamma) \\ & + \mathbf{g}(-\mu, -\mu, -\gamma, \dots, -\gamma)], \end{aligned} \quad (4)$$

式中,  $\mu, \gamma$  和  $\eta$  满足如下等式:

$$\frac{\mu}{\gamma} = -3 \pm \sqrt{16 - 2n}, \quad (5)$$

$$\gamma^2 = \frac{3 \pm \sqrt{7 - n}}{2(16 - n \mp 4\sqrt{16 - 2n})}, \quad (6)$$

$$\eta^2 = \frac{n(n - 7) \mp (n^2 - 3n - 16)\sqrt{7 - n}}{2(n^3 - 7n^2 - 16n + 128)}. \quad (7)$$

该准则所需的积分点个数为  $n^2 + n + 2$ , 仅比(3)式中的理论下限多一个积分点,但该准则仅对  $2 \leq n \leq 7$  成立. 该积分准则包含8个参数,分别是  $\mu, \gamma, \eta, \lambda, \xi, A, B$  和  $C$ , 文献<sup>[20]</sup>中给出了这些参数的具体值,本文仅针对实时定轨系统给出  $n = 6$  时的参数值,列于表1.

为了将(4)式化简为便于应用的形式,定义  $\mathbf{e}$  为如下  $n$  阶单位矩阵:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

表1 容积准则参数表 ( $n = 6$ )  
Table 1. Parameters of cubature rule ( $n = 6$ ).

$n$	Parameters	Value 1	Value 2
6	$\eta$	0.10000 00000 00000 $\times 10^1$	0.10000 00000 00000 $\times 10^1$
	$\lambda$	0.14142 13562 37309 $\times 10^1$	0.94280 90415 82063
	$\xi$	0.00000 00000 00000	-0.47140 45207 91032
	$\mu$	-0.10000 00000 00000 $\times 10^1$	-0.16666 66666 66667 $\times 10^1$
	$\gamma$	0.10000 00000 00000 $\times 10^1$	0.33333 33333 33333
	$A$	0.78125 00000 00000 $\pi^{n/2} \times 10^{-2}$	0.78125 00000 00000 $\pi^{n/2} \times 10^{-2}$
	$B$	0.62500 00000 00000 $\pi^{n/2} \times 10^{-1}$	0.62500 00000 00000 $\pi^{n/2} \times 10^{-1}$
	$C$	0.78125 00000 00000 $\pi^{n/2} \times 10^{-1}$	0.78125 00000 00000 $\pi^{n/2} \times 10^{-2}$

用矩阵下标  $i$  表示矩阵的第  $i$  列, 利用单位矩阵  $\mathbf{e}$  可以将 (4) 式写成如下形式:

$$\begin{aligned}
 Q(\mathbf{g}) = & A \left[ \mathbf{g} \left( \sum_{i=1}^n \eta \mathbf{e}_i \right) + \mathbf{g} \left( - \sum_{i=1}^n \eta \mathbf{e}_i \right) \right] \\
 & + B \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{g} \left( \lambda \mathbf{e}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \xi \mathbf{e}_j \right) \right. \\
 & \left. + \mathbf{g} \left( - \lambda \mathbf{e}_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n \xi \mathbf{e}_j \right) \right] \\
 & + C \sum_{i=1}^{C_n^2} \left[ \mathbf{g} \left( \mu \mathbf{e}_j + \mu \mathbf{e}_k + \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq j, l \neq k}}^n \gamma \mathbf{e}_l \right) \right. \\
 & \left. + \mathbf{g} \left( - \mu \mathbf{e}_j - \mu \mathbf{e}_k - \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq j, l \neq k}}^n \gamma \mathbf{e}_l \right) \right] \\
 & j < k; j, k = 1, 2, \dots, n. \tag{9}
 \end{aligned}$$

进一步地, 定义如下变量

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^n \eta \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{q}_i = \lambda \mathbf{e}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \xi \mathbf{e}_j, \\
 \mathbf{s}_i &= \mu \mathbf{e}_j + \mu \mathbf{e}_k + \sum_{l=1, l \neq j, l \neq k}^n \gamma \mathbf{e}_l, \\
 & j < k, j, k = 1, 2, \dots, n,
 \end{aligned}$$

则 (9) 式可以简化为如下形式:

$$\begin{aligned}
 Q(\mathbf{g}) = & A[\mathbf{g}(\mathbf{p}) + \mathbf{g}(-\mathbf{p})] \\
 & + B \sum_{i=1}^n [\mathbf{g}(\mathbf{q}_i) + \mathbf{g}(-\mathbf{q}_i)] \\
 & + C \sum_{i=1}^{C_n^2} [\mathbf{g}(\mathbf{s}_i) + \mathbf{g}(-\mathbf{s}_i)]. \tag{10}
 \end{aligned}$$

相比较 (4) 式的形式, 通过线性变换改写成的 (10) 式的形式更便于应用于非线性滤波算法.

### 3 逼近积分点个数下限的 5-CKF 算法

考虑如下加性噪声的非线性系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \end{cases} \tag{11}$$

式中,  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  为系统状态向量,  $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^p$  为量测向量,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$  和  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$  是已知的非线性函数, 噪声  $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^p$  是不相关的高斯白噪声, 其协方差矩阵分别为  $\mathbf{Q}_k$  和  $\mathbf{R}_k$ . 贝叶斯滤波理论采用递归方法实现对状态向量  $\mathbf{x}_k$  的估计, 其关键是计算贝叶斯滤波框架中以下几个积分<sup>[19]</sup>:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{P}_{k-1}^+) d\mathbf{x}_{k-1}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_k^- = & \int \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_{k-1}) \\
 & \times N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{P}_{k-1}^+) d\mathbf{x}_{k-1} \\
 & - \hat{\mathbf{x}}_k^- (\hat{\mathbf{x}}_k^-)^T + \mathbf{Q}_k, \tag{13}
 \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \int \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-) d\mathbf{x}_k, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_z = & \int \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \mathbf{h}^T(\mathbf{x}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-) d\mathbf{x}_k \\
 & - \hat{\mathbf{z}}_k^- (\hat{\mathbf{z}}_k^-)^T + \mathbf{R}_k, \tag{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{xz} = & \int \mathbf{x}_k \mathbf{h}^T(\mathbf{x}_k) N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-) d\mathbf{x}_k \\
 & - \hat{\mathbf{x}}_k^- (\hat{\mathbf{z}}_k^-)^T, \tag{16}
 \end{aligned}$$

式中,  $N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x)$  为高斯概率密度函数, 且随机变量  $\mathbf{x}$  的均值为  $\hat{\mathbf{x}}$ , 协方差矩阵为  $\mathbf{P}_x$ ;  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  为  $k$  时刻的先验状态估计,  $\mathbf{P}_k^-$  为先验误差协方差矩阵,  $\hat{\mathbf{z}}_k$  为量测预测值,  $\mathbf{P}_z$  为量测预测协方差矩

阵,  $\mathbf{P}_{xz}$  为交叉协方差矩阵. 从(12)—(16)式可以看出, 非线性卡尔曼滤波的关键是计算形如  $\int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x})N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x) d\mathbf{x}$  的多维向量函数积分, 其中,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  为任意非线性函数. 又因为该积分具有如下等价表示 [3]:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x})N(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\sqrt{2\mathbf{P}_x}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) e^{-\mathbf{x}^T\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (17)$$

结合积分准则(10), 可以得到非线性函数的高斯加权积分为

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x})N(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x) d\mathbf{x} \\ &= \frac{A}{\sqrt{\pi^n}} [g(\sqrt{2\mathbf{P}_x}\mathbf{p} + \bar{\mathbf{x}}) + g(-\sqrt{2\mathbf{P}_x}\mathbf{p} + \bar{\mathbf{x}})] \\ &+ \frac{B}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=1}^n [g(\sqrt{2\mathbf{P}_x}\mathbf{q}_i + \bar{\mathbf{x}}) + g(-\sqrt{2\mathbf{P}_x}\mathbf{q}_i + \bar{\mathbf{x}})] \\ &+ \frac{C}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=1}^{C_n^2} [g(\sqrt{2\mathbf{P}_x}\mathbf{s}_i + \bar{\mathbf{x}}) + g(-\sqrt{2\mathbf{P}_x}\mathbf{s}_i + \bar{\mathbf{x}})]. \end{aligned} \quad (18)$$

从(18)式可以看出, 与积分点相对应的权重分别为  $\frac{A}{\sqrt{\pi^n}}$ ,  $\frac{B}{\sqrt{\pi^n}}$  和  $\frac{C}{\sqrt{\pi^n}}$ , 因此, 权重的正负完全取决于  $A, B$  和  $C$  的值. 文献[20]指出  $A, B$  和  $C$  均为正值, 从而确保了本文算法的数值计算稳定性. 用  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \cdots \ \mathbf{q}_n]$  表示由  $\mathbf{q}_i$  组成的矩阵, 用  $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \cdots \ \mathbf{s}_{C_n^2}]$  表示由  $\mathbf{s}_i$  组成的矩阵. 在贝叶斯滤波算法框架下, 利用(18)式可以推导出逼近积分点个数下限的5-CKF算法, 其具体的计算步骤如下.

**步骤1 滤波初始化**

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0^+ = E(\mathbf{x}_0), \\ \mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T]. \end{cases} \quad (19)$$

循环  $k = 1, 2, \dots$ , 完成以下步骤.

**步骤2 时间更新**

计算容积点

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)} = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \sqrt{2\mathbf{P}_{k-1}^+}[\mathbf{p} - \mathbf{p}]_i, & i = 1, 2, \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \sqrt{2\mathbf{P}_{k-1}^+}[\mathbf{q} - \mathbf{q}]_{i-2}, & i = 3, \dots, 2n + 2, \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \sqrt{2\mathbf{P}_{k-1}^+}[\mathbf{s} - \mathbf{s}]_{i-2n-2}, & i = 2n + 3, \dots, 2C_n^2 + 2n + 2; \end{cases} \quad (20)$$

计算容积点的非线性传递

$$\mathbf{X}_k^{(i)} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}); \quad (21)$$

计算先验状态估计

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \frac{A}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=1}^2 \mathbf{X}_k^{(i)} + \frac{B}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=3}^{2n+2} \mathbf{X}_k^{(i)} \\ &+ \frac{C}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=2n+3}^{2C_n^2+2n+2} \mathbf{X}_k^{(i)}; \end{aligned} \quad (22)$$

计算先验误差协方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^- &= \frac{A}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=1}^2 (\mathbf{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ &+ \frac{B}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=3}^{2n+2} (\mathbf{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ &+ \frac{C}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=2n+3}^{2C_n^2+2n+2} (\mathbf{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{X}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \\ &+ \mathbf{Q}_{k-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

**步骤3 量测更新**

计算容积点

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k^- + \sqrt{2\mathbf{P}_k^-}[\mathbf{p} - \mathbf{p}]_i, & i = 1, 2, \\ \hat{\mathbf{x}}_k^- + \sqrt{2\mathbf{P}_k^-}[\mathbf{q} - \mathbf{q}]_{i-2}, & i = 3, \dots, 2n + 2, \\ \hat{\mathbf{x}}_k^- + \sqrt{2\mathbf{P}_k^-}[\mathbf{s} - \mathbf{s}]_{i-2n-2}, & i = 2n + 3, \dots, 2C_n^2 + 2n + 2; \end{cases} \quad (24)$$

计算容积点的非线性传递

$$\mathbf{Z}_k^{(i)} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}); \quad (25)$$

计算量测预测值

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_k &= \frac{A}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=1}^2 \mathbf{Z}_k^{(i)} + \frac{B}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=3}^{2n+2} \mathbf{Z}_k^{(i)} \\ &+ \frac{C}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=2n+3}^{2C_n^2+2n+2} \mathbf{Z}_k^{(i)}; \end{aligned} \quad (26)$$

计算量测误差协方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_z &= \frac{A}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=1}^2 (\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)(\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)^T \\ &+ \frac{B}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=3}^{2n+2} (\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)(\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)^T \\ &+ \frac{C}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=2n+3}^{2C_n^2+2n+2} (\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)(\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)^T \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{R}_k; \tag{27}$$

计算交叉协方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xz} = & \frac{A}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=1}^2 (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)^T \\ & + \frac{B}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=3}^{2n+2} (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)^T \\ & + \frac{C}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{i=2n+3}^{2C_n^2+2n+2} (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{Z}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_k)^T. \end{aligned} \tag{28}$$

**步骤4 状态更新**

计算卡尔曼滤波增益

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xz} \mathbf{P}_z^{-1}; \tag{29}$$

计算后验状态估计

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k); \tag{30}$$

计算后验误差协方差矩阵

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_z \mathbf{K}_k^T. \tag{31}$$

## 4 低轨卫星实时定轨数学模型

### 4.1 卫星轨道动力学模型

对于运行在近地轨道上的卫星, 地球  $J_2$  项非球形摄动和大气阻力摄动是卫星所受到的最主要的摄动力. 在 J2000 地心惯性坐标系 ( $O\text{-}XYZ$ ) 中, 考虑上述两种摄动影响, 卫星的轨道动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{z} = v_z, \\ \dot{v}_x = \frac{\mu x}{r^3} \left[ J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right) \left( 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 1.5 \right) - 1 \right] \\ \quad + f_{ax} + f_x, \\ \dot{v}_y = \frac{\mu y}{r^3} \left[ J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right) \left( 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 1.5 \right) - 1 \right] \\ \quad + f_{ay} + f_y, \\ \dot{v}_z = \frac{\mu z}{r^3} \left[ J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right) \left( 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 4.5 \right) - 1 \right] \\ \quad + f_{az} + f_z, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{cases} \tag{32}$$

式中,  $\mathbf{X} = (x \ y \ z)^T$  为卫星在  $O\text{-}XYZ$  中的位置矢量,  $\dot{\mathbf{X}} = (v_x \ v_y \ v_z)^T$  为卫星在  $O\text{-}XYZ$  中的速

度矢量,  $J_2$  为带谐项系数,  $\mu$  为地球引力常数,  $R_e$  为地球半径,  $(f_x \ f_y \ f_z)^T$  为地球高阶非球形摄动、三体引力摄动和太阳光压摄动等之和在三个坐标轴上的分量, 在研究中可以等效成零均值的高斯白噪声.  $\mathbf{f}_a = (f_{ax} \ f_{ay} \ f_{az})^T$  为大气阻力摄动, 具体的表达式为

$$\mathbf{f}_a = -\frac{1}{2} \frac{c_d A}{m} \rho_d v_{rel} \mathbf{v}_{rel}, \tag{33}$$

式中,  $c_d$  为大气阻力系数;  $\frac{A}{m}$  为卫星面质比;  $\rho_d$  为大气密度;  $\mathbf{v}_{rel}$  为卫星与大气间的相对速度, 假设大气随着地球转动, 则有

$$\mathbf{v}_{rel} = \dot{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}, \tag{34}$$

其中,  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e \times (0 \ 0 \ 1)^T$  为地球旋转角速度矢量,  $\boldsymbol{\omega}_e$  为地球自转角速度. 用四阶龙格库塔法将 (32) 式写成如下离散形式:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \tag{35}$$

式中,  $\mathbf{X}_k = (x_k \ y_k \ z_k \ v_{x,k} \ v_{y,k} \ v_{z,k})^T$  为  $k$  时刻的轨道状态,  $\mathbf{w}_k$  为系统噪声.

### 4.2 地面雷达量测模型

雷达测量模型建立在雷达地平坐标系 ( $O\text{-}X_h Y_h Z_h$ ) 中, 而轨道模型建立在  $O\text{-}XYZ$  中, 因此需要利用 WGS84 地球固连坐标系 ( $O\text{-}X_e Y_e Z_e$ ) 实现从  $O\text{-}XYZ$  到  $O\text{-}X_h Y_h Z_h$  的转换. 假设卫星在  $O\text{-}XYZ$  中的轨道状态为  $(\mathbf{X} \ \dot{\mathbf{X}})^T$ , 在  $O\text{-}X_e Y_e Z_e$  中的轨道状态为  $(\mathbf{X}_f \ \dot{\mathbf{X}}_f)^T$ , 在  $O\text{-}X_h Y_h Z_h$  中的轨道状态为  $(\mathbf{X}_h \ \dot{\mathbf{X}}_h)^T$ , 分两步完成轨道状态的转换.

**步骤1 从  $O\text{-}XYZ$  到  $O\text{-}X_e Y_e Z_e$  的转换**

转换矩阵为  $\mathbf{M}_J^W = \mathbf{M}_{Pw} \mathbf{M}_{Ro} \mathbf{M}_{Nu} \mathbf{M}_{Pr}$ , 其中,  $\mathbf{M}_{Pr}$  为岁差矩阵,  $\mathbf{M}_{Nu}$  为章动矩阵,  $\mathbf{M}_{Ro}$  为地球自转矩阵,  $\mathbf{M}_{Pw}$  为极移矩阵, 进而可以得到

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{M}_J^W \mathbf{X}, \tag{36}$$

$$\dot{\mathbf{X}}_f = \mathbf{M}_J^W \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{M}}_J^W \mathbf{X}. \tag{37}$$

这里转换矩阵的导数  $\dot{\mathbf{M}}_J^W$  如下式所示:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}_J^W &= \frac{d(\mathbf{M}_{Pw} \mathbf{M}_{Ro} \mathbf{M}_{Nu} \mathbf{M}_{Pr})}{dt} \\ &\approx \mathbf{M}_{Pw} \frac{d(\mathbf{M}_{Ro})}{dt} \mathbf{M}_{Nu} \mathbf{M}_{Pr}, \end{aligned} \tag{38}$$

其中  $\frac{d(\mathbf{M}_{Ro})}{dt}$  为地球自转矩阵的导数矩阵,

$$\frac{d(\mathbf{M}_{Ro})}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_e & 0 \\ -\omega_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}_{Ro}. \quad (39)$$

将 (36) 和 (37) 式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_f \\ \dot{\mathbf{X}}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_J^W & 0 \\ \dot{\mathbf{M}}_J^W & \mathbf{M}_J^W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

步骤2 从  $O-X_e Y_e Z_e$  到  $O-X_h Y_h Z_h$  的转换转换矩阵  $\mathbf{M}_W^H$  为

$$\mathbf{M}_W^H = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (41)$$

式中,  $\lambda$  为雷达地心经度,  $\varphi$  为雷达地心纬度, 同时可以换算成雷达在  $O-X_e Y_e Z_e$  中的地心坐标  $\mathbf{X}_c = (x_c \ y_c \ z_c)^T$ , 于是得

$$\mathbf{X}_h = \mathbf{M}_W^H (\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_c), \quad (42)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_h = \mathbf{M}_W^H \dot{\mathbf{X}}_f, \quad (43)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_h \\ \dot{\mathbf{X}}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_W^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_W^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_f \\ \dot{\mathbf{X}}_f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_W^H \mathbf{X}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

将 (40) 式代入 (44) 式可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_h \\ \dot{\mathbf{X}}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_W^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_W^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_J^W & \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{M}}_J^W & \mathbf{M}_J^W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_W^H \mathbf{X}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

于是, 便得到轨道状态从  $O-XYZ$  到  $O-X_h Y_h Z_h$  的转换, 如 (45) 式所示. 为了得到  $O-X_h Y_h Z_h$  中的量测值与轨道状态的关系, 将  $\mathbf{X}_h$  和  $\dot{\mathbf{X}}_h$  写成具体向量的形式为  $\mathbf{X}_h = (x_h \ y_h \ z_h)^T$ ,  $\dot{\mathbf{X}}_h = (\dot{x}_h \ \dot{y}_h \ \dot{z}_h)^T$ , 则雷达的测距值  $R$ 、测速值  $\dot{R}$ 、方位角  $A$  和俯仰角  $E$  与轨道状态之间的几何关系为

$$\begin{cases} R = \sqrt{x_h^2 + y_h^2 + z_h^2}, \\ \dot{R} = \frac{(x_h \dot{x}_h + y_h \dot{y}_h + z_h \dot{z}_h)}{\sqrt{x_h^2 + y_h^2 + z_h^2}}, \\ A = \arctan \frac{y_h}{x_h}, \\ E = \arctan \frac{z_h}{\sqrt{x_h^2 + y_h^2}}. \end{cases} \quad (46)$$

(46) 式可以写成如下离散量测方程的形式:

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (47)$$

式中,  $\mathbf{Z}_k = (R_k \ \dot{R}_k \ A_k \ E_k)^T$  为  $k$  时刻的量测值,  $\mathbf{v}_k$  为量测噪声. 至此, (35) 式与 (47) 式便构成与 (11) 式相对应的实时滤波定轨所需的状态方程和量测方程.

## 5 仿真实验与分析

首先, 用两个非线性系统滤波算例来验证本文算法的性能.

算例1 考虑如下包含三角函数、乘方运算以及指数运算的三维强非线性系统:

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \sin^2(x_{2,k}) \\ x_{1,k} + e^{-0.05x_{3,k}} \\ 0.2x_{1,k}(x_{2,k} + x_{3,k}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_k,$$

$$z_k = \cos(x_{1,k}) + x_{2,k}x_{3,k} + v_k,$$

式中,  $Q = 0.1$ ,  $R = 1$ , 滤波初值为  $\hat{\mathbf{x}}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ . 将本文提出的算法与标准 CKF, 5-CKF, 5-SSRCKF 和 HDCQKF 算法相对比, 仿真步长为 1, 仿真步数为 100, 采用均方根误差 (root mean square error, RMSE) 来描述估计精度, 运行 1000 次 Monte Carlo 仿真. 仿真结果如图 1 所示, 统计 RMSE 的平均值和算法运行时间列于表 2.

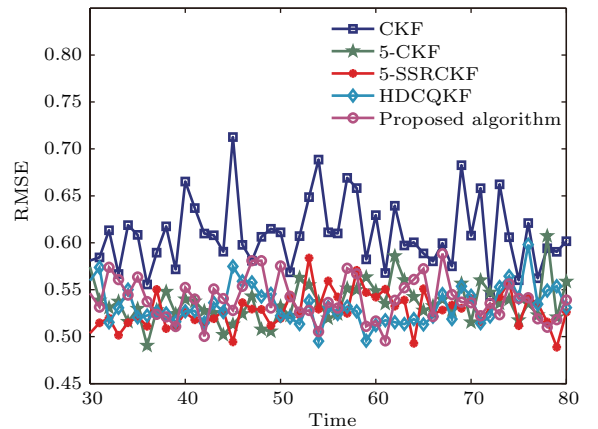


图1 (网刊彩色) 五种算法滤波 RMSE 值  
Fig. 1. (color online) RMSE of five filtering algorithms.

表2 五种算法滤波平均 RMSE 值和运行耗时

Table 2. Mean RMSE and execution time of five filtering algorithms.

Algorithm	RMSE	Execution time/s
CKF	0.6151	20.10
5-CKF	0.5383	43.84
5-SSRCKF	0.5311	44.59
HDCQKF	0.5336	77.01
Proposed algorithm	0.5397	39.32

**算例 2** 考虑如下非线性系统模型, 该模型是验证非线性滤波算法性能的常用模型, 系统状态模型和量测模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = 3 \cos(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}_{k-1}, \\ z_k = \sqrt{1 + \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k} + v_k, \end{cases}$$

其中  $k = 1, 2, \dots, N$ . 滤波初值为  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}_{n \times 1}$ , 考虑系统维数  $n = 5$  和  $n = 7$  两种情况, 系统噪声与量测噪声均为零均值单位协方差高斯白噪声. 仿真步长为 1, 步数为 100, 执行 1000 次 Monte Carlo 仿真, 结果如图 2 所示, 统计平均 RMSE 和算法运行耗时, 列于表 3.

从以上算例 1 和 2 的结果可以看出, CKF 算法执行所需的时间最短, 这是因为 CKF 采用三阶球面-径向容积准则, 容积点个数少, 但该准则仅具有三阶精度, 在系统具有强非线性时的滤波精度要低于五阶滤波算法. 以本文算例为例, 在算例 1 中, 相比 CKF, 本文算法将滤波精度提高了 12.26%. 在算例 2 中, 相比 CKF, 本文算法将滤波精度分别提高了 10.91% 和 5.72%. 算例中对比的四种五阶算法的滤波精度相当, 而由于本文采用的五阶容积准则逼近容积点个数的下限, 因此本文算法在保持五阶滤波精度的同时具有最高的计算效率.

在通过上述两个算例验证本文算法性能之后, 将本文算法应用于地基实时定轨之中, 图 3 所示为卫星地面模拟器, 其上运行高精度轨道预报算

法, 该算法考虑了地球高阶非球形引力、大气阻力、太阳光压、三体引力和潮汐等摄动影响. 其中, 考虑 21 阶地球模型, 大气阻力系数  $c_d = 2.2$ , 卫星面质比为  $0.02 \text{ m}^2/\text{kg}$ , 大气密度模型采用 Jacchia-Roberts 模型, 太阳光压系数  $c_r = 1$ . 实验中考虑卫星的轨道历元为 2016 年 9 月 1 日 16:00:00 (UTC), 轨道六根数分别为

$$\begin{aligned} a &= 7028.14 \text{ km}, \quad e = 0, \quad i = 80.7^\circ, \\ \Omega &= 63.8^\circ, \quad \omega = 0^\circ, \quad f = 107.1^\circ. \end{aligned}$$

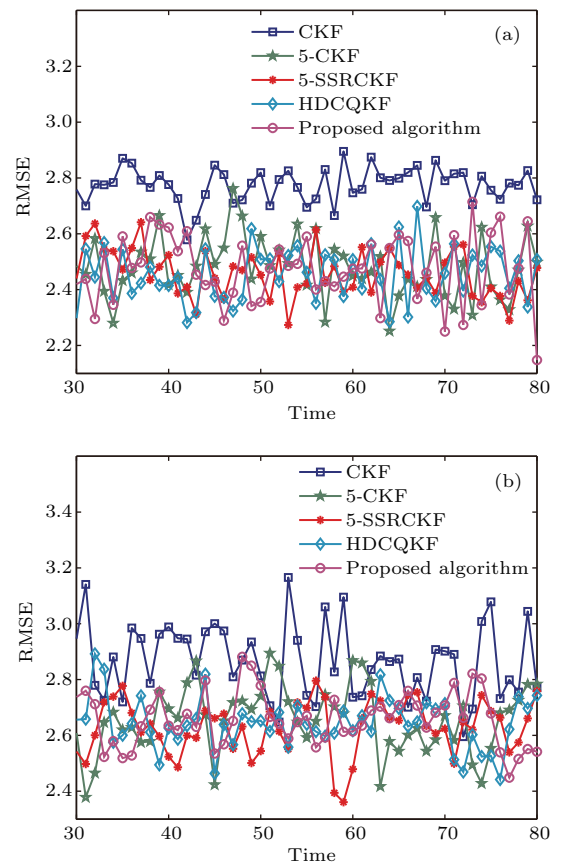


图 2 (网刊彩色) 五种算法滤波 RMSE 值 (a) 五维系统; (b) 七维系统

Fig. 2. (color online) RMSE of five filtering algorithms: (a) Five dimension system; (b) seven dimension system.

表 3 五种算法滤波平均 RMSE 值和运行耗时

Table 3. Mean RMSE and execution time of five filtering algorithms.

Algorithm	5 dimension		7 dimension	
	RMSE	Execution time/s	RMSE	Execution time/s
CKF	2.7609	20.57	2.8186	22.10
5-CKF	2.4615	49.97	2.6742	75.71
5-SSRCKF	2.4520	46.83	2.6459	68.15
HDCQKF	2.4564	86.23	2.6578	138.69
Proposed algorithm	2.4596	39.78	2.6573	53.71



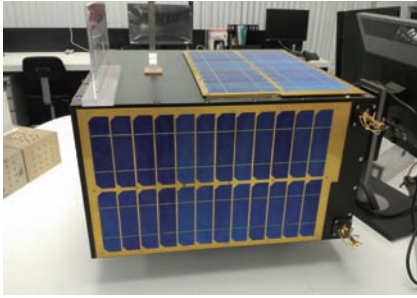


图3 卫星模拟器  
Fig. 3. Satellite simulator.

雷达经纬度和卫星过境时间如图4所示, 雷达最低测量仰角为 $10^\circ$ , 假设雷达测距误差为60 m, 测速误差为0.1 m/s, 测角误差为 $0.02^\circ$ . 滤波初值为

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 2568800 & 6080140 & 2389465 & -2174 & -1833 & 6973 \end{pmatrix}^T.$$

前述算例已经表明, 五阶算法的滤波精度要高于标准CKF, 故此处不再考虑CKF算法, 而将本文提出的算法与5-CKF, 5-SSRCKF和HDCQKF算法进行对比, 用RMSE来评价定轨精度, 运行200次Monte-Carlo仿真, 结果如图5—图8所示, 统计300—530 s内平均定位RMSE和平均定速RMSE并列于表4, 可以看出, 四种算法的收敛速度基本一致, 定轨精度基本相同.

对比四种算法的积分点个数和运行200次Monte-Carlo仿真所需的时间列于表5, 可见在同等定轨精度的条件下, 本文提出的算法所需的积分点个数最少, 算法运行所需的时间最短, 因此实时性最高.

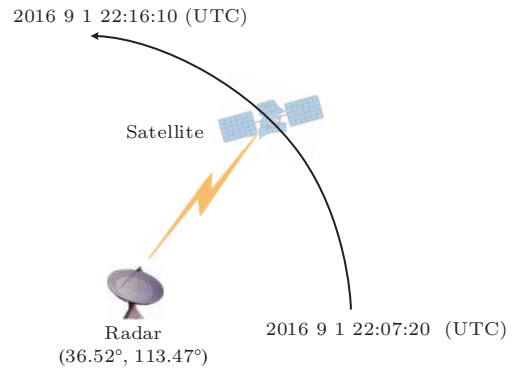


图4 实时定轨示意图  
Fig. 4. Schematic diagram of orbit determination.

表4 300—530 s平均定轨RMSE  
Table 4. Mean RMSE of orbit determination during 300—530 s.

Algorithm	Mean position RMSE/m	Mean velocity RMSE/m·s <sup>-1</sup>
5-CKF	22.291	0.117
5-SSRCKF	22.259	0.117
HDCQKF	22.108	0.117
Propose algorithm	22.105	0.118

表5 三种算法积分点个数与执行时间  
Table 5. The number of quadrature points and execution time of three algorithm.

Algorithm	Number of cubature points	Execution time/s
5-CKF	73	347.34
5-SSRCKF	57	279.78
HDCQKF	144	677.23
Proposed algorithm	44	233.43

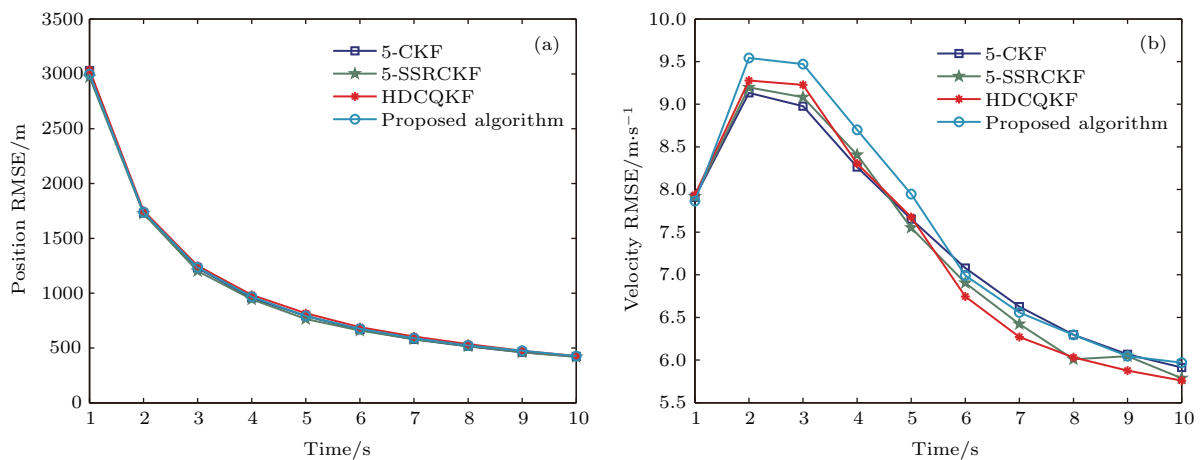


图5 (网刊彩色) 1—10 s定轨RMSE (a)位置RMSE; (b)速度RMSE

Fig. 5. (color online) RMSE of orbit determination during 1—10 s: (a) Position RMSE; (b) velocity RMSE.

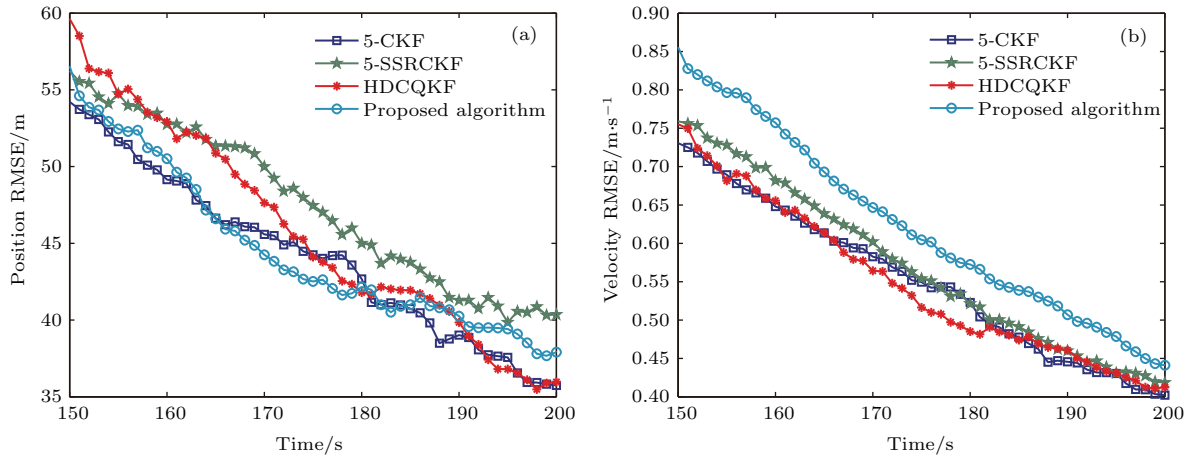


图6 (网刊彩色) 150—200 s 定轨 RMSE (a) 位置 RMSE; (b) 速度 RMSE

Fig. 6. (color online) RMSE of orbit determination during 150–200 s: (a) Position RMSE; (b) velocity RMSE.

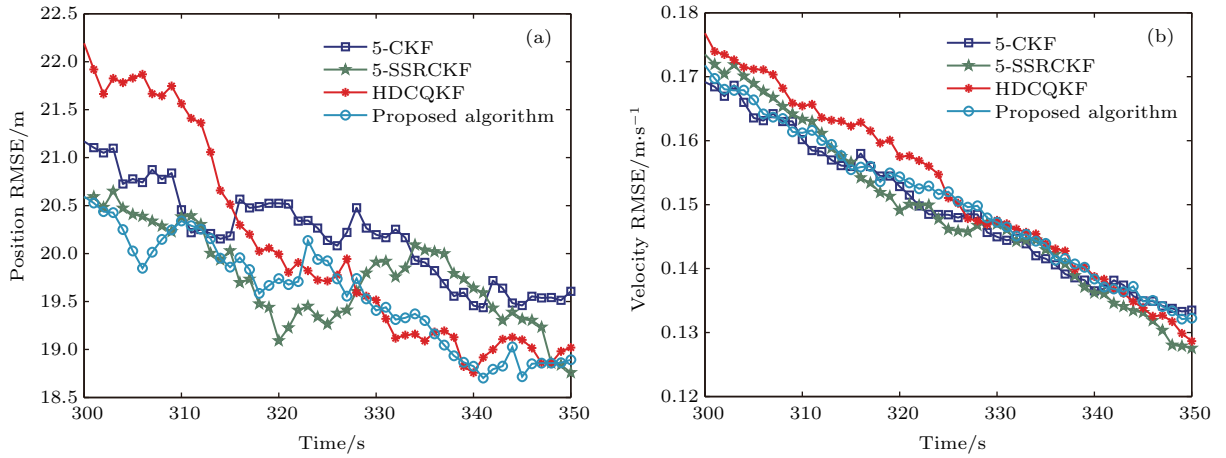


图7 (网刊彩色) 300—350 s 定轨 RMSE (a) 位置 RMSE; (b) 速度 RMSE

Fig. 7. (color online) RMSE of orbit determination during 300–350 s: (a) Position RMSE; (b) velocity RMSE.

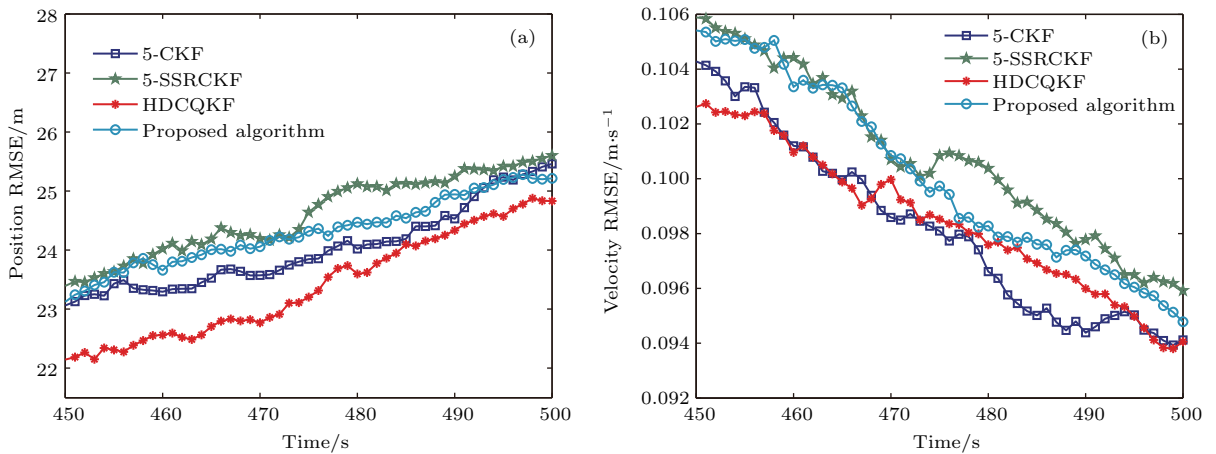


图8 (网刊彩色) 450—500 s 定轨 RMSE (a) 位置 RMSE; (b) 速度 RMSE

Fig. 8. (color online) RMSE of orbit determination during 450–500 s: (a) Position RMSE; (b) velocity RMSE.

## 6 结 论

本文提出了一种新的逼近积分点个数下限的5-CKF定轨算法,采用一种数值容积准则对非线性函数的高斯加权积分进行近似,并在贝叶斯滤波算法框架下推导出算法的更新步骤.该算法所需的积分点个数为 $n^2+n+2$ ,比五阶代数精度容积准则的积分点个数理论下限仅多一个,相比已有的五阶容积滤波算法,比5-CKF少 $n^2-n-1$ ,比5-SSRCKF少 $2n+1$ ,可见该算法降低了计算的复杂度,有效提高了算法的实时性,且随着系统状态维数的增加,该算法的优势更加明显.在地基雷达对低轨卫星实时定轨的仿真实验中,本文算法的定轨精度与5-CKF,5-SSRCKF算法定轨精度相当,定位精度均为22 m左右,定速精度均为0.11 m/s左右,但算法的运行时间最短,运行200次Monte-Carlo仿真相比5-CKF少了113.91 s,相比5-SSRCKF少了46.35 s,从而验证了该算法的有效性.虽然该算法在保持五阶滤波精度的同时具有相比其他算法更高的计算效率,但仅针对系统维数 $2 \leq n \leq 7$ 时有效,然而该维数范围已经可以满足大部分的应用需求.

## 参考文献

- [1] Ning X, Ye C M, Yang J, Shen B 2014 *Chin. J. Radio* **29** 27 (in Chinese) [宁夏, 叶春茂, 杨健, 沈彬 2014 电波科学学报 **29** 27]
- [2] Abhinoy K S, Shovan B 2014 *IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology* Noida, India, December 15–17, 2014 p114
- [3] Arasaratnam I, Haykin S 2009 *IEEE Trans. Autom. Control* **54** 1254
- [4] Jafar Z, Ehsan S 2015 *IET Sci. Meas. Technol.* **9** 294
- [5] Julier S J, Uhlmann J K, Whyte H F D 2000 *IEEE Trans. Autom. Control* **45** 477
- [6] Xiong K, Zhang H Y, Chan C W 2006 *Automatica* **42** 261
- [7] Zhang L J, Yang H B, Lu H P, Zhang S F, Cai H, Qian S 2014 *Acta Astronaut.* **105** 254
- [8] Chen J G, Wang N, Ma L L, Xu B G 2015 *IET Radar Sonar Navig.* **9** 324
- [9] Lu Z Y, Wang D M, Wang J H, Wang Y 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 150502 (in Chinese) [逯志宇, 王大鸣, 王建辉, 王跃 2015 物理学报 **64** 150502]
- [10] Wu H, Chen S X, Yang B F, Chen K 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 218401 (in Chinese) [吴昊, 陈树新, 杨宾峰, 陈坤 2015 物理学报 **64** 218401]
- [11] Jia B, Xin M, Cheng Y 2012 *Automatica* **49** 510
- [12] Jia B, Xin M, Cheng Y 2012 *IEEE Conference on Decision and Control* Maui Hawaii, USA, December 10–13, 2012 p4095
- [13] Huang X Y, Tang X Q, Wu M 2015 *Syst. Eng. Electron.* **37** 633 (in Chinese) [黄湘远, 汤霞清, 武萌 2015 系统工程与电子技术 **37** 633]
- [14] Zhang X C 2014 *Circuits Syst. Signal Process* **33** 1799
- [15] Zhang L, Cui N G, Wang X G, Yang F, Lu B G 2015 *Acta Aeronaut. Astronaut. Sin.* **36** 3885 (in Chinese) [张龙, 崔乃刚, 王小刚, 杨峰, 卢宝刚 2015 航空学报 **36** 3885]
- [16] Zhang W J, Wang S Y, Feng Y L, Feng J C 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 088401 (in Chinese) [张文杰, 王世元, 冯亚丽, 冯久超 2016 物理学报 **65** 088401]
- [17] Zhao L Q, Chen K Y, Wang J L, Yu T 2016 *Control Decis.* **31** 1080 (in Chinese) [赵利强, 陈坤云, 王建林, 于涛 2016 控制与决策 **31** 1080]
- [18] Wang S Y, Feng J C, Tse C K 2014 *IEEE Signal Process. Lett.* **21** 43
- [19] Singh A K, Bhaumik S 2015 *Int. J. Control Autom. Syst.* **13** 1097
- [20] Lu J, Darmofal D L 2004 *SIAM J. Sci. Comput.* **26** 613

# A novel algorithm of fifth-degree cubature Kalman filter for orbit determination at the lower bound approaching to the number of cubature points\*

Li Zhao-Ming<sup>1)</sup> Yang Wen-Ge<sup>2)†</sup> Ding Dan<sup>2)</sup> Liao Yu-Rong<sup>2)</sup>

1) (Graduate School, Equipment Academy, Beijing 101416, China)

2) (Department of Optical and Electrical Equipment, Equipment Academy, Beijing 101416, China)

( Received 27 February 2017; revised manuscript received 1 May 2017 )

## Abstract

With more satellites launched into orbits during recent years, monitoring and cataloging of satellites play an important role in improving the utilization rate of space resource and alleviating the pressure of orbit resource. Ground-based radar, a kind of sensor in space surveillance system, does not consider the influences of the weather and other special circumstances. And it is a key technology in space target tracking by using the measurement data for real-time orbit determination. Due to the influence of orbital perturbation, the satellite orbital dynamic model is a nonlinear system. The optimal estimation of the orbital state can be achieved by means of nonlinear filtering based on the measured ranging, velocity and angle data with measurement noise, which is the essence of real time orbit determination and has important research value. The extended Kalman filter (EKF) and unscented Kalman filter (UKF) are most widely used nonlinear Kalman filters. However, the first-order Taylor expansion of nonlinear function in EKF degrades the filtering accuracy. And the weight value in UKF might be negative for the high-dimensional system, which may directly affect the filtering stability. As an important method in nonlinear filtering, cubature Kalman filter (CKF) has better accuracy and stability than UKF. However, CKF only has third-degree filtering accuracy. In order to improve the filtering accuracy further, some fifth-degree cubature Kalman filters are proposed, mainly including the fifth-degree cubature Kalman filter and the fifth-degree spherical simplex-radial cubature Kalman filter. The optimality of the radial integral cannot be guaranteed by using the moment matching method in these fifth-degree filters, so a high-degree cubature quadrature Kalman filter (HDCQKF) is proposed. The radial integral is calculated using the high-degree Gauss-Laguerre formula in HDCQKF. However, the aforementioned filtering algorithm leads to an increase in the number of cubature points, thereby improving the accuracy, and the number of cubature points increases polynomially with the increase of system dimension. Once the algorithm is applied to a high-dimensional system, or the processor has a relatively poor performance, it may impose a heavier computing burden, thus the real-time performance decreases. Therefore, it is necessary to study how to reduce the computational complexity of the fifth-degree filtering algorithm. In order to improve the real-time performance of orbit determination on condition that the accuracy of orbit determination is kept, a novel fifth-degree cubature Kalman filter for orbit determination is proposed at the lower bound approaching to the number of cubature points. The key problem in the nonlinear Kalman filter is to calculate the multidimensional integral in the form of “nonlinear function  $\times$  Gaussian probability density function”, and the integral is approximated using a fifth-degree numerical cubature rule, in which the number of cubature points required is only one more than the theoretical lower bound. The abovementioned

\* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2015AA7026085).

† Corresponding author. E-mail: [wengeyang\\_3@163.com](mailto:wengeyang_3@163.com)

cubature rule is embedded into the nonlinear Kalman filtering framework, from which the update steps of the novel cubature Kalman filter are derived. Then, the equations of state and measurement for real-time orbit determination are obtained. The  $J_2$  perturbation and atmospheric drag perturbation are taken into account in the state equation, and the coordinate transformation is used to derive the nonlinear relationship between the orbital state and measurement element. The simulation results show that the proposed fifth-degree cubature Kalman filter can achieve a higher filtering accuracy than the CKF and the same accuracy as the existing fifth-degree filters, but has the fewest cubature points and the best real-time performance, which proves the effectiveness of the proposed algorithm.

**Keywords:** cubature Kalman filter, fifth-degree algebraic precision, cubature point, orbit determination

**PACS:** 84.30.Vn, 05.10.-a, 02.30.Yy, 05.10.Ln

**DOI:** [10.7498/aps.66.158401](https://doi.org/10.7498/aps.66.158401)