

有效质量法调控原子玻色-爱因斯坦凝聚体的双阱动力学

刘晓威 张可烨

Effective-mass approach to controlling double-well dynamics of atomic Bose-Einstein condensates

Liu Xiao-Wei Zhang Ke-Ye

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **66**, 160301 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.160301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.160301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I16>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

单模光腔中 N 个二能级原子系统的有限温度特性和相变

Finite-temperature properties of N two-level atoms in a single-mode optic cavity and phase transition

物理学报.2015, 64(13): 130505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130505>

么正极限附近费米气体反常激发模式的涡旋

Vortex of an anomalous mode in Fermi gas near unitarity limit

物理学报.2013, 62(14): 140301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.140301>

雪茄形铷原子玻色-爱因斯坦凝聚中单极子模的朗道阻尼和频移

Landau damping and frequency-shift of monopole mode in an elongated-rubidium Bose-Einstein condensate

物理学报.2013, 62(13): 130307 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.130307>

利用光晶格自旋链中磁振子的激发模拟有限温度下光子的动力学 Casimir 效应

Simulating dynamical Casimir effect at finite temperature with magnons in spin chain within an optical lattice

物理学报.2013, 62(6): 060302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.060302>

费米-费米散射长度对费米超流气体在么正极限区域的隧穿现象影响

The tunneling phenomena of the Fermi superfluid gases in unitarity by manipulating the Fermi-Fermi scattering length

物理学报.2012, 61(18): 180303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.180303>

有效质量法调控原子玻色-爱因斯坦凝聚体的 双阱动力学*

刘晓威 张可焯†

(华东师范大学物理与材料科学学院, 上海 200062)

(2017年4月14日收到; 2017年5月12日收到修改稿)

操控原子玻色-爱因斯坦凝聚体在双势阱中的动力学通常是通过改变势阱深度来实现, 本文提出了一种基于调节原子有效质量的控制方案, 可以在不改变双阱势的前提下操控凝聚体的双阱动力学. 利用双模近似, 本文解析地导出了超冷原子在双阱势中的隧穿强度和相互作用强度对有效质量的依赖关系, 并基于平均场近似数值模拟了在有效质量调节下的凝聚体动力学演化, 展示了隧穿振荡和自束缚等典型的双阱动力学行为. 此外, 本文的研究还发现, 借助负有效质量效应, 这一方案甚至可以等效地实现对负散射长度原子凝聚体双阱动力学行为的操控.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 双势阱, 有效质量

PACS: 03.75.Kk, 05.30.Jp, 03.75.lm, 67.85.Jk

DOI: 10.7498/aps.66.160301

1 引言

原子的玻色-爱因斯坦凝聚作为一种宏观量子力学效应, 一直是物理领域的研究热点之一. 其良好的量子相干性使它成为凝聚态物理、非线性物理、量子光学、量子信息与量子计算、精密测量等诸多基础与应用研究领域的共同热点, 近年来更是成为了量子物理的研究工具, 直接孕育出物质波光学、原子芯片、量子模拟等新的研究方向. 在这些研究中, 通过电磁场构建各种势场来精密操控原子凝聚体是必不可少的研究手段. 例如使用磁场在芯片表面构建原子波导^[1,2], 利用携带角动量的磁场或光场制备原子团涡旋态^[3,4], 利用驻波光场作为原子分束器操纵凝聚体实现原子干涉仪或陀螺仪^[5-7], 或利用驻波光场实现光晶格势来操控凝聚体模拟各种理想的量子多体模型^[8-15]等. 其中, 利用束缚在双阱势场中的原子凝聚体来模拟约瑟

夫森超导结效应^[16,17]是一个十分典型和基础的量子模拟研究例子. 传统的研究方法一般通过操控形成双阱势的磁光场来改变势阱深度, 或利用费许巴赫共振法 (Feshbach resonance) 调节原子的相互作用强度, 可以使原子凝聚体展现量子隧穿振荡或自束缚等典型的约瑟夫森结动力学行为^[18].

本文提出一种新的凝聚体双阱动力学操控方法, 在不改变构成双阱势的磁光场的前提下, 通过额外施加一个光晶格势场来调节凝聚体的有效质量, 也可以完成动力学操控, 使之展示各种典型的双阱量子动力学行为. 有效质量理论本来只是一种可以便捷地描述电子、原子等物质波在周期势场中运动的近似理论, 但近年来借助飞速发展的光晶格实验技术, 原子有效质量已经成为一个可精密调节的物理量, 并有希望发展成为一种可以改变原子凝聚体性质的工具. 依据光晶格势的参量, 原子有效质量可大可小, 可以显著地偏离真实原子质量值, 导致其动力学性质与量子特性发生显著改变. 它甚

* 国家自然科学基金 (批准号: 11574086, 91436211, 11234003)、国家重点研发计划 (批准号: 2016YFA0302001)、国家自然科学基金委应急管理项目 (批准号: 11654005) 和上海市启明星人才计划 (批准号: 16QA1401600) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: kzhang@phy.ecnu.edu.cn

至可以实现负质量效应, 导致凝聚体悬浮^[19]、亮孤子凝聚体^[20–22]、负温度凝聚体^[23]、量子测量反作用消除等^[24]一些奇异的物理现象. 本文借助平均场近似和数值模拟展示了有效质量法对凝聚体双阱动力学的调控, 分析了其内在原因, 并讨论了负有效质量情况下凝聚体动力学与负散射长度凝聚体动力学的等效性.

2 系统哈密顿量与有效质量近似

如图1所示, 一维对称双阱势场 $U(x)$ 中囚禁的原子玻色-爱因斯坦凝聚体还受到波矢为 \mathbf{k}_L 的驻波光场形成的一维周期势场 $V(x) = V_0 \cos^2(\mathbf{k}_L x)$ 的操控, 系统的完整哈密顿量为

$$\hat{H}_1 = \int \hat{\psi}^\dagger \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_0} + V(x) + U(x) + \frac{g}{2} \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \right] \times \hat{\psi} dx, \quad (1)$$

其中 m_0 是原子质量, $g = 4\pi\hbar^2 a/m_0$ 则代表散射长度为 a 的原子的碰撞相互作用强度, 而 $\hat{\psi}(x)$ 是玻色原子场的湮灭算符. 双阱势 $U(x)$ 的具体表达式为

$$U(x) = b \left(x^2 - \frac{d}{2b} \right)^2, \quad (2)$$

式中参量 b 与 d 都是大于零的实数, 该势阱的两个最低点分别位于 $x_1 = \sqrt{\frac{d}{2b}}$ 和 $x_2 = -\sqrt{\frac{d}{2b}}$ 处, 因此双阱的间距可以表示为 $D = 2\sqrt{\frac{d}{2b}}$, 而双阱之间的势垒高度为 $L = \frac{d^2}{4b}$. 如果光晶格势 $V(x)$ 的空间变化相对 $U(x)$ 快得多, 并且其势深 V_0 较小不至于使原子凝聚体发生绝缘态相变^[14], 那我们就可以用慢变包络近似配合有效质量理论来研究原子

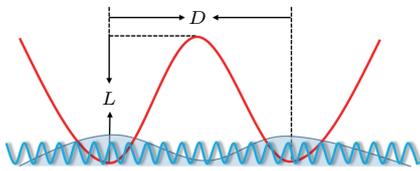


图1 (网刊彩色) 装置示意图 原子玻色-爱因斯坦凝聚体除受到一个双阱势(红)束缚外, 还额外受到一个细密的可以调节其有效质量的光晶格势(蓝)的影响; 双阱的间距和阱间势垒高度分别用 D 和 L 表示

Fig. 1. (color online) Schematic diagram of setup: The atomic Bose-Einstein condensate is located in a double-well trap (red) with an extra fine-grained optical lattice (blue) to adjust its effective mass. The well interval and the barrier height of the double-well trap are labelled by D and L , respectively.

凝聚体在空间慢变势场 $U(x)$ 中的运动^[19]. 原子场算符可以用布洛赫函数完备模式来展开

$$\hat{\psi}(x) = \sum_n \int dk \varphi_{n,\mathbf{k}}(x) \hat{A}_{n,\mathbf{k}}, \quad (3)$$

其中 $\hat{A}_{n,\mathbf{k}}$ 是原子在对应布洛赫模式上的湮灭算符, 满足通常的玻色对易关系, 而布洛赫波函数 $\varphi_{n,\mathbf{k}}(x)$ 则由光晶格势中的单原子哈密顿量 $\hat{h} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V(x)$ 来决定,

$$\hat{h} \varphi_{n,\mathbf{k}}(x) = \varepsilon_n(\mathbf{k}) \varphi_{n,\mathbf{k}}(x), \quad (4)$$

式中 $\varepsilon_n(\mathbf{k})$ 是布洛赫能量, n, \mathbf{k} 分别标示能带和布洛赫波矢, $\varphi_{n,\mathbf{k}}(x)$ 满足正交条件

$$\int \varphi_{n,\mathbf{k}}^*(x) \varphi_{m,\mathbf{q}}(x) dx = \delta_{n,m} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (5)$$

假设凝聚体质心与光晶格势之间的相对运动波矢为 \mathbf{k}_0 , 则通过布洛赫波函数的慢变包络近似 $\varphi_{n,\mathbf{k}} \approx e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)x} \varphi_{n,\mathbf{k}_0}$, 我们就可以将原子场算符(3)式近似表示为一个中心波矢为 \mathbf{k}_0 的空间慢变包络和描述由光晶格引起的快速空间振荡的布洛赫函数的乘积^[24],

$$\hat{\psi}(x) \approx \sqrt{2\pi} \sum_n \varphi_{n,\mathbf{k}_0}(x) \hat{F}_{n,\mathbf{k}_0}(x), \quad (6)$$

其中包络场算符

$$\hat{F}_{n,\mathbf{k}_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)x} \hat{A}_{n,\mathbf{k}} \quad (7)$$

满足玻色场算符对易关系

$$[\hat{F}_{n,\mathbf{k}_0}(x), \hat{F}_{m,\mathbf{k}_0}^\dagger(x')] = \delta_{n,m} \delta(x - x'). \quad (8)$$

简便起见, 在下文中我们仅考虑原子波被激发到最低能带(即 $n = 1$)的情况, 因此可以将下标 n 与 \mathbf{k}_0 都省去. 将场算符的近似表达式(6)代入系统哈密顿量(1), 通过一些计算[见附录A]我们可以得到凝聚体包络场的有效哈密顿量:

$$\hat{H}_2 = \int dx \hat{F}^\dagger(x) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m^*} - i\varepsilon'(\mathbf{k}_0) \nabla + \varepsilon(\mathbf{k}_0) + U(x) \right] \hat{F}(x) + \frac{g}{2} \int dx \hat{F}^\dagger(x) \hat{F}^\dagger(x) \hat{F}(x) \hat{F}(x), \quad (9)$$

其中 $m^* = \hbar^2/\varepsilon''(\mathbf{k}_0)$ 是原子包络场的有效质量, $\varepsilon'(\mathbf{k}_0)$ 和 $\varepsilon''(\mathbf{k}_0)$ 分别是第一能带布洛赫能量在波矢 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ 处的一阶和二阶导数. 该哈密顿量意味着调节布洛赫能量 $\varepsilon(\mathbf{k})$ 就可以改变原子包络场的有效质量, 进而调控凝聚体在双阱势 $U(x)$ 中的动力

学. 对布洛赫能量的调节可以通过改变光晶格势深来实现, 而 \mathbf{k}_0 值的调节则可以通过控制光晶格相对凝聚体质心的移动速度来实现^[24]. 如图 2 所示, 当 $\mathbf{k}_0 = 0$ 或 \mathbf{k}_L 时, 即在第一布里渊区的中心或边界上, 哈密顿量 (9) 中布洛赫能量的一阶导数项 $-i\varepsilon'(\mathbf{k}_0)\nabla$ 为零, 改变光晶格势的深度 V_0 就可以显著调节有效质量的大小. 这种调节甚至可以使有效质量为负, 从而导致与正常情况完全相反的动力学行为. 为了方便研究有效质量对双阱系统动力学的影响, 我们引入参量 $\lambda = m^*/m_0$ 来代表有效质量与真实质量的比值.

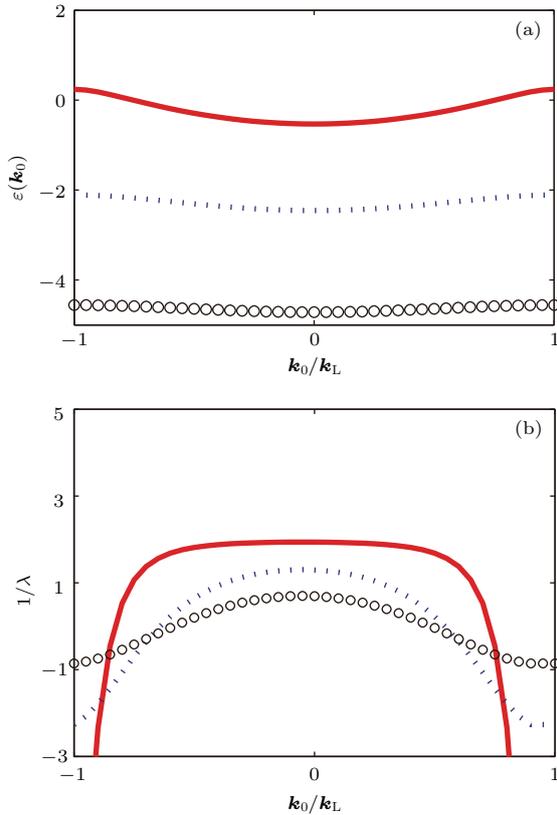


图 2 (网刊彩色) (a) 原子在光晶格势中的第一布洛赫能带图, 布洛赫波矢 \mathbf{k}_0 和能量 $\varepsilon(\mathbf{k}_0)$ 分别以形成光晶格势的驻波光场的波矢 \mathbf{k}_L 和原子反冲能量 $E_L = \hbar^2 \mathbf{k}_L^2 / 2m_0$ 为单位; (b) 反有效质量比 $\lambda^{-1} = m_0/m^*$ 随 \mathbf{k}_0 的变化. 黑色圆圈线, 蓝色虚线和红色实线分别对应晶格势深度 $V_0 = 7E_L, 4E_L, 1E_L$ 的情况

Fig. 2. (color online) (a) The first-band Bloch energy for the atoms trapped in the optical lattice with the Bloch wave vector \mathbf{k}_0 ; (b) the inverted effective mass ratio, $\lambda^{-1} = m_0/m^*$, as a function of \mathbf{k}_0 , the black circle, the blue dashed curves and the red solid curves are for the cases of lattice depth $V_0 = 7E_L, 4E_L, 1E_L$, respectively. the Bloch wave vector and the energy are normalized by the wave vector of the optical lattice \mathbf{k}_L and the atomic recoil energy $E_L = \hbar^2 \mathbf{k}_L^2 / 2m_0$, respectively.

3 双阱动力学调控

以下我们展示有效质量对凝聚体在双阱势中动力学行为的调控. 对于一维双势阱 $U(x)$, 当势阱较深时我们可以采用双模近似, 构建左右阱的局域波函数来近似描绘凝聚体的运动^[10]. 包络场算符可表示成两个局域模的叠加形式:

$$\hat{F} = u_L(x)\hat{a}_L + u_R(x)\hat{a}_R, \quad (10)$$

式中 $\hat{a}_{L,R}$ 分别代表原子在左阱和右阱局域模上的湮灭算符, 满足玻色对易关系. 为了便于解析计算, 我们将 $U(x)$ 做级数展开, 用以 $x_{1,2}$ 为中心束缚频率 $\omega = \sqrt{\frac{4d}{|\lambda|m_0}}$ 的简谐势阱基态波函数来近似表达左右阱的局域波函数, 则有 $u_{L,R}(x) \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha^2(x - x_{1,2})^2\right]$, 其中简谐振子参量 $\alpha = \sqrt{\frac{|m^*|\omega}{\hbar}} = |\lambda|^{1/4}\alpha_0$, 而 α_0 则是有效质量等于原始质量时的值. 将 (10) 式及局域波函数代入 (9) 式并忽略守恒项和高阶小项^[25], 有效哈密顿量简化为

$$\begin{aligned} \hat{H}_3 = & -\frac{\hbar\Omega}{2}(\hat{a}_L^\dagger\hat{a}_R + \hat{a}_R^\dagger\hat{a}_L) \\ & + \frac{\hbar\kappa}{2}(\hat{a}_L^\dagger\hat{a}_L^\dagger\hat{a}_L\hat{a}_L + \hat{a}_R^\dagger\hat{a}_R^\dagger\hat{a}_R\hat{a}_R), \end{aligned} \quad (11)$$

式中 Ω 代表原子在双阱之间的隧穿率, 而 κ 代表同一阱中原子的碰撞率. 为了便于比较, 我们引入未经有效质量调控时 (即 $\lambda = 1$ 时) 的双阱隧穿率 $\Omega_0 = \frac{3d^2}{2b\hbar} \exp(-\alpha_0^2 d/2b)$ 以及相互作用率 $\kappa_0 = \frac{g'\alpha_0}{\hbar\sqrt{2\pi}}$ 作为参考值, g' 代表一维有效原子相互作用强度, 则有关系

$$\Omega = \pm\Omega_0 \exp[-(\sqrt{|\lambda|} - 1)\alpha_0^2 d/2b] \quad (12)$$

和

$$\kappa = |\lambda|^{1/4}\kappa_0, \quad (13)$$

其中正负号取决于有效质量比 λ 的符号, 即有效质量的正负. 方程 (12) 和 (13) 说明可以通过调控有效质量来改变隧穿率和碰撞率. 我们先考虑有效质量为正的一般情况, 为负的情况将在本文末尾讨论.

为了对凝聚体的动力学演化做数值模拟, 我们根据一些典型的实验参数来估计隧穿率和碰撞率的取值. 以磁光阱束缚的碱金属原子凝聚体为例, 实验中双阱间距 D 的尺度可在 1—100 μm 之间调

节, 而光晶格势的每个格点尺度则在约 $0.1 \mu\text{m}$ 量级, 完全可以满足之前我们对晶格势空间变化率远大于双阱势的假设. 按照文献 [26] 中的实验数据, 双阱宽度 $D = 13 \mu\text{m}$, 势垒深度 $L = h \times 4.7 \text{ kHz}$ (h 为普朗克常数), 对应 $d = h \times 2.2 \times 10^{14} \text{ Hz/m}^2$ 和 $b = h \times 2.6 \times 10^{25} \text{ Hz/m}^4$. 以 ^{87}Rb 原子为例, 单原子质量 $m_0 = 87 \times 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 原子 s 波散射长度 $a = 5.7 \text{ nm}$ [27], 由此可估算出原始隧穿率 $\Omega_0 = 2\pi \times 28.2 \text{ kHz}$, 碰撞率 $\kappa_0 = 2\pi \times 0.5 \text{ Hz}$. 如图 3 所示, 在固定双阱势参量的情况下, 凝聚体隧穿率 Ω 和碰撞率 κ 随有效质量的改变展示出相反的变化趋势. 以无光晶格调控有效质量时的值为参考, 碰撞率随有效质量的增大而增大, 而隧穿强度则变小. 这也符合量子特征随质量增加而减弱这一通常的规律.

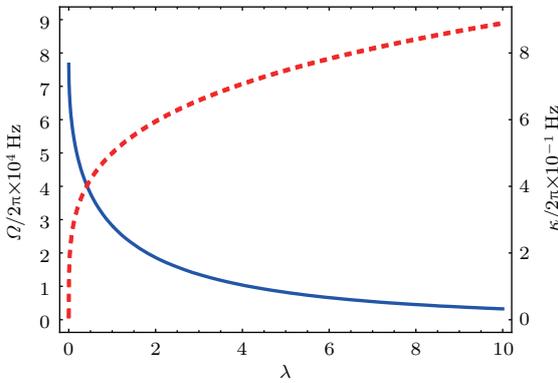


图 3 原子隧穿率 Ω (实线) 和相互作用率 κ (虚线) 随着有效质量比 λ 的变化, 计算所使用的双阱势和原子参数详见正文

Fig. 3. The atomic tunneling rate Ω (solid line) and the interaction rate κ (dashed line) as functions of the effective mass ratio λ . See the main text for the detailed parameters used in the calculation.

在总原子数较大且碰撞相互作用较弱的情况下, 我们可以安全地忽略所有的量子涨落和量子关联效应, 用平均场近似理论来描述双阱系统的动力学 [28]. 将原子产生湮灭算符用它们的平均值代替, $\hat{a}_{L(R)} \approx \langle \hat{a}_{L(R)} \rangle = \sqrt{N_{L(R)}} e^{i\phi_{L(R)}(t)}$, 式中 $N_{L(R)}$ 和 $\phi_{L(R)}$ 分别代表左(右)阱中原子的平均布居数和相位, 再代入 (11) 式中就可以获得描述双阱系统的经典哈密顿量. 如果进一步定义两个新的自由度, 双阱之间的相位差 $\phi = \phi_L - \phi_R$ 和归一化的原子布居差 $\rho = (N_L - N_R)/N$ 取值范围分别为 $[-\pi, \pi]$ 和 $[-1, 1]$, 则经典哈密顿量简化为

$$H_4 = -E_J \sqrt{1 - \rho^2} \cos \phi + \frac{E_s \rho^2}{2}, \quad (14)$$

其中, $E_J = E_{J0} \exp(-(\sqrt{\lambda} - 1)\alpha_0^2 d/2b)$ 和 $E_s = E_{s0} \lambda^{1/4}$ 分别代表受有效质量调控的隧穿和相互作用能量, 而 $E_{J0} = \hbar \Omega_0 N/4$ 和 $E_{s0} = \hbar \kappa_0 N^2/2$ 则分别对应未受调控时的值. 原子凝聚体的良好相干性使我们可以短时间 (约 1 s 量级) 内安全地忽略各种损耗效应, 通过哈密顿正则方程来描述体系的动力学,

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{E_J}{\hbar} \sqrt{1 - \rho^2} \sin \phi, \quad (15a)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{E_J \rho}{\hbar \sqrt{1 - \rho^2}} \cos \phi + \frac{E_s \rho}{\hbar}, \quad (15b)$$

该方程组说明双阱动力学演化对应一个摆角为 ϕ 、摆幅为 ρ 、并且摆长非线性变化的经典单摆. 很容易发现它有两个不依赖于隧穿能量 E_J 和相互作用能 E_s 的稳态解, $\{\rho = 0, \phi = 0\}$ 和 $\{\rho = 0, \phi = \pi\}$, 对应左右阱原子数和相位完全相同或原子数相同而相位完全相反. 除了这两个平庸稳态之外, 当相互作用能较大时, 即 $|E_s| > E_J$, 它还有两组原子数非对称的稳态解, $\{\rho^2 = 1 - E_J^2/E_s^2, \phi = 0, \pi\}$, 其中 $\phi = 0$ 对应 $E_s < 0$ 的情况而 $\phi = \pi$ 对应 $E_s > 0$. 而系统的动力学特征则取决于相互作用能量与隧穿能量的比值 E_s/E_J 以及系统的初始条件 $\rho(0)$ 和 $\phi(0)$ 的选取, 可分为简谐振荡、非谐振荡、自束缚等一些类型 [28]. 通常的双阱动力学操控是通过调节外场以改变双阱势 $U(x)$ 的形状 [29], 或者通过费许巴赫共振法调节原子间的散射长度以改变相互作用强度来实现 [30], 最终都落实到改变 E_{s0}/E_{J0} 的比值上. 而现在我们可以通过光晶格势来操纵凝聚体的有效质量, 即改变 λ , 同样也可以实现对 E_s/E_J 的值以及对应的双阱动力学的操控.

在图 4 中我们通过模拟动力学方程 (15) 在同一初始条件但不同 λ 值下的演化, 来展示有效质量法对双阱中凝聚体动力学的调控. 此外我们还通过分析有效质量比 λ 对哈密顿量 (14) 的影响来分析动力学发生显著改变的原因. 图 4 的左列与右列分别展示了系统在同一初始条件但不同有效质量情况下, 左右阱粒子数差 ρ 与相位差 ϕ 随时间的演化和哈密顿量即系统总能量在 $\{\rho, \phi\}$ 参量空间的等高图. 由于忽略了所有的损耗效应, 系统在演化过程中总能量守恒, 所以其瞬时状态点 $\{\rho(t), \phi(t)\}$ 始终位于初态 ($\rho = 0.55, \phi = 0$) 对应能量值所在的等高线上. 然而当有效质量改变引起隧穿率和碰撞率变换时, 能量等高线结构本身会发生对应的扭曲变

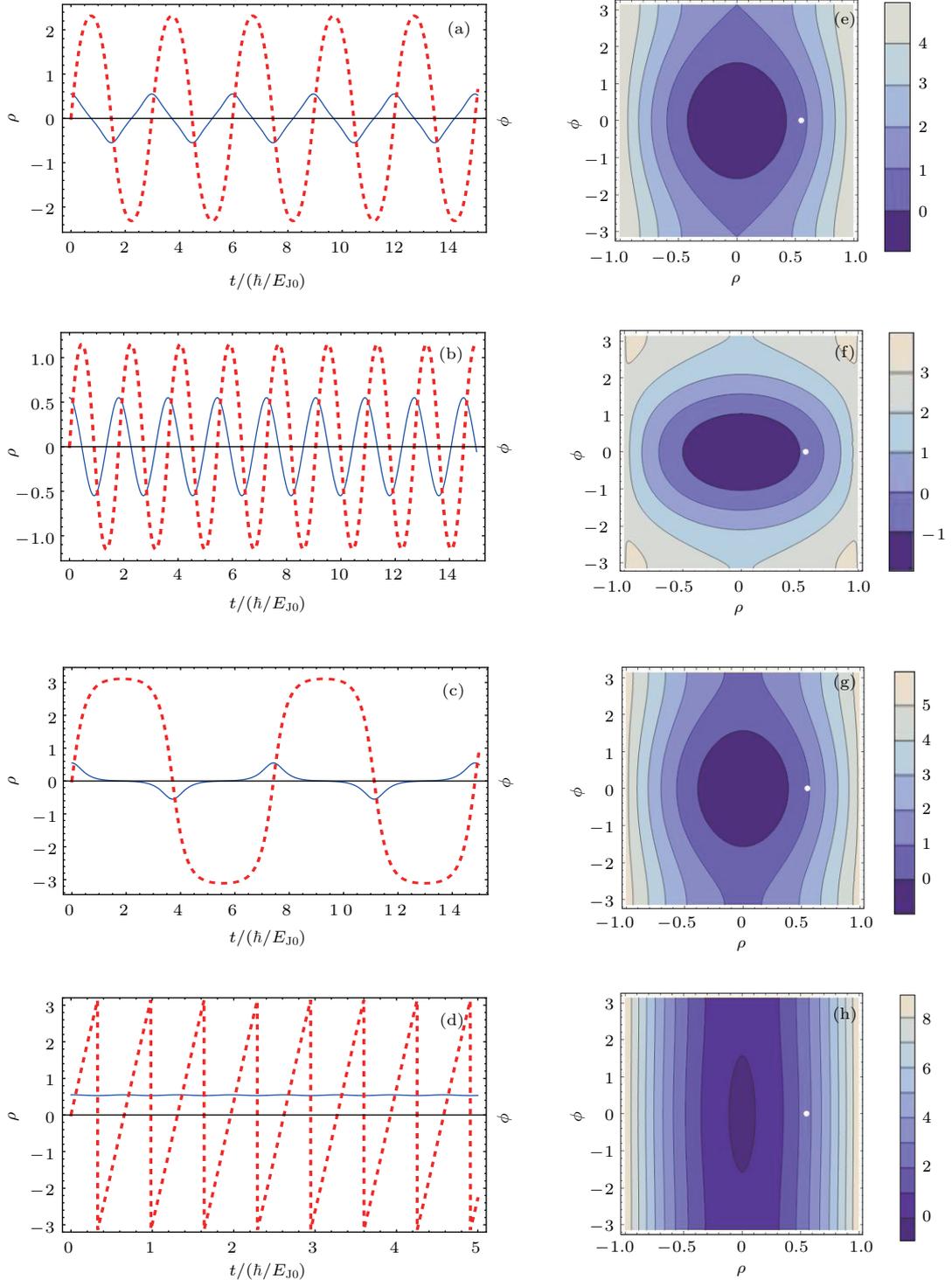


图4 (网刊彩色)有效质量比为 (a) $\lambda = 1$, (b) $\lambda = 0.1$, (c) $\lambda = 1.28$, (d) $\lambda = 10$ 情况下左右阱中原子凝聚体的归一化粒子数差 ρ (蓝色实线) 和相位差 ϕ (红色虚线) 随时间的演化, 时间单位为 \hbar/E_{J0} (e), (f), (g), (h) 是与 (a), (b), (c), (d) 对应的在 $\{\rho, \phi\}$ 相空间中的能量等高图, 如标尺所示颜色越深能量越低, 能量值以 E_{J0} 为单位; 所有情况下原子凝聚体的初始条件相同 ($\rho(0) = 0.55$, $\phi(0) = 0$, 对应能量图中的白点) 双阱势 $U(x)$ 也相同, 其余参量与图3一致

Fig. 4. (color online) Left column: The time evolution of the population difference ρ (blue solid lines) and the phase difference ϕ (red dashed lines) of the atomic condensate in the double-well trap with different effective mass ratios (a) $\lambda = 1$, (b) $\lambda = 0.1$, (c) $\lambda = 1.28$, (d) $\lambda = 10$. The initial conditions for all the cases are $\rho(0) = 0.55$ and $\phi(0) = 0$ and the parameters of the trap potential are the same as Fig. 3. Right column: The energy contour plots of the system in space of $\{\rho, \phi\}$ with lower energy labeled in deeper color. (e), (f), (g), and (h) correspond to the Hamiltonian of (a), (b), (c), and (d), respectively. The common initial conditions are marked by the white points. The time and the energy are normalized by \hbar/E_{J0} and E_{J0} , respectively.

形, 导致系统动力学发生显著的改变. 当没有用有效质量法调控时, 即图 4(a) 和图 4(e) 中 $\lambda = 1$ 的情况, 凝聚体初态所在的能量等高线呈一个两头尖的橄榄形, 状态点沿这一形状运动时, ρ 展现出三角波形的非谐振荡, 而 ϕ 则为简谐振荡. 当有效质量比 $\lambda = 0.1$ 时, 即有效质量远小于真实质量, 按照前文的分析隧穿率将会被放大而碰撞率变小, 其能量等高线变为一个规则的椭圆, 如图 4(f) 所示. 状态点沿这一椭圆运动时, ρ 与 ϕ 对应的动力学演化是振幅不同但周期相同的简谐振荡, 如图 4(b) 所示. 而当 $\lambda = 1.28$ 时, 有效质量大于真实质量, 情况则相反, 碰撞增强而隧穿减弱, 原来橄榄形的能量等高线在尖端处进一步扭曲. 此时 ϕ 的运动变为近似矩形波的非谐振荡, 而 ρ 的运动则在振荡之间展示出奇异的平坦段, 这对应着非线性单摆的临界减慢效应^[31]. 随着有效质量进一步变大, 非线性效应显著地增强. 当 $\lambda = 10$ 时, 能量等高线趋向平直, ϕ 的运动变成了高度非谐的锯齿波振荡, 而 ρ 则不再振荡意味着左右阱原子数不同但差值固定, 这对应着由高度非线性引起的自束缚效应^[32].

4 负质量情况

费许巴赫共振法不但可以调节原子相互作用强度 g 的大小, 还可以改变其正负使相互作用由排斥变为吸引, 从而使得双阱系统的动力学发生改变. 有效质量法虽然不能直接改变原子间的相互作用性质, 但却可以利用负质量物体的力学响应与正质量物体完全相反这一特性, 实现与改变原子相互作用性质等效的操控.

当有效质量为负时, 势能最高处才是凝聚体运动的基态所在, 因此只要完全翻转双阱势, 即将哈密顿量 (1) 中的 $U(x)$ 变为 $-U(x)$, 就仍可以采用双模近似来描述凝聚体的动力学, 所获得的动力学方程组如下:

$$\dot{\rho} = \frac{|E_J|}{\hbar} \sqrt{1 - \rho^2} \sin \phi, \quad (16a)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{|E_J|\rho}{\hbar\sqrt{1 - \rho^2}} \cos \phi + \frac{|E_s|\rho}{\hbar}, \quad (16b)$$

与方程组 (15) 相比只是隧穿能量 E_J 的值变为负数. 而另一方面, 当原子质量为正而相互作用为吸引时, 其动力学方程的改变则体现在 E_s 值变负,

$$\dot{\rho} = -\frac{|E_J|}{\hbar} \sqrt{1 - \rho^2} \sin \phi, \quad (17a)$$

$$\dot{\phi} = \frac{|E_J|\rho}{\hbar\sqrt{1 - \rho^2}} \cos \phi - \frac{|E_s|\rho}{\hbar}. \quad (17b)$$

比较这两种情况下的动力学方程组不难发现, 只要将负质量动力学方程组中的 ρ 变为 $-\rho$ 而 ϕ 不变, 或者将 ϕ 变为 $-\phi$ 而 ρ 不变, 就可以使两组方程完全一致. 因此, 当凝聚体的有效质量为负而原子相互作用为正时, 只要完全翻转双阱势, 并在制备系统初态时注意将原子数差 ρ 的定义中的左右顺序反过来或赋予相位差 ϕ 一个额外的 π 相移, 就完全可以模拟质量为正而相互作用为负的原子凝聚体在双阱势中的动力学行为.

5 结论

本文提出了通过光晶格调节原子凝聚体有效质量, 从而控制凝聚体在双阱势中的动力学行为的方案. 借助双模近似与平均场近似, 我们导出了双阱中凝聚体的隧穿率与原子相互作用率对有效质量值的依赖关系, 并通过数值模拟展示了有效质量发生改变时, 凝聚体在双阱中的动力学行为由量子隧穿占主导的简谐振荡到原子碰撞占主导的自束缚的转变. 此外, 我们还指出通过使有效质量变负的方法可以模拟吸引型原子相互作用的凝聚体的双阱动力学. 与直接调整形成双阱势的磁光场或用费许巴赫共振法调节原子相互作用的传统方案不同, 本文的方案不改变原有束缚场而是通过额外施加一个驻波光场来实现, 对一些要求固定外场束缚条件的原子凝聚体应用研究或是对磁场调节不敏感的原子较有意义. 此外尽管我们只分析了外场是双阱势的情况, 但只要这些束缚势的空间变化率远小于用来调节有效质量的光晶格势, 该方案对其他形状的束缚势同样有效. 未来我们希望将有效质量法进一步拓展到对凝聚体原子量子多体动力学与量子关联的操控上.

附录 A 包络场哈密顿量 (8) 的导出

为了方便展示, 我们将系统原始哈密顿量 \hat{H}_1 拆解为三个部分:

$$\hat{H}_V = \int \hat{\psi}^\dagger(x) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_0} + V(x) \right] \hat{\psi}(x) dx, \quad (A1a)$$

$$\hat{H}_U = \int \hat{\psi}^\dagger(x) U(x) \hat{\psi}(x) dx, \quad (A1b)$$

$$\hat{H}_g = \frac{g}{2} \int \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x) dx, \quad (A1c)$$

式中, $V(x)$ 是光晶格势, $U(x)$ 是双阱势场, m_0 是原子真实质量. 对布洛赫函数 $\varphi_{\mathbf{k}}(x)$ 进行慢变包络近似后, 原子场算符 $\hat{\psi}(x)$ 可近似表示为

$$\hat{\psi} = \sqrt{2\pi}\hat{F}(x)\varphi_{\mathbf{k}_0}(x), \quad (\text{A2})$$

其中, 原子的包络场算符 $\hat{F}(x)$ 的展开式为

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{A}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)x} d\mathbf{k}, \quad (\text{A3})$$

\mathbf{k} 是准动量波矢, 而 \mathbf{k}_0 代表 BEC 的质心动量波矢, $\hat{A}_{\mathbf{k}}$ 是原子在布洛赫模式上的湮灭算符, 满足玻色对易关系. 为简便起见我们只讨论第一布洛赫能带的情况. 包络场算符 $\hat{F}(x)$ 与 $\hat{A}_{\mathbf{k}}$ 间有傅里叶逆变换关系,

$$\hat{A}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{F}(x) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)x} dx. \quad (\text{A4})$$

首先计算 \hat{H}_V . 将周期势场中的本征能量 $\varepsilon(\mathbf{k})$ 做级数展开, 利用布洛赫定理, 易证得 $\varepsilon(-i\nabla)\varphi_{\mathbf{k}}(x) = \varepsilon(\mathbf{k})\varphi_{\mathbf{k}}(x)$, 所以有 $\hat{H}_V = \int \hat{\psi}^\dagger(x)\varepsilon(-i\nabla)\hat{\psi}(x)dx$, $-i\hbar\nabla$ 是动量算符. 又根据布洛赫函数的周期性和完备性可导出关系式

$$\int dx \varphi_{\mathbf{k}_0}^*(x)\varphi_{\mathbf{k}_0}(x) e^{-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_0)x} = \delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_0). \quad (\text{A5})$$

将 $\hat{\psi}(x)$ 的展开式代入 \hat{H}_V , 再将其中的 $\hat{F}(x)$ 按照 (A3) 展开, 利用该关系式 (A5) 可进一步得到 $\hat{H}_V = \int dx \hat{F}^\dagger(x)\varepsilon(-i\nabla + \mathbf{k}_0)\hat{F}(x)$. 将其中的 $\varepsilon(-i\nabla + \mathbf{k}_0)$ 做级数展开保留至动量算符的二阶项, 可得:

$$\hat{H}_m = \int \hat{F}^\dagger(x) \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m^*} + \left. \frac{d\varepsilon(\mathbf{k})}{d\mathbf{k}} \right|_{\mathbf{k}_0} (-i\nabla) + \varepsilon(\mathbf{k}_0) \right] \times \hat{F}(x) dx, \quad (\text{A6})$$

其中有效质量 $m^* = \left[\left. \frac{d^2\varepsilon(\mathbf{k})}{\hbar^2 d\mathbf{k}^2} \right|_{\mathbf{k}_0} \right]^{-1}$.

对于 \hat{H}_U 项, 场算符 $\hat{\psi}(x)$ 同样按 (A2) 和 (A3) 展开, 并将势场 $U(x)$ 在动量空间展开为 $U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{U}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}x} d\mathbf{q}$, 再次利用关系式 (A5) 整理可得 $\hat{H}_U = \iint d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 \hat{A}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{A}_{\mathbf{k}_1} \tilde{U}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}$. 此时再将 (A5) 式与 $\tilde{U}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int U(x) e^{-i\mathbf{q}x} dx$ 代入并对动量积分, 即可获得

$$\hat{H}_U = \int dx \hat{F}^\dagger(x) U(x) \hat{F}(x). \quad (\text{A7})$$

而对于 \hat{H}_g 项处理的方式类似, 场算符 $\hat{\psi}(x)$ 做相同展开, 再对其中两个布洛赫函数的乘积做傅里叶展开 $\varphi_{\mathbf{k}_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}x} d\mathbf{k}$ 并利用关系式 (A5), 就可以获得 $\hat{H}_g = g\pi \int dx \hat{F}^\dagger(x) \hat{F}^\dagger(x) \hat{F}(x) \hat{F}(x) \varphi_{\mathbf{k}_0}^*(x) \varphi_{\mathbf{k}_0}(x)$. 然后再重复一次该步骤, 并对动量积分就能得到

$$\hat{H}_g = \frac{g}{2} \int \hat{F}^\dagger(x) \hat{F}^\dagger(x) \hat{F}(x) \hat{F}(x) dx. \quad (\text{A8})$$

所以总哈密顿量为 $\hat{H}_2 = \hat{H}_V + \hat{H}_U + \hat{H}_g$ 即为正文中表达式 (9) 的形式.

参考文献

- [1] Hinds E A, Boshier M G, Hughes I G 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 645
- [2] Thywissen J H, Olshanii M, Zabow G, Drndic M, Johnson K S, Westervelt R M, Prentiss M 1999 *Eur. Phys. J. D* **7** 361
- [3] Andersen M F, Ryu C, Cladé P, Natarajan V, Vaziri A, Helmeison K, Phillips W D 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 170406
- [4] Dutton Z, Ruostekoski J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 193602
- [5] Giltner D M, McGowan R W, Lee S A 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 2638
- [6] Gustavson T L, Bouyer P, Kasevich M A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2406
- [7] Stringari S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4725
- [8] Denschlag J H, Simsarian J E, Häffner H, McKenzie C, Browaeys A, Cho D, Helmerson K, Rolston S L, Phillips W D 2002 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35** 3095
- [9] Choi D, Niu Q 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2022
- [10] Milburn G J, Corney J, Wright E M, Walls D F 1997 *Phys. Rev. A* **55** 4318
- [11] Burger S, Cataliotti F S, Fort C, Minardi F, Inguscio M, Chiofalo M L, Tosi M P 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4447
- [12] Xu Z J, Cheng C, Yang H S, Wu Q, Xiong H W 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2835 (in Chinese) [徐志君, 程成, 杨欢, 武强, 熊宏伟 2004 物理学报 **53** 2835]
- [13] Qi R, Yu X L, Li Z B, Liu W M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 185301
- [14] Jaksch D, Bruder C, Cirac J I, Gardiner C W, Zoller P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3108
- [15] Greiner M, Mandel O, Esslinger T, Hänsch T W, Bloch I 2001 *Nature* **415** 39
- [16] Ji A C, Sun Q, Xie X C, Liu W M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 023602
- [17] Liu W M, Fan W B, Zheng W M, Liang J Q, Chui S T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408
- [18] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazz S, Shenoy S R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950
- [19] Pu H, Baksmaty L O, Zhang W, Bigelow N P, Meystre P 2003 *Phys. Rev. A* **67** 043605
- [20] Strecker K E, Partridge G B, Truscott A G, Hulet R G 2002 *Nature* **417** 150
- [21] He Z M, Wang D L, Ding J W, Yan X H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230508 (in Chinese) [何章明, 王登龙, 丁建文, 颜晓红 2012 物理学报 **61** 230508]
- [22] He Z M, Wang D L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3088 (in Chinese) [何章明, 王登龙 2007 物理学报 **56** 3088]
- [23] Mosk A P 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 040403
- [24] Zhang K Y, Meystre P, Zhang W P 2013 *Phys. Rev. A* **88** 043632
- [25] Ananikian D, Bergeman T 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013604
- [26] Shin Y, Saba M, Pasquini T A, Ketterle W, Pritchard D E, Leanhardt A E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 050405
- [27] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463

- [28] Raghavan S, Smerzi A, Fantoni S, Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 620
- [29] Michael A, Gati R, Fölling J, Hunsmann S, Cristiani M, Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402
- [30] Spagnolli G, Semeghini G, Masi L, Ferioli G, Trenkwalder A, Coop S, Landini M, Pezzé L, Modugno G, Inguscio M, Smerzi A, Fattori M 2017 arxiv 1703.02370 [quant-ph]
- [31] Gati R, Oberthaler M K 2007 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40** R61
- [32] Jack M W, Collett M J, Walls D F 1996 *Phys. Rev. A* **54** R4625

Effective-mass approach to controlling double-well dynamics of atomic Bose-Einstein condensates*

Liu Xiao-Wei Zhang Ke-Ye[†]

(Department of Physics and Material Science, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

(Received 14 April 2017; revised manuscript received 12 May 2017)

Abstract

The realization of Bose-Einstein condensation in dilute atomic gases opens an exciting way to quantum mechanics and begins a new area of quantum simulation. As a macroscopic quantum object and a many-body bosonic system, the Bose-Einstein condensates can show numerous exotic quantum effects and have naturally attracted great attention. One of the simplest quantum many-body systems to be realized experimentally and studied theoretically is ultra-cold atoms in a double-well potential. This system can exhibit a great variety of quantum interference phenomena such as tunneling oscillation, self-trapping and the entanglement of macroscopic superpositions. Specifically, the double-well potentials built by optical or magnetic fields are easy to change and the many-body interaction between ultra-cold atoms can be changed by the method of Feshbach resonance, enabling the precise quantum control of the double-well dynamics of the condensates.

In the present work, we study the dynamics of a condensate in a trapping potential consisting of an unalterable double-well trap and an additional moving optical lattice. If the lattice space is much smaller than the size of the double-well trap, the system can be simplified into a double-well trapped condensate with a tunable effective mass. Using the mean-field factorization assumption, together with a two-mode approximation, we obtain the analytic expressions for the dependence of the tunneling rate and the self-collision strength on the effective mass. The tunneling rate decays and the collision strength grows up with the increase of the effective mass. As a consequence of their different changes, we conclude that the adjustment of the effective mass of the ultra-cold atoms, rather than the changing of the trap barrier or adjusting of the atomic scattering length, is an alternative approach to controlling the double-well dynamics of the condensate. Via numerical simulations of the mean-field dynamical equations with some realistic parameters, we show that a transition between the quantum coherent tunneling and the self-trapping behaviors is experimentally realizable with the mass-control approach. Specifically, we show that the approach is still valid for the case of negative mass. Moreover, we find that the negative-mass case can be used even to stimulate the double-well dynamics of the condensate with a negative atomic scattering length.

Keywords: Bose-Einstein condensation, double well, effective mass

PACS: 03.75.Kk, 05.30.Jp, 03.75.lm, 67.85.Jk

DOI: 10.7498/aps.66.160301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11574086, 91436211, 11234003), the National Key Research and Development Program of China (Grant No. 2016YFA0302001), the Major Research Plan of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11654005), and the Shanghai Rising-Star Program, China (Grant No. 16QA1401600).

[†] Corresponding author. E-mail: kzyzhang@phy.ecnu.edu.cn