

横场中具有周期性各向异性的一维 XY 模型的量子相变

宋加丽 钟鸣 童培庆

Quantum phase transitions of one-dimensional period-two anisotropic XY models in a transverse field

Song Jia-Li Zhong Ming Tong Pei-Qing

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 180302 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.180302

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.180302>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I18>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

复合函数算符的微商法则及其在量子物理中的应用

Differential quotient rules of operator in composite function and its applications in quantum physics

物理学报.2014, 63(24): 240302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240302>

D_2^+ 强场解离的电子局域化随激光波长的非线性变化

Non linear wavelength dependence of electron localization in strong-field dissociation of D_2^+

物理学报.2014, 63(18): 180301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.180301>

涉及双变数 Hermite 多项式的二项式定理及其在量子光学中的应用

Binomial theorems related to two-variable Hermite polynomials and its application in quantum optics

物理学报.2014, 63(11): 110304 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.110304>

相干态在参数量子相空间的两维正态分布

Bivariate normal distribution of coherent state in parameterized phase space

物理学报.2014, 63(2): 020302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.020302>

复合绝热通道技术在谐相互作用调制的 Landau-Zener 模型中的应用

Application of the composite adiabatic passage technique in the Landau-Zener model with harmonic interaction modulation

物理学报.2013, 62(17): 170303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.170303>

横场中具有周期性各向异性的一维 XY 模型的量子相变*

宋加丽¹⁾ 钟鸣^{1)†} 童培庆^{1)2)‡}

1) (南京师范大学物理科学与技术学院, 南京 210023)

2) (江苏省大规模复杂系统数值模拟重点实验室, 南京 210023)

(2017年2月18日收到; 2017年5月18日收到修改稿)

通过解析和数值计算的方法研究了横场中具有周期性各向异性的一维 XY 自旋模型的量子相变和量子纠缠. 主要讨论了周期为二的情况, 即各向异性参数交替地取比值为 α 的两个值. 结果表明, 与横场中均匀 XY 模型相比, $\alpha = -1$ 所对应的模型在参数空间的相图存在着明显的不同. 原来的 Ising 相变仍然存在, 没有了沿 x 和 y 方向各向异性铁磁 (FM_x, FM_y) 相, 即各向异性相变消失, 出现了一个新的相, 并且该相内沿 x 和 y 方向的长程关联函数相等且大于零, 我们称新相为各向同性铁磁 (FM_{xx}) 相. 这是由于系统新的对称性所导致的. 解析结果还说明系统在 FM_{xx} 相中的单粒子能谱有两个零点, 是一个无能隙的相. 最后, 利用冯·诺依曼熵数值地研究了系统在新相内各点的量子纠缠, 发现该相内每一点的冯·诺依曼熵的标度行为与均匀 XY 模型在各向异性相变处的相似, 即 $S_L \sim \frac{1}{3} \log_2 L + \text{Const.}$

关键词: 周期性各向异性 XY 模型, 量子相变, 各向同性铁磁相, 冯·诺依曼熵

PACS: 03.65.-w, 75.10.Pq, 75.50.Gg, 68.65.-k

DOI: 10.7498/aps.66.180302

1 引言

低维量子系统是人们用来了解量子关联的一个重要模型, 其中一维自旋模型得到广泛研究. 一方面, 此类模型相对比较简单, 可以通过解析和数值方法深入理解它们的性质, 有助于预测和解释其他复杂模型的相关性质, 并且某些自旋模型还可直接用来解释很多实验上的物理现象^[1,2]. 另一方面, 复杂模型可以借助一些方法映射到此类简单模型, 比如一些绝缘化合物可以看作是相互独立的自旋单链的集合, 这样将模型简单化, 只需研究单链就能得到很多重要的物理信息^[3]. 此外一维自旋模型在生命科学^[4-6]、金融经济^[7]等领域也有着重要的应用.

众多一维自旋模型中研究最多的是横场中各向异性 XY 模型. 这类简单且具有广泛代表性的模型大多是精确可解的^[8,9]. 目前, 关于 XY 自旋模型, 人们除了在理论上取得了很多丰硕的成果, 在实验上也已经能制备出一些与理论描述符合得很好的样品^[10,11]. 几十年来, 人们从多个角度对这类模型的物理性质进行了非常深入的研究, 其中讨论得最多的性质之一就是零温下的量子相变. 当改变一个自旋系统的某些参数时, 相变就有可能产生. 研究表明均匀的 XY 模型存在两种类型的量子相变, 分别是 Ising 相变^[12] 和各向异性相变^[13]. 目前, 人们用来研究自旋系统量子相变性质的方法有很多. 一般情况下, 我们会借助一些序参量, 如磁矩、磁化率和自旋关联函数来描述量子相变. 随着量子信息、量子通信等领域的发展, 一些方

* 国家自然科学基金 (批准号: 11575087) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: mzhong@njnu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: pqtong@njnu.edu.cn

法和概念, 如量子纠缠 [14–16]、量子失协 [17–19]、保真度 [20,21] 也被用来描述量子相变. 人们发现均匀 XY 模型的量子纠缠与量子相变有关: 相变点处的纠缠行为与子链长的对数呈线性关系, 但在 Ising 相变和各向异性相变情况下对数前系数是不一样的 [14,15].

上述这些模型基本上都是均匀的, 但在自然界中存在着大量非均匀 (周期、准周期、无序等) 的系统. 所以, 无序和准均匀结构对模型相变的影响一直是统计物理和凝聚态物理领域中研究的热点. 人们通过重整化群的方法研究了无序对 Ising 相变和各向异性相变的影响, 发现无序改变了系统相变的普适类 [22,23]. 1993 年, Luck [24] 指出两类准周期结构对横场中 Ising 链的量子相变的影响是不同的, 第一类准周期结构不改变系统量子相变的普适类; 第二类准周期 Ising 链的量子相变的普适类与无序链的相同. 但是, 最近张振俊等 [25] 的工作表明第二类准周期结构的自旋链量子相变与无序情况是有区别的. 为了解释以上问题, 人们对周期性结构的自旋模型的量子相变做了大量的研究, 例如横场中具有周期性最近邻相互作用的 XY 模型 [26–29], 发现模型的最近邻交换相互作用周期地取不同值时, 相对于均匀 XY 模型, 系统会出现更多的相变点. 在这些模型中主要研究了周期性交换相互作用对系统量子相变的影响, 但不同格点的各向异性参数都是一样的. 本文研究周期性各向异性参数对系统量子相变的影响. 发现当周期为二且两个各向异性参数值之比 $\alpha = -1$ 时, 系统会出现新的相.

2 模型和公式

考虑一个一维均匀横场中各向异性 XY 模型 (N 个格点), 其哈密顿量为

$$H = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{J}{2} \left(\frac{1+\gamma_i}{2} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \frac{1-\gamma_i}{2} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y \right) - \frac{1}{2} h \sigma_i^z \right]. \quad (1)$$

其中, $\sigma_i^{x,y,z}$ 是第 i 个格点位置上的泡利矩阵, J 是最近邻自旋间相互作用, γ_i 是与格点位置有关的各向异性参数, h 表示均匀外场. 这里, 我们考虑周期为二的情况, 即各向异性参数 γ_i 交替地取比值为 α 的两个值. 此时的自旋链相当于包含了 $N/2$ 个单

胞, 每个单胞有两个格点, 其各向异性参数分别为 $\gamma_{2i} = \gamma, \gamma_{2i+1} = \alpha\gamma$.

通过 Jordan-Wigner 变换 [12], 系统哈密顿量可以改写成如下无自旋费米子形式:

$$H = - \sum_{ij=1}^N \left[c_i^\dagger A_{ij} c_j + \frac{1}{2} (c_i^\dagger B_{ij} c_j^\dagger + \text{h.c.}) \right] + \frac{Nh}{2}, \quad (2)$$

矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的非零元素为 $A_{ii} = -h, A_{i+1,i} = A_{i,i+1} = -\frac{J}{2}$ 和 $B_{i+1,i} = -B_{i,i+1} = -\frac{J\gamma_i}{2}$ ($i < N$). 本文只考虑 N 为偶数的情况, 因此取反周期性边界条件 [26], 即 $A_{1N} = A_{N1} = \frac{J}{2}, B_{1N} = -B_{N1} = \frac{J\gamma_N}{2}$. 不失一般性, 取 $J = 1$.

再应用 Bogoliubov 变换, 得到对角化的哈密顿量:

$$H = \sum_k A_k \left(\eta_k^\dagger \eta_k - \frac{1}{2} \right), \quad (3)$$

这里的 $A_k [k \in (-\pi/2, \pi/2)]$ 是单粒子能谱. 通过解析计算, 得到两支单粒子能谱 A_k^- 和 A_k^+ :

$$A_k^\pm = \sqrt{\frac{1}{2} (P \pm \sqrt{P^2 - Q})}, \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} P &= [\cos 2k(1 - \alpha\gamma^2) + 2h^2 + 1 + \frac{1}{2}\gamma(1 + \alpha^2)], \\ Q &= \gamma^4 [\alpha \cos 2k - \frac{1}{2}(1 + \alpha^2)]^2 \\ &\quad - \gamma^2 [(1 + \alpha^2) \cos^2 2k + (1 - \alpha)^2 \cos 2k \\ &\quad + 4\alpha h^2 \cos 2k - 2h^2(1 + \alpha^2) - 2\alpha] \\ &\quad + (\cos 2k + 1 - 2h^2)^2. \end{aligned}$$

在本模型中 A_k 总是非负的, 所以根据方程 (3), 系统基态能量写为

$$E_0 = -\frac{1}{2} \sum_k (A_k^- + A_k^+). \quad (5)$$

系统基态和第一激发态之间的能隙 $\Delta = \min \{A_k^-\}$, 其对应的波矢 \mathbf{k}_0 满足

$$\frac{dA_k}{dk} \Big|_{k=\mathbf{k}_0} = 0. \quad (6)$$

当 $\Delta = 0$, 系统第一激发态与基态之间没有能隙. 随着参数的变化, 如果 Δ 由非零值变为零, 说明系统发生了相变; 如果 Δ 一直是零值, 则说明系统处在一个无能隙的状态.

2.1 关联函数

选取两格点的长程关联函数作为序参量来描述系统的相变行为. 其定义为

$$C^x = \langle \sigma_1^x \sigma_{N/2+1}^x \rangle, \tag{7}$$

$$C^y = \langle \sigma_1^y \sigma_{N/2+1}^y \rangle. \tag{8}$$

Lieb 等 [12] 给出了两格点关联函数的计算方法. 通常把 $C^x = C^y = 0$ 的相叫作顺磁 (PM) 相; 把 $C^x > C^y \geq 0$ 的相叫作沿 x 方向的铁磁有序 (FM _{x}) 相; 把 $0 \leq C^x < C^y$ 的相叫作沿 y 方向的铁磁有序 (FM _{y}) 相 [27].

2.2 冯·诺依曼熵

对于一维自旋模型块与块之间的量子纠缠的研究, 冯·诺依曼熵是一个非常重要的物理量. 所以本文采用冯·诺依曼熵来研究一维各向异性 XY 模型的量子纠缠. 当由两个子系统 A, B 构成的系统处于态 $|\Psi_{AB}\rangle$ 时, 其冯·诺依曼熵 (又叫部分纠缠熵) 的定义为

$$S(\rho_A) = -\text{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A). \tag{9}$$

其中约化密度矩阵

$$\rho_A = \text{tr}^{(B)} \rho_{AB} = \text{tr}^{(B)} (|\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}|).$$

设子系统 A 有 L 个连续自旋, 其冯·诺依曼熵在非相变点区域是常数 [15], 而在相变点附近存在着奇

异性:

$$S_L \sim c \log_2 L + \text{Const}. \tag{10}$$

对于均匀各向异性 XY 模型, 在 Ising 相变点处系数 $c = 1/6$; 在各向异性相变点处系数 $c = 1/3$.

3 结果与讨论

系统发生相变时, 第一激发态和基态之间的能隙为零, 所以可以通过计算单粒子能谱最小值 $\Delta = 0$ 来确定可能的对应相变的点. 得到的解析结果如下.

1) 当 $\gamma = 0$ 时, 系统对应的是横场中各向同性 XY 模型. 因此, 横场 $h \in [0, 1]$ 所对应的系统是无能隙的.

2) 当 $\alpha \neq -1$ 且 $\gamma \neq 0$ 时, 系统在

$$h_{c1} = \sqrt{1 - [\gamma(1 - \alpha)/2]^2} \tag{11}$$

处的 Δ 为零, 而在其他 h 处 Δ 均大于零, 如图 1 所示. 图 1 (a) 和图 1 (b) 分别对应 $\alpha = 1, 0$ 时不同 h 情况下系统的单粒子能谱 (不失一般性, 取 $\gamma = 0.5$). 这说明系统在 h_{c1} 点发生了相变. 特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, 系统就变成了均匀 XY 模型, 对于这种模型的量子相变, 我们已经取得了很多丰富的成果 [15,30,31]. 因此, 从计算结果及能谱图可以看出, $\alpha \neq -1$ 时模型的相变行为与均匀 XY 模型相似, 只是相变点位置发生了变化.

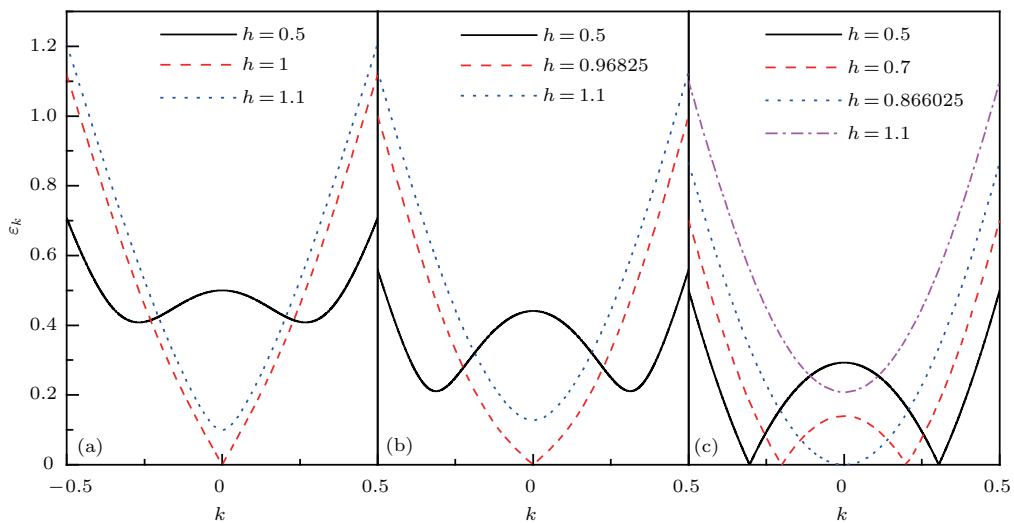


图 1 (网刊彩色) α 取不同值时, 横场中各向异性参数周期为二的一维 XY 模型不同区域的单粒子能谱 (a) $\alpha = 1$; (b) $\alpha = 0$; (c) $\alpha = -1$; $\gamma = 0.5$, $N = 500$

Fig. 1. (color line) The single particle energy spectra of the period-two anisotropic XY chains in a transverse field with different α for: (a) $\alpha = 1$; (b) $\alpha = 0$; (c) $\alpha = -1$. Here $\gamma = 0.5$, $N = 500$.

3) 当 $\alpha = -1$ 时, 系统在

$$h = \sqrt{\frac{(1 - \gamma^2)(\cos 2k + 1)}{2}} \quad (12)$$

处的能隙 Δ 为零. 图 1(c) 给出了此种情形下不同 h 所对应的系统的单粒子能谱. 从图 1(c) 我们可以发现, 当 $0 \leq h < \sqrt{1 - \gamma^2}$ 时, 单粒子能谱总有两个零点, 对应着一个无能隙的相; 当 $h > \sqrt{1 - \gamma^2}$ 时能隙 Δ 均大于零. 因此, 系统的相变临界线为

$$h_{c2} = \sqrt{1 - \gamma^2}. \quad (13)$$

很明显, $\alpha \neq -1$ 和 $\alpha = -1$ 对应的模型的相和相变行为是不一样的. 尤其是 $\alpha = -1$ 时系统出现了一个无能隙的相, 这值得我们进一步研究, 以确定相应的相图及系统纠缠熵的标度行为.

3.1 关联函数和相图

为进一步研究 (尤其是 $\alpha = -1$ 情形下) 系统各相的性质并确定相图, 我们分别讨论了系统长程关联函数 C^x, C^y 与外场 h 及各向异性参数 γ 的变化关系. 下面, 我们给出模型的总链长 $N = 500$ (更长链的结果是一样的) 时关联函数数值计算的结果.

图 2 给出了参数 α 取不同值时, XY 模型的 C^x, C^y 关于 h 和 γ 的函数变化情况, 不失一般性地取 $\alpha = 1, 0, -1$. 图 2(a) 和图 2(b) 表示 $\alpha = 1$ 的情况, 即横场中均匀 XY 模型, 可以看到随着 h (不失一般性取 $\gamma = 0.5$) 的增大, 系统由 $FM_x (C^x > C^y)$ 相变为 $PM (C^x = C^y = 0)$ 相, 相变点为 $h_c = 1$, 对应的是 Ising 相变; 当 $0 < h < 1$ (不失一般性取 $h = 0.5$) 时随着 γ 的减小, 系统由 $FM_x (C^x > C^y)$ 相变为 $FM_y (C^x < C^y)$ 相, 相变点为 $\gamma = 0$, 对应的是各向异性相变. 图 2(c) 和图 2(d) 对应于 $\alpha = 0$ (代表 $\alpha \neq \pm 1$ 的情况), 发现在 $h < h_{c1}, \gamma > 0$ 区域 $C^x > C^y$, 对应 FM_x 相; 在 $h < h_{c1}, \gamma < 0$ 区域 $C^x < C^y$, 对应 FM_y 相; 在 $h > h_{c1}$ 区域 $C^x = C^y = 0$, 对应 PM 相. 比较 $\alpha = 1$ (均匀 XY 模型) 和 $\alpha \neq \pm 1$ 两种情况下系统的 C^x, C^y , 可知它们的相变行为相似: 沿着 h 增大的方向, 系统发生的都是 Ising 相变, 并且系统相变点的数值结果与解析式 (11) 得到的结果相吻合; 而当 $h < h_{c1}$ 时顺着 γ 减小的方向, 系统穿过临界点发生了各向异性转变.

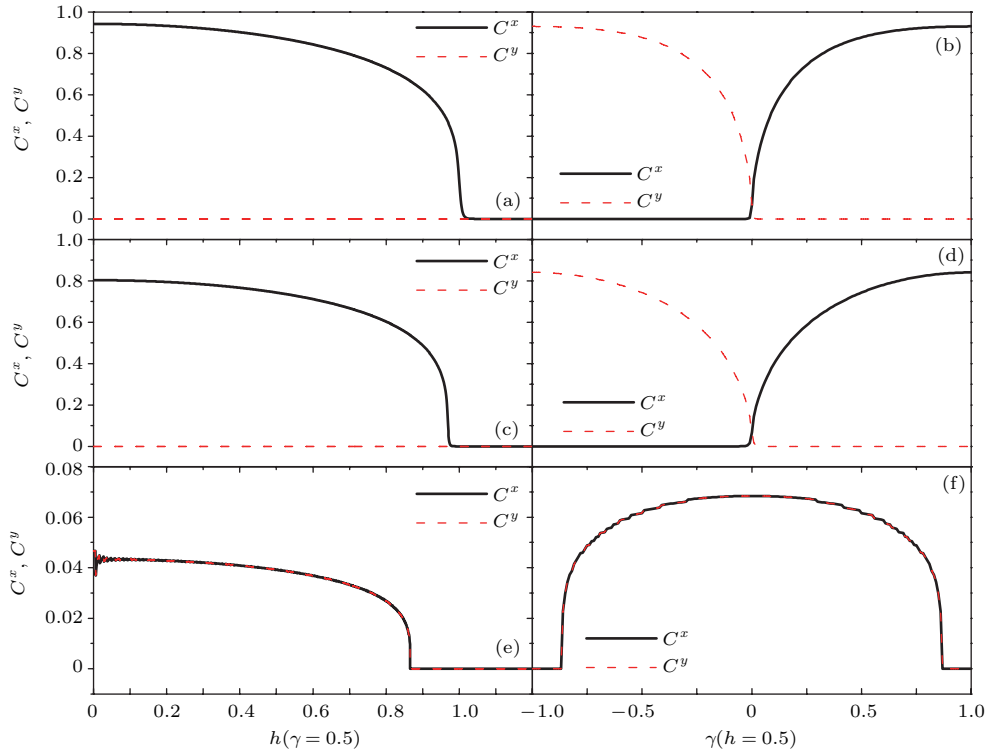


图 2 (网刊彩色) α 取不同值时, 横场中各向异性参数周期为二的一维 XY 模型的长程关联函数分别关于 h 和 γ 的变化情况 (a), (b) 对应 $\alpha = 1$ 的情形; (c), (d) 对应 $\alpha = 0$ 的情形; (e), (f) 对应 $\alpha = -1$ 的情形

Fig. 2. (color line) The long-range correlations of the period-two anisotropic XY chains in a transverse field with different α as functions of γ and h for: (a), (b) $\alpha = 1$; (c), (d) $\alpha = 0$; (e), (f) $\alpha = -1$.

图 2(e) 和图 2(f) 给出的是 $\alpha = -1$ 时系统的 C^x 和 C^y 关于 h 和 γ 的变化曲线. 随着外场 h 增大, C^x, C^y 同时由大于零的值变为零, 系统由有序相过渡到无序相. 其相变发生位置为 $h_{c2} = \sqrt{1 - \gamma^2}$, 与解析计算得到的结果完全一致. 在 $h > h_{c2}$ 区域内 $C^x = C^y = 0$, 系统所处的相仍然是 PM 相; 而在 $h < h_{c2}$ 区域内 $C^x = C^y > 0$, 对应的是一个新的有序相. 为了描述方便, 我们将其称为各向同性铁磁相, 记为 FM_{xx} 相. 此时系统的 Ising 相变仍然存在, 各向异性相变消失.

为了了解 FM_{xx} 相出现的原因, 我们分析了系统的对称性, 发现当 $\alpha = -1$ 时模型的哈密顿量在经过变换 $\sigma_{2i}^x \rightarrow \sigma_{2i+1}^y, \sigma_{2i}^y \rightarrow \sigma_{2i+1}^x$ 之后保持不变.

为此我们计算了最相邻格点的关联函数随外场 h 的变化曲线, 如图 3 所示. 结果显示第 $2i - 1$ 和 $2i$ 格点间沿 $x(y)$ 方向的关联函数等于第 $2i$ 和 $2i + 1$ 格点间沿 $y(x)$ 方向的关联函数, 因而导致了不同方向的长程关联函数相等. 正是存在这样的对称性, 系统在 $h < h_{c2}$ 区域表现为 FM_{xx} 相, 在 $h > h_{c2}$ 区域表现为 PM 相.

在参数 α 不同的情况下, 通过研究 C^x, C^y 关于 h 和 γ 的函数行为, 发现数值结果与前文中求出的解析式 (11) 和 (13) 相一致. 于是, 我们得到了系统在不同 α 取值情况下参数空间 (h, γ) 中的相图, 如图 4 所示.

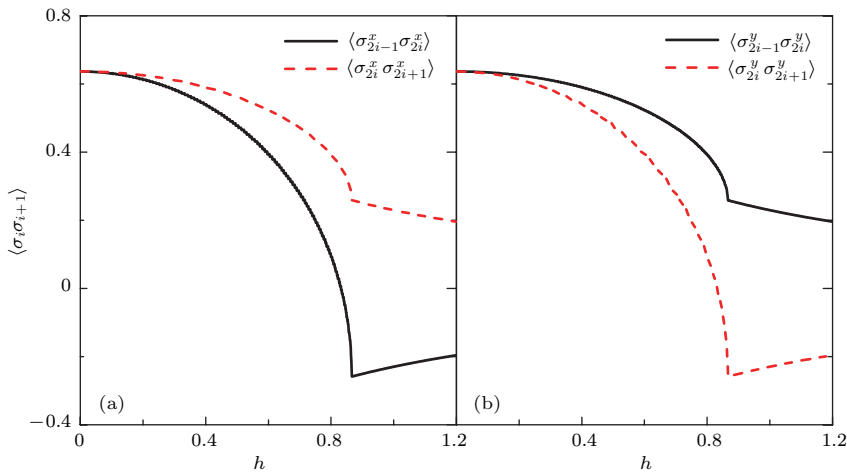


图 3 (网刊彩色) $\alpha = -1$ 时, 横场中各向异性参数周期为二的一维 XY 模型最近邻格点关联函数随外场 h 的变化 (a) 实线、短划线分别对应 $\langle \sigma_{2i-1}^x \sigma_{2i}^x \rangle, \langle \sigma_{2i}^x \sigma_{2i+1}^x \rangle$; (b) 实线、短划线分别对应 $\langle \sigma_{2i-1}^y \sigma_{2i}^y \rangle, \langle \sigma_{2i}^y \sigma_{2i+1}^y \rangle$; $\gamma = 0.5, N = 500$

Fig. 3. (color line) The short-range correlations of the period-two anisotropic XY spin models in a transverse field with $\alpha = -1$ as functions of h for: (a) The solid and dashed lines correspond to $\langle \sigma_{2i-1}^x \sigma_{2i}^x \rangle, \langle \sigma_{2i}^x \sigma_{2i+1}^x \rangle$; (b) the solid and dashed lines correspond to $\langle \sigma_{2i-1}^y \sigma_{2i}^y \rangle, \langle \sigma_{2i}^y \sigma_{2i+1}^y \rangle$. $\gamma = 0.5, N = 500$.

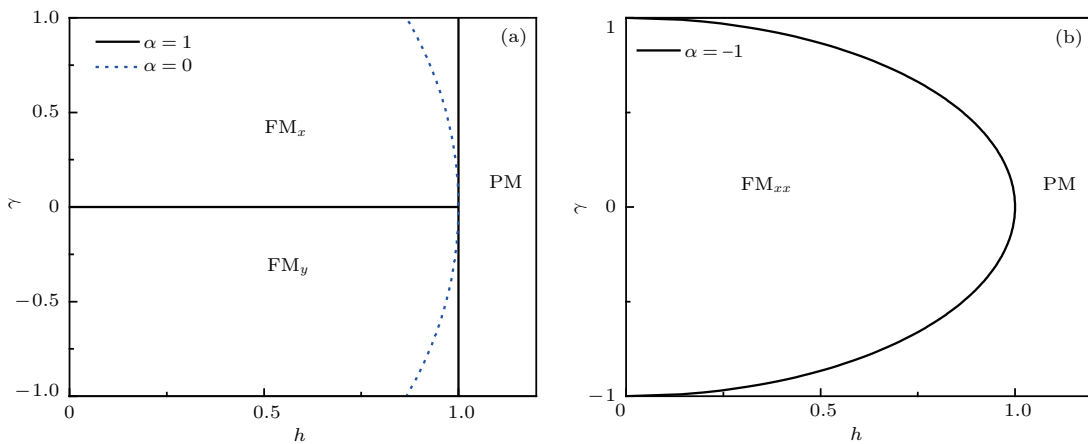


图 4 (网刊彩色) 横场中各向异性参数周期为二的一维 XY 模型的相图 (a) $\alpha = 1, 0$; (b) $\alpha = -1$

Fig. 4. (color line) Phase diagram of the period-two anisotropic XY chains in a transverse field for: (a) $\alpha = 1, \alpha = 0$; (b) $\alpha = -1$.

3.2 冯·诺依曼熵

对于横场中均匀 XY 模型, 系统的冯·诺依曼熵在 Ising 相变和各向异性相变处与子链长的对数存在线性关系^[15], 但是在沿 $x(y)$ 方向各向异性铁磁 (FM_x, FM_y) 相和 PM 相内会很快收敛到一个常数值. 这三个相都是有能隙的, 而当 $\alpha = -1$ 时系统出现了一个无能隙的铁磁 (FM_{xx}) 相. 因此, 我们借助冯·诺依曼熵进一步数值研究了不同 α 情形下系统的量子纠缠行为.

我们发现当 $\alpha \neq -1$ (图 5(a)) 时系统在相变点 $h = h_{c1}$ 附近的 S_L 变化曲线和横场中均匀 XY 模型 ($\alpha = 1$) 在 Ising 相变点处的纠缠行为相似, 即与子链长 L 的对数呈线性关系, 对数前系数为

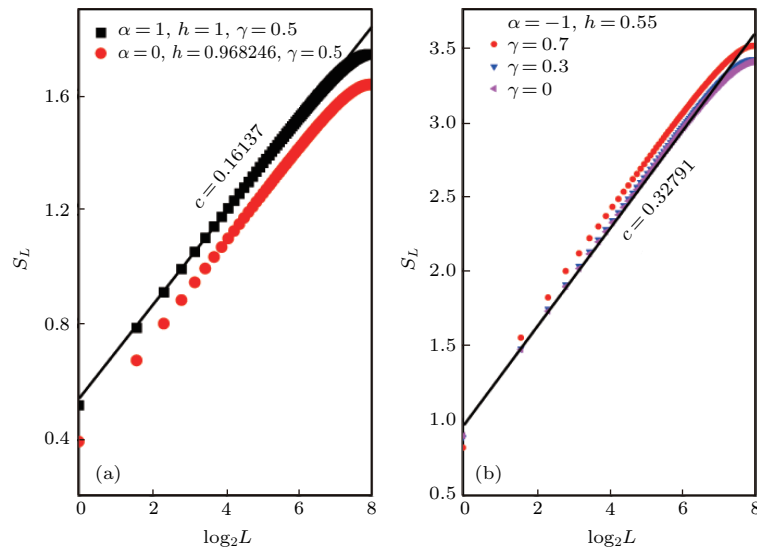


图 5 (网刊彩色) 横场中各向异性参数周期为二的一维 XY 模型的冯·诺依曼熵随子链长 L 的变化 (a) $h = 1, \gamma = 0.5, \alpha = 1; h = 0.968246, \gamma = 0.5, \alpha = 0$; (b) $\alpha = -1, h = 0.55, \gamma = 0.7, 0.3, 0$

Fig. 5. (color line) S_L of the period-two anisotropic XY chains in a transverse field of the system in the FM_{xx} phase as functions of L (the size of the subsystem) for: (a) $h = 1, \gamma = 0.5, \alpha = 1; h = 0.968246, \gamma = 0.5, \alpha = 0$; (b) $\alpha = -1, h = 0.55, \gamma = 0.7, 0.3, 0$.

4 结 论

本文讨论了横场中具有周期性各向异性参数的一维 XY 模型的量子相变和量子纠缠. 数值计算了两格点长程关联函数 C^x, C^y , 发现当 $\alpha \neq -1$ 时, 系统的相变行为与横场中均匀 XY 模型的相似; 而当 $\alpha = -1$ 时系统在 $h < h_{c2}$ 区域内是无能隙的, 且对应的关联函数 $C^x = C^y > 0$, 我们把这样的相叫做各向同性铁磁 (FM_{xx}) 相. 考虑系统的对称性, 我们发现 $\alpha = -1$ 所对应的 XY 模型在经过变

换 $\sigma_{2i}^x \rightarrow \sigma_{2i+1}^y, \sigma_{2i}^y \rightarrow \sigma_{2i+1}^x$ 后, 哈密顿量不变, 导致了 FM_{xx} 相的出现. 这样就得到了系统在参数空间中的相图. 最后, 采用冯·诺依曼熵研究了系统在 FM_{xx} 相内的纠缠行为. 发现其与子链长 L 的对数呈线性关系, 对数前系数 $c = 1/3$, 这与横场中均匀 XY 模型在各向异性相变点处的纠缠行为相似.

参考文献

[1] Suzuki S, Inoue J I, Chakrabarti B K 2013 *Quantum Ising Phases and Transitions in Transverse Ising Models* (Berlin: Springer-Verlag) p13

- [2] de Gennes P G 1963 *Solid State Commun.* **1** 132
- [3] Bitko D, Rosenbaum T F, Aeppli G 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 940
- [4] Vtyurina N N, Dulin D, Docter M W, Meyer A S, Dekker N H, Abbondanzieri E A 2016 *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **113** 4982
- [5] Fan B, Branch R W, Nicolau D V, Pilizota T, Steel B C, Maini P K, Berry R M 2010 *Science* **327** 685
- [6] Shi Y, Duke T 1998 *Phys. Rev. E* **58** 6399
- [7] Sornette D 2014 arXiv:1404.0243v1 [q-fin.GN]
- [8] Jin B Q, Korepin V E 2004 *I. Stat. Phys.* **116** 79
- [9] Islófi F, Juhász R 2008 *Europhys. Lett.* **81** 57003
- [10] Babkevich P, Jeong M, Matsumoto Y, Kovacevic I, Finco A, Toft-Petersen R, Ritter C, Månsson M, Nakatsuji S, Rønnow H M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 197202
- [11] Kenzelmann M, Coldea R, Tennant D A, Visser D, Hofmann M, Smeibidl P, Tylczynski Z 2002 *Phys. Rev. B* **65** 144432
- [12] Lieb E, Schultz T, Mattis D 1961 *Ann. Phys. NY* **16** 407
- [13] Pfeuty P 1970 *Ann. Phys. NY* **57** 79
- [14] Osterloh A, Amio L, Falci G, Fazio R 2002 *Nature* **416** 608
- [15] Vidal G, Latorre J I, Rico E, Kitaev A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 227902
- [16] Franchini F, Its A R, Korepin V E 2008 *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 025302
- [17] Raoul D 2008 *Phys. Rev. B* **78** 224413
- [18] Guo J L, Wei J L, Qin W, Mu Q X 2015 *Quantum Int. Process* **14** 1429
- [19] Cheng W W, Li J X, Shan C J, Gong L Y, Zhao S M 2015 *Quantum Int. Process* **14** 2535
- [20] Zanardi P, Paunkovic N 2006 *Phys. Rev. E* **74** 031123
- [21] Quan H T, Song Z, Liu X F, Zanardi P, Sun C P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 140604
- [22] Fisher D 1994 *Phys. Rev. B* **50** 3799
- [23] Bunder J, McKenzie R 1999 *Phys. Rev. B* **60** 344
- [24] Luck J M 1993 *J. Stat. Phys.* **72** 417
- [25] Zhang Z J, Li W J, Zhu X, Xiong Y, Tong P Q 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 190501 (in Chinese) [张振俊, 李文娟, 朱璇, 熊焯, 童培庆 2015 物理学报 **64** 190501]
- [26] Tong P Q, Zhong M 2001 *Physica B* **304** 91
- [27] Zhong M, Tong P Q 2010 *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 505302
- [28] Tong P Q, Liu X X 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 017201
- [29] Zhong M, Liu X X, Tong P Q 2007 *Int. J. Mod. Phys. B* **21** 4225
- [30] Latorre J I, Rico E, Vidal G 2004 *Quantum Int. Comput.* **4** 48
- [31] Sachdev S 2011 *Quantum Phase Transitions* (Cambridge: Cambridge University Press) p133

Quantum phase transitions of one-dimensional period-two anisotropic XY models in a transverse field*

Song Jia-Li¹⁾ Zhong Ming^{1)†} Tong Pei-Qing^{1)2)‡}

1) (Department of Physics and Institute of Theoretical Physics, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

2) (Jiangsu Key Laboratory for Numerical Simulation of Large Scale Complex Systems, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

(Received 18 February 2017; revised manuscript received 18 May 2017)

Abstract

The quantum phase transitions of one-dimensional period-two anisotropic XY models in a transverse field with the Hamiltonian

$$H = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{J}{2} \left(\frac{1+\gamma_i}{2} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \frac{1-\gamma_i}{2} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y \right) - \frac{1}{2} h \sigma_i^z \right],$$

where the anisotropy parameters γ_i take γ and $\alpha\gamma$ alternately, are studied. The Hamiltonian can be reduced to the diagonal form by Jordan-Wigner and Bogoliubov transformations. The long-range correlations C^x and C^y are calculated numerically. The phase with $C^x > C^y \neq 0$ (or $C^y > C^x \neq 0$) is referred to as the ferromagnetic (FM) phase along the x (or y) direction, while the phase with $C^x = C^y = 0$ is the paramagnetic (PM) phase. It is found that the phase diagrams with the ratio $\alpha \neq -1$ and $\alpha = -1$ are different obviously.

For the case with $\alpha \neq -1$, the line $h = h_{c1} = \sqrt{1 - [\gamma(1 - \alpha)/2]^2}$ separates an FM phase from a PM phase, while the line $\gamma = 0$ is the boundary between a ferromagnetic phase along the x direction (FM_x) and a ferromagnetic phase along the y direction (FM_y). These are similar to those of the uniform XY chains in a transverse field (i.e., $\alpha = 1$). When $\alpha = -1$, the FM_x and FM_y phases disappear and there appears a new FM phase. The line $h = h_{c2} = \sqrt{1 - \gamma^2}$ separates this new FM phase from the PM phase. The new phase is gapless with two zeros in single particle energy spectrum. This is due to the new symmetry in the system with $\alpha = -1$, i.e., the Hamiltonian is invariant under the transformation $\sigma_{2i}^x \rightarrow \sigma_{2i+1}^y, \sigma_{2i}^y \rightarrow \sigma_{2i+1}^x$. The correlation function between the $2i - 1$ and $2i$ lattice points along the x (y) direction is equal to that between the $2i$ and $2i + 1$ lattice points along the y (x) direction. As a result, the long-range correlation functions along two directions are equivalent. In order to facilitate the description, we call this gapless phase the isotropic ferromagnetic (FM_{xx}) phase.

Finally, the relationship between quantum entanglement and quantum phase transitions of the system is studied. The scaling behaviour of the von Neumann entropy at each point in the FM_{xx} phase is $S_L \sim \frac{1}{3} \log_2 L + \text{Const}$, which is similar to that at the anisotropic phase transition point of the uniform XY model in a transverse field, and different from those in the FM_x and FM_y phases.

Keywords: period-two anisotropic XY model, quantum phase transition, isotropic ferromagnetic phase, von Neumann entropy

PACS: 03.65.-w, 75.10.Pq, 75.50.Gg, 68.65.-k

DOI: 10.7498/aps.66.180302

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11575087).

† Corresponding author. E-mail: mzhong@njnu.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: pqtong@njnu.edu.cn