

多层单向耦合星形网络的特征值谱及同步能力分析

孙娟 李晓霞 张金浩 申玉卓 李艳雨

Synchronizability and eigenvalues of multilayer star networks through unidirectionally coupling

Sun Juan Li Xiao-Xia Zhang Jin-Hao Shen Yu-Zhuo Li Yan-Yu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 188901 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.188901

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.188901>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I18>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

网络集聚性对节点中心性指标的准确性影响

Effect of variable network clustering on the accuracy of node centrality

物理学报.2016, 65(2): 028901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.028901>

两层星形网络的特征值谱及同步能力

Synchronizability and eigenvalues of two-layer star networks

物理学报.2016, 65(2): 028902 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.028902>

基于联合矩阵分解的节点多属性网络社团检测

Community detection based on joint matrix factorization in networks with node attributes

物理学报.2015, 64(21): 218901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.218901>

基于局部路由策略的复杂网络拥塞控制

Congestion control in complex network based on local routing strategy

物理学报.2014, 63(24): 248901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.248901>

基于时滞耦合映像格子的多耦合边耦合网络级联抗毁性研究

Study on cascading invulnerability of multi-coupling-links coupled networks based on time-delay coupled map lattices model

物理学报.2014, 63(7): 078901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.078901>

多层单向耦合星形网络的特征值谱及同步能力分析*

孙娟¹⁾²⁾ 李晓霞^{1)2)†} 张金浩¹⁾²⁾ 申玉卓¹⁾²⁾ 李艳雨¹⁾²⁾

1)(省部共建电工装备可靠性与智能化国家重点实验室(河北工业大学), 天津 300130)

2)(河北省电磁场与电器可靠性重点实验室(河北工业大学), 天津 300130)

(2017年4月1日收到; 2017年5月16日收到修改稿)

随着复杂网络同步的进一步发展, 对复杂网络的研究重点由单层网络转向更加接近实际网络的多层有向网络. 本文分别严格推导出三层、多层的单向耦合星形网络的特征值谱, 并分析了耦合强度、节点数、层数对网络同步能力的影响, 重点分析了层数和层间中心节点之间的耦合强度对多层单向耦合星形网络同步能力的影响, 得出了层数对多层网络同步能力的影响至关重要. 当同步域无界时, 网络的同步能力与耦合强度、层数有关, 同步能力随其增大而增强; 当同步域有界时, 对于叶子节点向中心节点耦合的多层星形网络, 当层内耦合强度较弱时, 层内耦合强度的增大会使同步能力增强, 而层间叶子节点之间的耦合强度、层数的增大反而会使同步能力减弱; 当层间中心节点之间的耦合强度较弱时, 层间中心节点之间的耦合强度、层数的增大会使同步能力增强, 层内耦合强度、层间叶子节点之间的耦合强度的增大反而会使同步能力减弱. 对于中心节点向叶子节点耦合的多层星形网络, 层间叶子节点之间的耦合强度、层数的增大会使同步能力增强, 层内耦合强度、节点数、层间中心节点之间的耦合强度的增大反而会使同步能力减弱.

关键词: 多层星形网络, 有向网络, 特征值谱, 同步能力

PACS: 89.75.Fb, 89.75.Hc, 89.75.-k, 89.70.a

DOI: 10.7498/aps.66.188901

1 引言

近几年, 复杂网络研究主要集中在网络的拓扑结构与其动力学行为之间的关系^[1-4]、扩散动力学^[5-9]、同步^[10-14]等方面. 目前大多数复杂网络的研究都集中在单个网络^[15-27], 然而现实世界中各类系统之间并不是独立的, 而是相互联系的. 研究表明, 单个网络建模的方法一般不足以确定出现在实际复杂系统中的多层网络间的真正的相互依存关系. 比如, 一些不同社交网络的用户关系^[28]、运输系统^[29]以及大脑的学习型组织^[30]. 尽管多层网络的研究还处于起步阶段, 但已经涌现出一些有影响力的研究成果^[31,32], 这将是复杂网络理论的重要研究方向.

研究复杂网络的终极目标之一是理解网络拓扑结构对物理过程的影响. 网络上的同步现象是一项重要的研究课题^[33,34]. 同步现象大量出现在我们的生活中, 如掌声同步、路由器同步、萤火虫同时闪烁、物理振子以及生物振子的同步等, 在物理、化学、生物、工程技术、经济以及社会科学等领域都观察到了各种各样的同步现象^[35-39]. 复杂网络作为一个载体展示了丰富多彩的网络同步现象, 不同领域的学者从不同的角度对复杂网络同步进行了深入研究.

为了研究更接近于实际复杂网络的同步能力, 学者们提出了一种基于多层网络的扩散动力学方程的超拉普拉斯矩阵结构, 根据其特征值谱来分析网络同步能力^[40]. 根据主稳定性函数方法, 复杂系统的非线性动力学行为与网络的拉普拉斯矩阵的

* 河北省自然科学基金(批准号: E2011202051)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: lixiaoxia@hebut.edu.cn

第二个特征值有关^[41], 在扩散过程中, 收敛于最大熵状态^[42], 而且耦合网络的拉普拉斯矩阵的最大特征值对网络的同步稳定性具有决定性影响^[43,44]. 文献^[45,46]研究了典型的规则两层星形网络, 提出并严格推导出两层星形网络的特征值谱, 并分析了同步能力, 但由于实际复杂网络更接近于有向网络, 本文即在此基础上研究了更具一般性的多层有向星形网络的特征值谱及同步能力. 首先, 严格推导出三层单向耦合的星形网络的特征值多项式, 分别分析了在同步域无界和有界两种情况下, 网络层数、每层网络节点数、层内耦合强度、层间耦合强度(层间中心节点之间的耦合强度和层间叶子节点之间的耦合强度)与网络同步能力的关系. 其次, 进一步严格推导出多层单向耦合的星形网络的特征值多项式以及特征值谱, 分析了在同步域无界和有界两种情况下, 网络层数、每层网络节点数、层内耦合强度、层间耦合强度(层间中心节点之间的耦合强度和层间叶子节点之间的耦合强度)与网络同步能力的关系. 最后, 分析各个参数对网络同步能力的影响并进行了仿真实验.

2 模型与方法

2.1 模型

M 层网络中第 K 层、第 i 个节点的动力学方程如下:

$$\frac{dx_i^K}{dt} = f(x_i^K) + a^K \sum_{j=1}^N \omega_{ij}^K (x_j^K - x_i^K) + \sum_{H=1}^M d_i^{KH} (x_i^H - x_i^K), \quad (1)$$

其中 $1 \leq i \leq N$, $1 \leq K \leq M$; $x_i^K \in R^N$ 是第 K 层、第 i 节点的状态变量; $f(\cdot): R^n \rightarrow R^n$ 是一个动力学函数; a^K 为第 K 层的层内耦合强度; ω_{ij}^K 是第 K 层的层内耦合矩阵元; $(x_j^K - x_i^K)$ 是网络各节点状态变量之间的层内耦合函数; $(x_i^H - x_i^K)$ 是网络各节点状态变量之间的层间耦合函数; d_i^{KH} 是第 K 层和第 H 层的第 i 个节点的层间耦合强度.

我们假设多层网络为 M 层网络, 每层有 N 个节点. α 层的层内连接强度矩阵 $\mathbf{W}^{(\alpha)} \in R^{N \times N}$, $\mathbf{S}^{(\alpha)} \in R^{N \times N}$ 为层内点强度的对角矩阵, 层的层内拉普拉斯矩阵为 $\mathbf{L}^{(\alpha)} = \mathbf{S}^{(\alpha)} - \mathbf{W}^{(\alpha)}$, 假设多层网络层间的所有节点的层间连接完全一致, 我们定义 $\mathbf{W}^I \in R^{M \times M}$ 为每两层网络的层间连接强度矩阵, $\mathbf{S}^I \in R^{M \times M}$ 为每两层网络的层间点强

度对角矩阵, 每两层网络的层间拉普拉斯矩阵为 $\mathbf{L}^I = \mathbf{S}^I - \mathbf{W}^I$.

我们得到整个网络的超拉普拉斯矩阵: $\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^I$. 我们把 \mathcal{L} 分成两部分, \mathcal{L}^L 为层内的超拉普拉斯矩阵, \mathcal{L}^I 为层间的超拉普拉斯矩阵. \mathcal{L}^L 为各层内拉普拉斯矩阵的直和,

$$\mathcal{L}^L = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L}^{(M)} \end{pmatrix} = \bigoplus_{\alpha=1}^M \mathbf{L}^{(\alpha)}, \quad (2)$$

\mathcal{L}^I 为层间拉普拉斯矩阵与 $M \times N$ 的单位矩阵的 Kronecker 积,

$$\mathcal{L}^I = \mathbf{L}^I \otimes \mathbf{I}. \quad (3)$$

2.2 方法

本文采用主稳定性函数法来判定网络的同步能力的稳定性. 一个由 N 个相同的动力学系统 $\dot{\mathbf{X}}_i = f(\mathbf{X}_i)$ 为节点所构成的连续时间耗散耦合动态网络, 其状态方程如下:

$$\dot{\mathbf{X}}_i = f(\mathbf{X}_i) + c \sum_{j=1}^N W_{ij} \Gamma(\mathbf{X}_j) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (4)$$

(4) 式中, $f(\cdot): R^m \rightarrow R^m$ 是一个动力学函数, 通常情况下是非线性函数; $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})^T \in R^m$ 是节点 v_i 的状态变量; c 是网络的耦合强度系数; $\Gamma(\cdot): R^m \rightarrow R^m$ 是各节点之间的内部耦合函数, 也叫作各节点的输出函数, 它描述的是耦合节点间的连接关系, 通常取对角阵 $\mathbf{H} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m) \in R^{m \times m}$, 例如, $r_1 = 1, r_2 = r_3 = \dots = r_m = 0$ 表示两个耦合节点之间通过第一个状态变量进行耦合; 矩阵 $\mathbf{W} = [W_{ij}] \in R^{N \times N}$ 表示网络的拓扑结构, 被称为外耦合矩阵.

主稳定性函数法是研究线性耦合同步稳定性问题的一种主要方法, 并被广泛采用. 下面主要详细介绍主稳定性函数法. 我们将连续时间动态网络 (4) 式关于同步流形 $S(t)$ 进行线性稳定性分析. 令 δ_i 为第 i 个节点状态的变分, 可以得到下面的变分方程:

$$\dot{\delta}_i = \mathbf{J}_f \delta_i + c \sum_{j=1}^N W_{ij} \mathbf{J}_H \delta_j \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (5)$$

这里 \mathbf{J}_f 和 \mathbf{J}_H 分别是 $f(\mathbf{X})$ 和 $H(\mathbf{X})$ 关于同步流形 S 的 Jacobi 矩阵, 通常要求为有界. 令 $\Delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N]^T$, 则 (5) 式可写为矩阵形式:

$$\dot{\Delta} = \mathbf{J}_f \Delta + c \mathbf{J}_H \Delta \mathbf{L}^T. \quad (6)$$

记 $\mathbf{L}^T = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1}$ 为矩阵 \mathbf{W} 的 Jordan 分解, 其中 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$. $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, N$ 为矩阵 \mathbf{W} 的特征根且 $\lambda_1 = 0$. 再令 $\Delta \mathbf{P} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N]$ 得到:

$$\dot{\eta}_k = [\mathbf{J}_f + c \lambda_k \mathbf{J}_H] \eta_k \quad (k = 2, 3, \dots, N). \quad (7)$$

下面根据 Lyapunov 指数法来判断同步流形的稳定性. 考虑到方程中只有 λ_k 和 η_k 与 k 有关, 当外耦合矩阵 \mathbf{W} 为非对称时, 其特征值可能是复数, 故定义主稳定性方程为

$$\dot{\mathbf{Y}} = [\mathbf{J}_f + c(\alpha + j\beta) \mathbf{J}_H] \mathbf{Y}, \quad (8)$$

其最大 Lyapunov 指数 γ_{\max} 是实变量 α 和 β 的函数, 称为动力学网络的主稳定性函数. 已知一个给定的耦合强度 c , 在 (α, β) 所在的复平面上对应一个点 $c\lambda_k$, 如果该点对应的最大 Lyapunov 指数 γ_{\max} 为正数时, 则该特征态为不稳定态; 反之, 则该特征态为稳定态. 如果对应所有的特征态 $\lambda_k (k = 2, 3, \dots, N)$, 其所有点对应的最大 Lyapunov 指数 γ_{\max} 均为负数时, 那么认定在该耦合强度 c 下, 整个网络的同步流形是渐近稳定的.

根据主稳定函数方法, 本文网络模型的同步能力由 \mathcal{L} 的非零最小特征值 λ_2 和最大特征值 λ_{\max} 决定 [47-50]. 当同步域无界时, 网络的同步能力由 λ_2 决定, 并与 λ_2 成正比; 当同步域有界时, 网络的同步能力由 λ_{\max}/λ_2 决定, 此时网络的同步能力与 $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 成反比. 对于同步化区域为空集的情况, 无论耦合强度 c 怎么改变都不能实现网络的同步, 所以无需讨论该情况.

3 特征值谱及同步能力分析

3.1 三层单向耦合星形网络的结构

本节首先严格推导三层单向耦合的星形网络的特征值谱, 其中单向耦合包含叶子节点向中心节点的单向耦合和中心节点向叶子节点的单向耦合, 耦合模型如图 1(a) 和图 1(b) 所示, 层间耦合方式如图 2 所示. 图 1(a) 的每层星形网络内, 叶子节点向该层中心节点耦合强度为 a ; 图 1(b) 的每层星形网络内, 中心节点向该层叶子节点耦合强度为 a ; 图 2 中每两层网络间叶子节点与叶子节点一一对应耦合, 中心节点与中心节点一一对应耦合, 耦合方式为双向耦合, 叶子节点之间耦合强度为 d , 中心节点之间耦合强度为 d_0 .

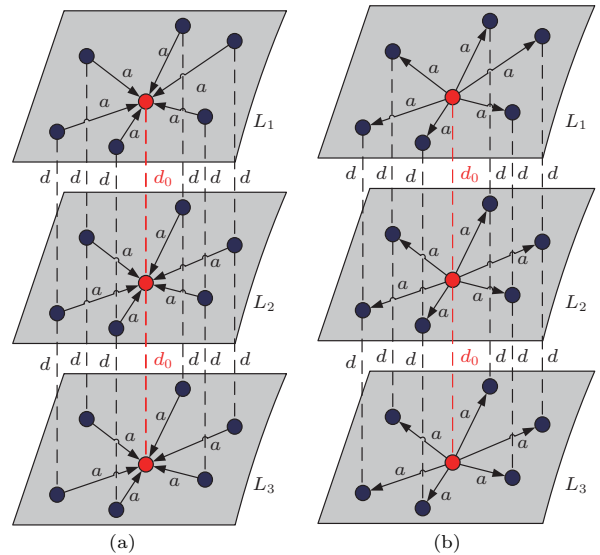


图 1 (网刊彩色) (a) 叶子节点向中心节点的单向耦合; (b) 中心节点向叶子节点的单向耦合; 黑色虚线表示每两层间叶子节点耦合, 红色虚线表示每两层间中心节点耦合, 层内耦合强度为 a , 层间叶子节点之间的耦合强度为 d , 层间中心节点之间的耦合强度为 d_0

Fig. 1. (color online) (a) The coupling model is that leaf nodes point to the hub node; (b) the coupling model is that the hub node point to leaf nodes. The black dotted line represents the coupling connection between the leaf nodes of every two layers of the network, the red dotted line represents the coupling connection between the hub nodes of every two layers of the network, the intralayer coupling strength a the inter-layer leaf nodes coupling strength d , the inter-layer hub nodes coupling strength d_0 .

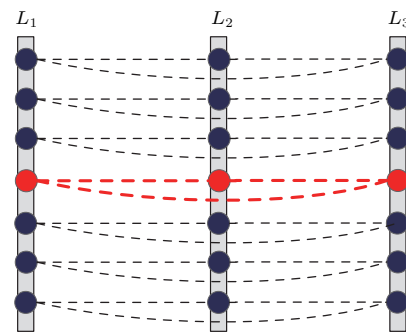


图 2 (网刊彩色) 层间耦合方式, 每两层叶子节点之间一一对应双向耦合, 每两层中心节点之间一一对应双向耦合; 黑色虚线表示层间叶子节点之间的耦合连接, 红色虚线表示层间中心节点之间的耦合连接

Fig. 2. (color online) The coupling model between the layers. The coupling between the leaf nodes of every two-layer of network is one-to-one bidirectional coupling, and the coupling between the hub nodes of every two-layer of network is one-to-one bidirectional coupling; the black dotted lines represent the inter-layer leaf nodes, and the red dotted lines represent the coupling between the inter-layer hub nodes.

3.2 三层单向耦合星形网络的特征值谱及同步能力分析

首先, 这里我们假设三层网络的每层网络的拓扑结构是完全一致的星形网络, 每两层网络间叶子节点之间、中心节点之间分别都是一一对应耦合; 每层网络的节点数都为 N , 整个网络层数为 M , 层

内耦合强度为 a , 层间中心节点之间的耦合强度为 d_0 , 层间叶子节点之间的耦合强度为 d . 对于简单有向图 G , 其拉普拉斯矩阵 $L(G) = S(G) - W(G)$, $S(G)$ 为顶点出度的对角矩阵, $W(G) = [a_{ij}]$ 为其邻接矩阵, a_{ij} 为节点 V_i 到 V_j 的边的权值^[51]. 由此得到的三层叶子节点向中心节点的单向耦合星形网络的超拉普拉斯矩阵为

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2d_0 & 0 & \cdots & 0 & -d_0 & 0 & \cdots & 0 & -d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & a+2d & \cdots & 0 & 0 & -d & \cdots & 0 & 0 & -d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & 0 & \cdots & a+2d & 0 & 0 & \cdots & -d & 0 & 0 & \cdots & -d \\ -d_0 & 0 & \cdots & 0 & 2d_0 & 0 & \cdots & 0 & -d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -d & \cdots & 0 & -a & a+2d & \cdots & 0 & 0 & -d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d & -a & 0 & \cdots & a+2d & 0 & 0 & \cdots & -d \\ -d_0 & 0 & \cdots & 0 & -d_0 & 0 & \cdots & 0 & 2d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -d & \cdots & 0 & 0 & -d & \cdots & 0 & -a & a+2d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d & 0 & 0 & \cdots & -d & -a & 0 & \cdots & a+2d \end{pmatrix};$$

三层中心节点向叶子节点的单向耦合星形网络的超拉普拉斯矩阵为

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} (N-1)a+2d_0 & -a & \cdots & -a & -d_0 & 0 & \cdots & 0 & -d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2d & \cdots & 0 & 0 & -d & \cdots & 0 & 0 & -d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2d & 0 & 0 & \cdots & -d & 0 & 0 & \cdots & -d \\ -d_0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)a+2d_0 & -a & \cdots & -a & -d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -d & \cdots & 0 & 0 & 2d & \cdots & 0 & 0 & -d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d & 0 & 0 & \cdots & 2d & 0 & 0 & \cdots & -d \\ -d_0 & 0 & \cdots & 0 & -d_0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)a+2d_0 & -a & \cdots & -a \\ 0 & -d & \cdots & 0 & 0 & -d & \cdots & 0 & 0 & 2d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d & 0 & 0 & \cdots & -d & 0 & 0 & \cdots & 2d \end{pmatrix}.$$

根据 $\begin{vmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{vmatrix} = |A - B|^2 |A + 2B|$ 得出: 三

层叶子节点向中心节点的单向耦合星形网络的超拉普拉斯矩阵的特征值多项式为 $|\lambda I - \mathcal{L}| =$

$\lambda(\lambda - a)^{N-1}(\lambda - 3d_0)^2[\lambda - (a + 3d)]^{2(N-1)}$, 故特征值为: $0, \underbrace{a, \dots, a}_{N-1}, \underbrace{3d_0, 3d_0}_2, \underbrace{a + 3d, \dots, a + 3d}_{2(N-1)}$.

三层中心节点向叶子节点的单向耦合星形网络的超拉普拉斯矩阵的特征值多项式为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathcal{L}| = \lambda^{(N-1)}[\lambda - (N-1)a](\lambda - 3d)^{2(N-1)} \cdot \{\lambda - [(N-1)a + 3d_0]\}^2, \text{ 故特征值为: } \underbrace{0, \dots, 0}_{N-1}, \underbrace{3d, \dots, 3d}_{2(N-1)}, \underbrace{(N-1)a, (N-1)a + 3d_0, (N-1)a + 3d_0}_2.$$

在实际网络中, 节点数 N 是非常大的, 远远大于层内耦合强度 a 和层间节点之间的耦合强度 d 与 d_0 . 其同步能力的强弱根据同步域无界和有界两种情形来考虑, 即讨论非零最小特征值 λ_2 (值越大同步性越强) 与 $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ (值越小同步性越强).

三层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络, 当同步域无界时, 网络的同步能力由 $\lambda_2 = \min\{a, 3d_0\}$ 决定; 当同步域有界时, 网络的同步能力由 $r = (a + 3d)/\min\{a, 3d_0\}$ 决定, 而无论是

同步域无界还是有界, 网络的同步能力都与节点数无关.

三层中心节点向叶子节点单向耦合的星形网络, 当同步域无界时, 网络的同步能力由 $\lambda_2 = 3d$ 决定; 当同步域有界时, 网络的同步能力由 $r = [(N-1)a + 3d_0]/(3d)$ 决定.

3.3 多层单向耦合星形网络的特征值谱及同步能力分析

本文进一步推导出多层单向耦合星形网络的超拉普拉斯矩阵及特征值多项式, 多层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络的超拉普拉斯矩阵为

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} (M-1)d_0 & 0 & \dots & 0 & -d_0 & 0 & \dots & 0 & -d_0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & a+(M-1)d & \dots & 0 & 0 & -d & \dots & 0 & 0 & -d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & 0 & \dots & a+(M-1)d & 0 & 0 & \dots & -d & 0 & 0 & \dots & -d \\ -d_0 & 0 & \dots & 0 & (M-1)d_0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -d & \dots & 0 & -a & a+(M-1)d & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -d & -a & 0 & \dots & a+(M-1)d & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -d_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & -d_0 & 0 & \dots & 0 & -d \\ 0 & -d & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -d & \dots & 0 & (M-1)d_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -d & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & -d & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -d & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & -d & 0 \end{pmatrix};$$

多层中心节点向叶子节点单向耦合的星形网络的超拉普拉斯矩阵为

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} (N-1)a+(M-1)d_0 & -a & \dots & -a & -d_0 & 0 & \dots & 0 & -d_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (M-1)d & \dots & 0 & 0 & -d & \dots & 0 & 0 & -d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (M-1)d & 0 & 0 & \dots & -d & 0 & 0 & \dots & -d \\ -d_0 & 0 & \dots & 0 & (N-1)a+(M-1)d_0 & -a & \dots & -a & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -d & \dots & 0 & 0 & (M-1)d & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -d & 0 & 0 & \dots & (M-1)d & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -d_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & -d_0 & 0 & \dots & 0 & (N-1)a+(M-1)d_0 \\ 0 & -d & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -d & \dots & 0 & -a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & (M-1)d \\ 0 & 0 & \dots & -d & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & -d & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{根据} \begin{vmatrix} A & B & \cdots & B \\ B & A & \cdots & B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B & B & \cdots & A \end{vmatrix}_{M \times M} = |A - B|^{(M-1)} |A +$$

$(M - 1)B|$ 得出: 多层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络的特征值多项式为: $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{L}| = \lambda(\lambda - a)^{N-1}(\lambda - Md_0)^{(M-1)}[\lambda - (a + Md)]^{(M-1)(N-1)}$, 故特征值为:

$$0, \underbrace{a, \cdots, a}_{N-1}, \underbrace{Md_0, \cdots, Md_0}_{M-1}, \underbrace{a + Md, \cdots, a + Md}_{(M-1)(N-1)}$$

多层中心节点向叶子节点单向耦合的星形网络的特征值多项式为: $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{L}| = \lambda^{(N-1)}[\lambda - (N - 1)a][\lambda - Md]^{(M-1)(N-1)}\{\lambda - [(N-1)a + Md_0]\}^{(M-1)}$, 故特征值为 $0, \cdots, 0, \underbrace{Md, \cdots, Md}_{(M-1)(N-1)}, (N - 1)a, \underbrace{(N-1)a + Md_0, \cdots, (N-1)a + Md_0}_{M-1}$.

多层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络的同步能力, 按同步域为无界和有界两种情形分别讨论, 当同步域无界时, 网络的同步能力由 $\lambda_2 = \min\{a, Md_0\}$ 决定; 当同步域有界时, 网络的同步能力由 $r = (a + Md) / \min\{a, Md_0\}$ 决定, 除了 d, a, d_0 , 多层网络的层数对网络的同步能力也会产生影响.

多层中心节点向叶子节点单向耦合的星形网络, 按同步域为无界和有界两种情形分别讨论, 当同步域无界时, 网络的同步能力由 $\lambda_2 = Md$ 决定; 当同步域有界时, 网络的同步能力由 $r = [(N-1)a + Md_0] / (Md)$ 决定. 除了 N, d, a, d_0 , 网络的同步能力也受到多层网络的层数的影响.

4 数值仿真及结果

4.1 三层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络的同步能力仿真

同步域无界时, λ 与 $a, 3d_0$ 中的最小值有关; 同步域有界时, 同步能力由 $r = (a + 3d) / \min\{a, 3d_0\}$ 来决定, 网络的同步能力与 N 无关. 仿真情况归纳见表 1.

1) 同步域无界

同步域无界、 $a < 3d_0$ 时, λ_2 与 a 有关; $a > 3d_0$ 时, λ_2 与 d_0 有关. 分别变化 a 和 d_0 , 所得到的 λ_2 如图 3 所示. λ_2 随着 a 的增大而增大, 随着 d_0 的增大而增大, 同步能力增强, 增大层间中心节点之间的

耦合强度更有利于提高同步能力, 这是因为三层网络类似于三个聚类的社团结构, 聚类块间连接紧密, 从而使同步能力变得更强. 最后, 从图 3 我们可以得到: 当同步域无界时, 对于层内耦合强度和层间中心节点之间的耦合强度, 同步能力依赖于较弱的一方; 在两种耦合强度同步改变时, 层间中心节点之间的耦合强度对同步能力产生的影响更大一些.

表 1 对于三层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络, $\lambda_2, r = \lambda_{\max} / \lambda_2$ 随 d, a, d_0 的变化

Table 1. When the coupling model is that leaf nodes point to the hub node for three-layer star networks, λ_2 and $r = \lambda_{\max} / \lambda_2$ changes with d, a, d_0 .

		随 d 增大	随 a 增大	随 d_0 增大
$\lambda_2 = \min\{a, 3d_0\}$	$a < 3d_0$	不变	增大	不变
	$a > 3d_0$	不变	不变	增大
$r = \frac{a + 3d}{\min\{a, 3d_0\}}$	$a < 3d_0$	增大	减小	不变
	$a > 3d_0$	增大	增大	减小

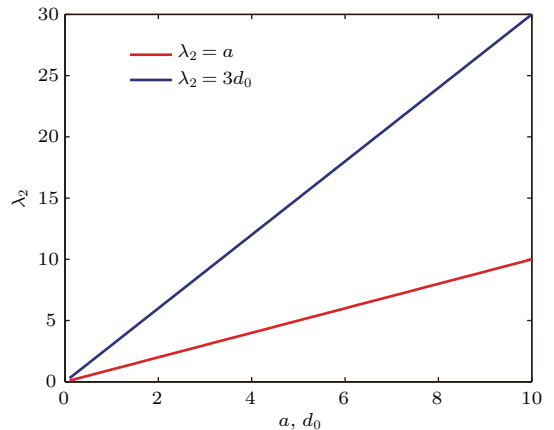


图 3 (网刊彩色) 对于三层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络, λ_2 随层内耦合强度 a 的变化 (红色实线), $a < 3d_0$; λ_2 随层间中心节点之间的耦合强度 d_0 的变化 (蓝色实线), $a > 3d_0$

Fig. 3. (color online) When the coupling model is that leaf nodes point to the hub node for three-layer star networks, λ_2 change with the intra-layer coupling strength a (red solid line), $a < 3d_0$; λ_2 change with inter-layer coupling strength between the hub nodes d_0 (blue solid line), $a > 3d_0$.

2) 同步域有界

同步域有界、 $a < 3d_0$ 时, 同步能力由 $r = 1 + 3d/a$ 决定; $a > 3d_0$ 时, 同步能力由 $r = (a + 3d) / (3d_0)$ 决定.

① $a < 3d_0$ 时, 同步能力与 a, d 有关. 取 $d = 1$, 变化 a ; 取 $a = 1, d_0 = 1$, 变化 d . 得到 r 随 a 增大呈

指数减小, 同步能力增强; r 随 d 增大而增大, 同步能力减弱(图4). 层内耦合强度越大, 层间叶子节点之间的耦合强度越小, 同步能力变得越强. 最后, 从图4我们可以得到: 在上述假定条件下, 改变层内耦合强度更有利于实现网络同步; 当层内耦合强度和层间叶子节点之间的耦合强度取值大约为2.1时, 同步能力相等; 此外, 网络的同步能力与层间中心节点之间的耦合强度无关.

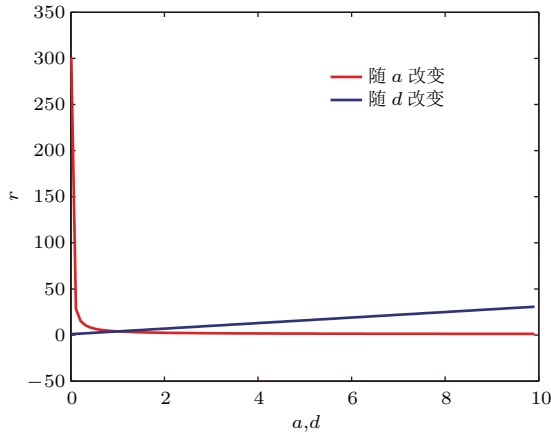


图4 (网刊彩色) 对于三层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络, r 随层内耦合强度 a 的变化(红色实线); r 随层间叶子节点之间的耦合强度 d 的变化(蓝色实线); 其中 $a < 3d_0$

Fig. 4. (color online) When the coupling model is that leaf nodes point to the hub node for three-layer star networks, r change with the intra-layer coupling strength a (red solid line) and the inter-layer coupling strength between the leaf nodes d (blue solid line), $a < 3d_0$.

② $a > 3d_0$ 时, 取 $d = 1, d_0 = 0.01$, 变化 a , 取 $a = 1, d_0 = 0.01$, 变化 d ; 取 $d = 1, a = 1$, 变化 d_0 . 得到的 r 如图5所示. r 随 a 的增大而增大, r 随 d 的增大而增大; r 随 d_0 增大呈指数减小. 层内耦合强度越小, 层间叶子节点之间的耦合强度越小, 层间中心节点之间的耦合强度越大, 同步能力变得越强. 最后, 从图5(a)我们可以得到: 在上述假定条件下, 当层内耦合强度和层间叶子节点之间的耦合强度值取1时, 同步能力相等. 从图5(b)和图4我们可以得到: 当同步域有界时, 网络的同步能力依赖于层内耦合强度和层间中心节点之间的耦合强度中较弱的一方.

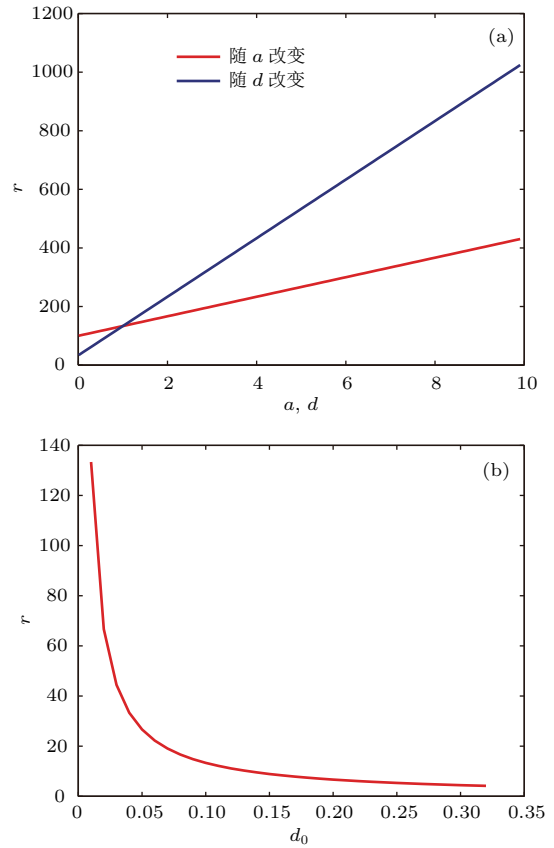


图5 (网刊彩色) 对于三层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络, (a) r 随层内耦合强度 a 的变化(红色实线)以及 r 随层间叶子节点之间的耦合强度 d (蓝色实线)的变化; (b) r 随层间中心节点之间的耦合强度 d_0 的变化; 其中 $a > 3d_0$

Fig. 5. (color online) When the coupling model is that leaf nodes point to the hub node for three-layer star networks, (a) r change with the intra-layer coupling strength a (red solid line) and the inter-layer coupling strength between the leaf nodes d (blue solid line), respectively; (b) r change with the inter-layer coupling strength between the hub nodes d_0 ; $a > 3d_0$.

4.2 三层中心节点向叶子节点单向耦合的星形网络的同步能力的仿真

三层中心节点向叶子节点单向耦合的星形网络, 当同步域无界时, 网络的同步能力由 $\lambda_2 = 3d$ 决定; 当同步域有界时, 网络的同步能力由 $r = [(N-1)a + 3d_0]/(3d)$ 决定. 仿真情况归纳于表2.

表2 对于三层中心节点向叶子节点耦合的星形网络, λ_2 和 $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随 N, M, d, a, d_0 的变化

Table 2. When the coupling model is that the hub node point to leaf nodes for three-layer star networks, λ_2 and $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with N, M, d, a, d_0 .

	随 N 增大	随 M 增大	随 d 增大	随 a 增大	随 d_0 增大
$\lambda_2 = 3d$	不变	不变	增大	不变	不变
$r = [(N-1)a + 3d_0]/(3d)$	增大	减小	减小	增大	增大

1) 同步域无界

λ_2 与 d 有关, 变化 d , 如图 6 所示, λ_2 随 d 的增大而增大. 层间叶子节点之间的耦合强度增大, 同步能力越强. 中心节点向叶子节点单向耦合的三层星形网络的超拉普拉斯矩阵的非零最小特征值是一定的, 不需要讨论, 它与层间叶子节点之间的耦合强度有关, 而与层内耦合强度和层间中心节点之间的耦合强度无关.

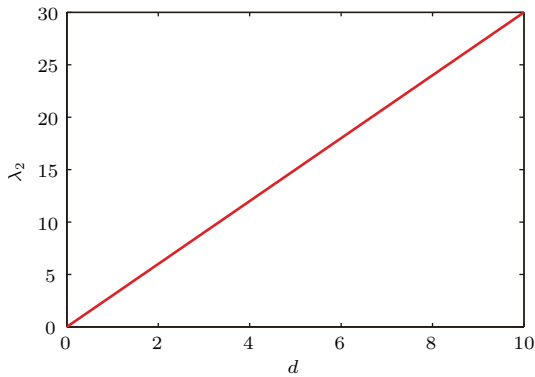


图 6 对于三层中心节点向叶子节点耦合的星形网络, λ_2 随层间叶子节点之间的耦合强度 d 的变化

Fig. 6. When the coupling model is that the hub node point to leaf nodes for three-layer star networks, λ_2 change with the inter-layer coupling strength between the leaf nodes d .

2) 同步域有界

网络的同步能力由 $r = [(N-1)a + 3d_0]/(3d)$ 决定. 取 $N = 200, d = d_0 = 1$, 变化 a ; 取 $N = 200, a = d_0 = 1$, 变化 d ; 取 $N = 200, d = a = 1$, 变化 d_0 ; 取 $a = d = d_0 = 1$, 变化 N ; 得到的 r 如图 7 所示. r 随 a 的增大而增大; r 随 d 的增大呈指数减小; r 随 d_0 的增大而增大; r 随 N 的增大而增大. 层内耦合强度越小, 层间叶子节点之间的耦合强度越大, 层间中心节点之间的耦合强度越小, 网节点数越少, 网络的同步能力变的越强. 从图 7 我们得到: 在上述假定条件下, 网络的同步能力更依赖于层间叶子节点之间的耦合强度, 而层间中心节点之间的耦合强度对网络同步能力的影响微乎其微.

表 3 对于多层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络, λ_2 和 $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随 M, d, a, d_0 的变化

Table 3. When the coupling model is that leaf nodes point to the hub node for multilayer star networks, λ_2 and $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with N, M, d, a, d_0 .

		随 M 增大	随 d 增大	随 a 增大	随 d_0 增大
$\lambda_2 = \min\{a, Md_0\}$	$a < Md_0$	不变	不变	增大	不变
	$a > Md_0$	增大	不变	不变	增大
$r = \frac{a + Md}{\min\{a, Md_0\}}$	$a < Md_0$	增大	增大	减小	不变
	$a > Md_0$	减小	增大	增大	减小

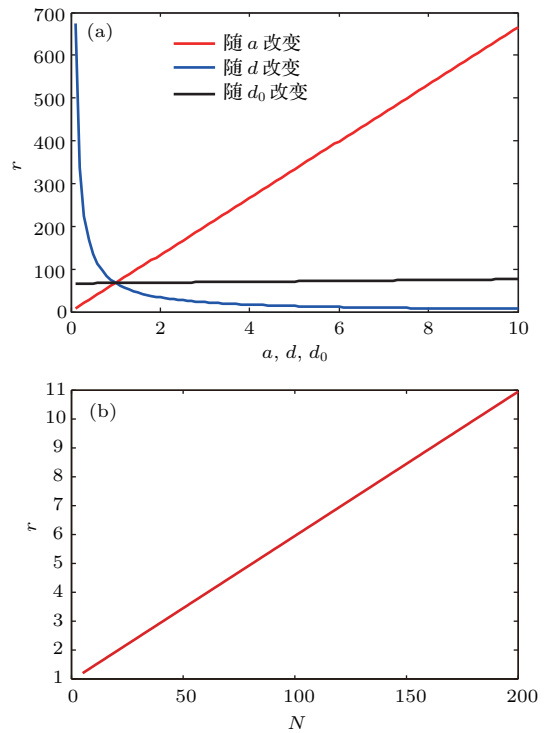


图 7 (网刊彩色) 对于三层中心节点向叶子节点耦合的星形网络, (a) r 随层内耦合强度 a 的变化 (红色实线), r 随层间叶子节点之间的耦合强度 d 的变化 (蓝色实线), r 随层间中心节点之间的耦合强度 d_0 的变化 (黑色实线); (b) r 随节点数 N 的变化

Fig. 7. (color online) When the coupling model is that the hub node point to leaf nodes for three-layer star networks, (a) r change with the intra-layer coupling strength a (red solid line), the inter-layer coupling strength between the leaf nodes d (blue solid line), and the inter-layer coupling strength between the hub nodes d_0 (black solid line), respectively; (b) r change with the number of nodes N .

4.3 多层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络的同步能力的仿真

多层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络, 当同步域无界时, 网络的同步能力由 $\lambda_2 = \min\{a, Md_0\}$ 决定; 当同步域有界时, 网络的同步能力由 $r = (a + Md)/\min\{a, Md_0\}$ 决定; 网络的同步能力与 N 无关. 仿真情况归纳于表 3.

1) 同步域无界

① $a < Md_0$ 时, λ_2 只与 a 有关, 得到的 λ_2 与三层网络的仿真结果(图 3 红色实线)一致. λ_2 随着 a 的增大而增大, 同步能力增强. 我们得到: 在上述假定条件下, 层内耦合强度对网络同步能力的影响可以推广到多层网络.

② $a > Md_0$ 时, 与 M, d_0 有关, 取 $M = 20$, 变化 d_0 ; 取 $d_0 = 1$, 变化 M ; 得到的 λ_2 如图 8 所示. λ_2 随着 d_0 的增大而增大, 同步能力增强; λ_2 随着 M 的增大而增大, 同步能力增强; 层间中心节点之间的耦合强度越大, 层数越多, 同步能力越强. 我们得到: 在上述假定条件下, 当层间中心节点之间的耦合强度较弱时, 网络的同步能力还与层数有关.

2) 同步域有界

① $a < Md_0$ 时, 网络的同步能力由 $r =$

$(a + Md)/a$ 决定. 取 $d = 1, M = 20$, 变化 a ; 取 $a = 1, M = 20$, 变化 d ; 取 $d = 1, a = 1$, 改变 M ; 得到的 r 如图 9 所示. r 随着 a 的增大而减小, r 随着 d 的增大而增大, r 随着 M 的增大而增大. 层内耦合强度越大, 层间叶子节点之间的耦合强度越小, 层数越少, 网络的同步能力越强. 从图 9 我们可以得到: 在上述假定条件下, 网络的同步能力更依赖于层内耦合强度; 当层内耦合强度和层间叶子节点之间的耦合强度值取 1 时, 同步能力相等. 层内耦合强度和层间耦合强度对网络同步能力的影响可以由三层网络推广到多层网络; 而层内耦合强度和层间叶子节点之间的耦合强度使网络同步能力相等的参数值受到层数的影响, 不同的层数对应的参数值不同.

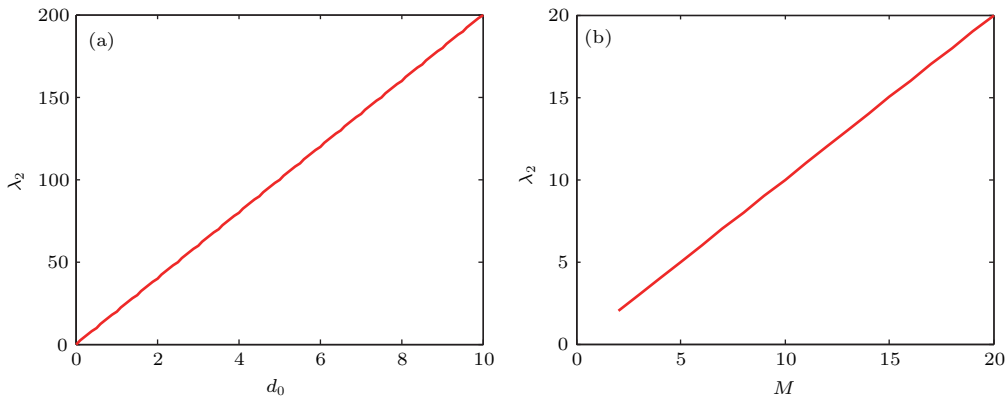


图 8 对于多层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络, (a) λ_2 随层间中心节点之间的耦合强度 d_0 的变化; (b) λ_2 随层数 M 的变化

Fig. 8. When the coupling model is that leaf nodes point to the hub node for multilayer star networks, (a) λ_2 change with the inter-layer coupling strength between the hub nodes d_0 ; (b) λ_2 change with the number of layers M .

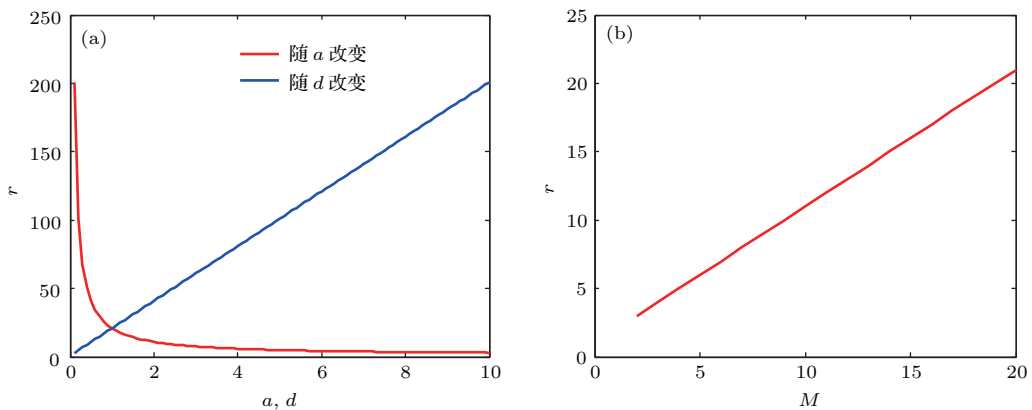


图 9 (网刊彩色) 对于多层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络, (a) r 随层内耦合强度 a 的变化 (红色实线), r 随层间叶子节点之间的耦合强度 d 的变化 (蓝色实线); (b) r 随层数 M 的变化

Fig. 9. (color online) When the coupling model is that leaf nodes point to the hub node for multilayer star networks, (a) r change with the intra-layer coupling strength a (red solid line) and the inter-layer coupling strength between the leaf nodes d (blue solid line), respectively; (b) r change with the number of layers M .

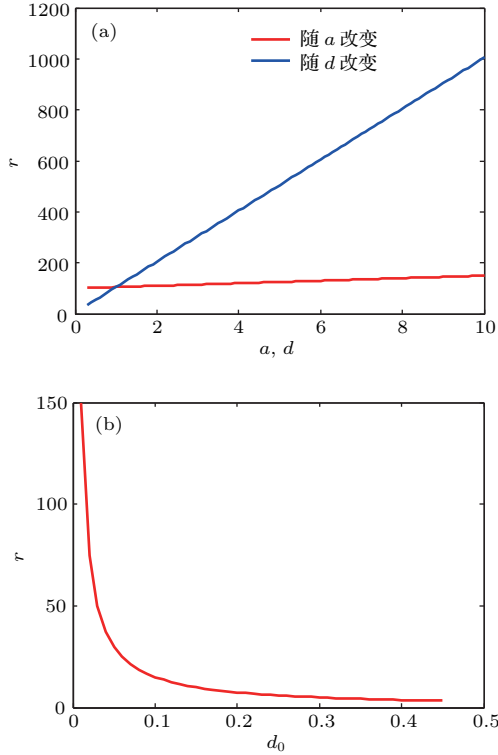


图 10 (网刊彩色) 对于多层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络, (a) r 随层内耦合强度 a 的变化 (红色实线), r 随层间叶子节点之间的耦合强度 d 的变化 (蓝色实线); (b) r 随层间中心节点之间的耦合强度 d_0 的变化; 其中 $a > Md_0$

Fig. 10. (color online) When the coupling model is that leaf nodes point to the hub node for multilayer star networks, (a) r changes with the intra-layer coupling strength a (red solid line) and the inter-layer coupling strength between the leaf nodes d (blue solid line), respectively; (b) r change with the inter-layer coupling strength between the hub nodes d_0 ; $a > Md_0$.

② $a > Md_0$ 时, 网络的同步能力由 $r = (a + Md)/(Md_0)$ 决定. 取 $M = 20, d = 1, d_0 = 0.01$, 变化 a ; 取 $M = 20, a = 1, d_0 = 0.01$, 变化 d ; 取 $M = 20, d = 1, a = 10$, 变化 d_0 ; 得到的 r 如图 10 所示. r 随着 a 的增大而增大, r 随着 d 的增大而增大, r 随着 d_0 的增大而减小. 层内耦合强度越小, 层间叶子节点之间的耦合强度越小, 层间中心节点之间的耦合强度越大, 网络的同步能力越强. 最后, 我们从图 10 (a) 可以得到: 在上述假定

条件下, 当层内耦合强度和层间叶子节点之间的耦合强度值取 1 时, 同步能力相等; 层内耦合强度和层间叶子节点之间的耦合强度使网络同步能力相等的参数值并不随层数而变化. 从图 10 (b) 和图 4、图 5 我们可以得到: 当同步域有界时, 网络的同步能力依赖于层内耦合强度和层间中心节点之间的耦合强度中较弱的一方. 层内耦合强度和层间耦合强度对网络同步能力的影响可以由三层网络推广到多层网络.

$a > Md_0$ 时, 网络的同步能力还受到层数的影响. 取 $a = 1, d = 1, d_0 = 0.01$, 变化 M , 得到 r (图 11). r 随着 M 的增大呈指数减小. 层数越少, 同步能力越强. 我们从图 11 可以得到: 在上述假定条件下, 与 $a < Md_0$ 时的图 9 (b) 比较, 当层内耦合强度较弱和层间中心节点之间的耦合强度较弱时, 层数对两种情形下的同步能力的影响相反.

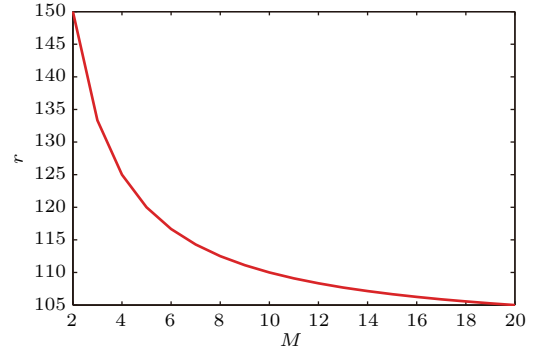


图 11 对于多层叶子节点向中心节点单向耦合的星形网络, r 随层数 M 的变化, $a > Md_0$

Fig. 11. When the coupling model is that leaf nodes point to the hub node for multilayer star networks, r change with the number of layers $M, a > Md_0$.

4.4 多层中心节点向叶子节点单向耦合的星形网络的同步能力的仿真

多层中心节点向叶子节点单向耦合的星形网络, 当同步域无界时, 网络的同步能力由 $\lambda_2 = Md$ 决定; 当同步域有界时, 网络的同步能力由 $r = [(N-1)a + Md_0]/(Md)$ 决定. 仿真情况归纳于表 4.

表 4 对于多层中心节点向叶子节点耦合的星形网络, λ_2 和 $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ 随 N, M, d, a, d_0 的变化

Table 4. When the coupling model is that the hub node point to leaf nodes for multilayer star networks, λ_2 and $r = \lambda_{\max}/\lambda_2$ changes with N, M, d, a, d_0 .

	随 N 增大	随 M 增大	随 d 增大	随 a 增大	随 d_0 增大
$\lambda_2 = Md$	不变	增大	增大	不变	不变
$r = [(N-1)a + Md_0]/(Md)$	增大	减小	减小	增大	增大

1) 同步域无界

λ_2 与 M, d 有关, 取 $d = 1$, 改变 M ; 取 $M = 20$, 变化 d . 得到的 λ_2 如图 12 所示. λ_2 随 M 的增大而增大, λ_2 随 d 的增大而增大. 层间叶子节点之间的耦合强度越大, 层数越多, 网络的同步能力越强.

2) 同步域有界

网络的同步能力由 $r = [(N-1)a + Md_0]/(Md)$ 决定. 取 $N = 200, M = 20, d = d_0 = 1$, 变化 a ; 取 $N = 200, M = 20, a = d_0 = 1$, 变化 d ; 取 $N = 200, M = 20, d = a = 1$, 变化 d_0 ; 取 $a = d = d_0 = 1$, $N = 200$, 变化 M . 得到的 r 如图 13 所示. r 随着 a

的增大而增大, r 随着 d 的增大而减小, r 随着 d 的增大而增大, r 随着 M 的增大而减小. 层内耦合强度越小, 层间叶子节点之间的耦合强度越大, 层间中心节点之间的耦合强度越小, 层数越大, 网络的同步能力越强. 从图 13 我们得到: 在上述假定的条件下, 网络的同步能力更依赖于层间叶子节点之间的耦合强度, 层间中心节点之间的耦合强度对网络同步能力的影响微乎其微. 比较图 7(a) 与图 13 可以得到: 层内耦合强度和层间耦合强度对网络同步能力的影响可以由三层网络推广到多层网络; 对于多层网络, 网络的同步能力也依赖于层数.

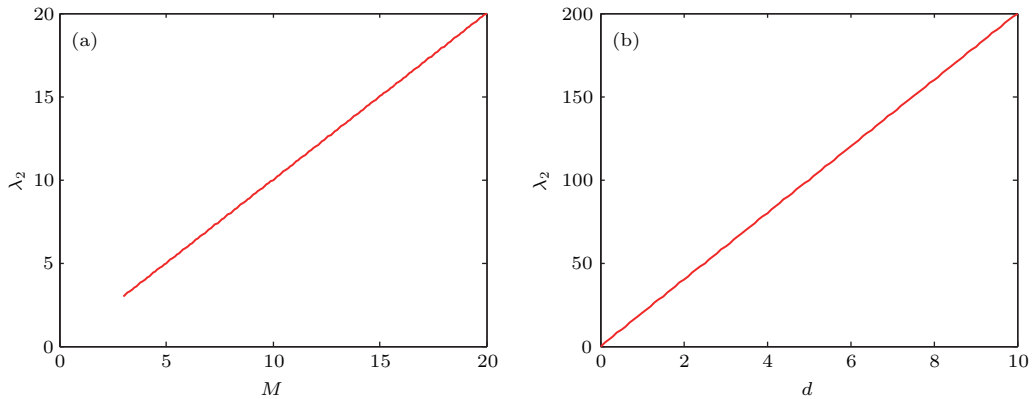


图 12 对于多层中心节点向叶子节点耦合的星形网络, (a) λ_2 随层数 M 的变化; (b) λ_2 随层间叶子节点之间的耦合强度 d 的变化

Fig. 12. When the coupling model is that the hub node point to leaf nodes for multilayer star networks, (a) λ_2 change with the number of layers M ; (b) λ_2 change with the inter-layer coupling strength between the leaf nodes d .

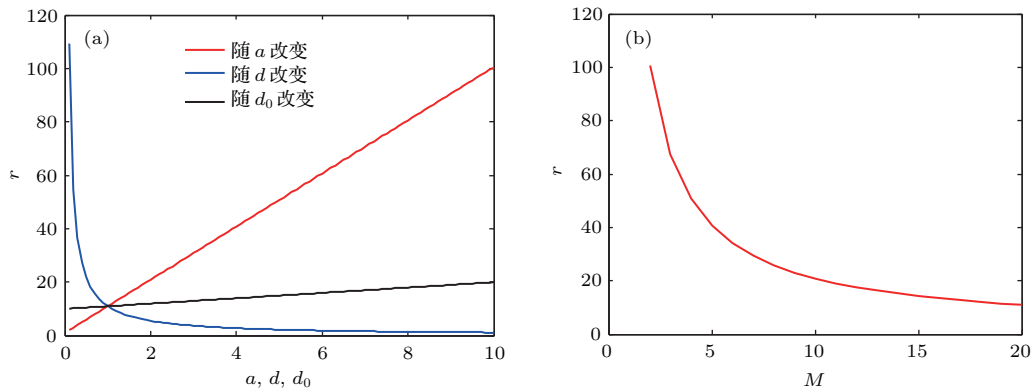


图 13 (网刊彩色) 对于多层中心节点向叶子节点耦合的星形网络, (a) r 随层内耦合强度 a 的变化 (红色实线), r 随层间叶子节点之间的耦合强度 d 的变化 (蓝色实线), r 随层间中心节点之间的耦合强度 d_0 的变化 (黑色实线); (b) r 随层数 M 的变化

Fig. 13. (color online) When the coupling model is that the hub node point to leaf nodes for multilayer star networks, (a) r change with the intra-layer coupling strength a (red solid line) and the inter-layer coupling strength between the leaf nodes d (blue solid line) and the inter-layer coupling strength between the hub nodes d_0 (black solid line), respectively; (b) r change with the number of layers M .

取 $a = d = d_0 = 1$, $M = 20$, 变化 N , 得到 r (图 14). r 随着 N 的增大而增大. 节点数越少, 同步能力越强. 比较图 7(b) 和图 14 可以得到: 节点数对网络同步能力的影响与层数无关; 节点数对网络同步能力的影响可以由三层网络推广到多层网络.

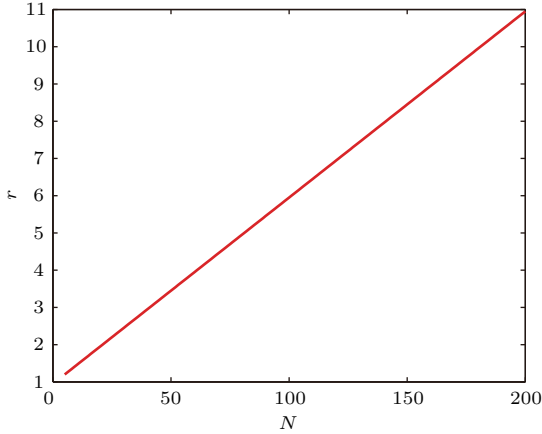


图 14 对于多层中心节点向叶子节点耦合的星形网络, r 随节点数 N 的变化

Fig. 14. When the coupling model is that the hub node point to leaf nodes for multilayer star networks, r change with the number of nodes N .

5 讨论与结论

本文在理论上严格推导出三层、多层单向耦合星形网络的超拉普拉斯矩阵, 得到其特征值谱, 并分析了同步能力. 对于叶子节点向中心节点耦合的三层及多层星形网络: 当同步域无界时, 随着层内耦合强度和层间中心节点之间的耦合强度的增大会使同步能力增强, 且该影响可以由三层网络推广到多层网络; 而对于多层网络, 层数的增大也会使同步能力增强. 当同步域有界时, 在层内耦合强度较弱的情况下, 层内耦合强度的增大会使同步能力增强, 层间叶子节点之间的耦合强度和层数的增大会使同步能力变弱. 在层间中心节点之间的耦合强度较弱的情况下, 层间中心节点之间的耦合强度和层数的增大会使同步能力增强, 而层内耦合强度和层间叶子节点之间的耦合强度的增大反而会使得同步能力变弱. 对于中心节点向叶子节点耦合的三层及多层星形网络: 当同步域无界时, 层间叶子节点之间的耦合强度和层数的增大会使同步能力增强; 当同步域有界时, 层间叶子节点之间的耦合强度和层数的增大会使同步能力增强, 而层内耦合强度、节点数和层间中心节点之间的耦合强度的增大反

而会使同步能力减弱. 本文结论与文献 [45] 的结论部分一致, 单向耦合的多层星形网络与双向耦合的两层星形网络在结构连接方式上具有一定的联系. 相同之处在于: 当同步域有界时, 文献 [45] 和本文的叶子节点向中心节点耦合的三层及多层星形网络在层内耦合强度较弱的情况下, 都得出层内耦合强度的增大会增强网络的同步能力, 层间叶子节点之间的耦合强度的增大会减弱网络的同步能力. 通过比较各参数对单向耦合的多层星形网络和双向耦合的两层星形网络同步能力的影响, 也得出它们之间的一些不同之处: 文献 [45] 设定层间中心节点之间的耦合强度 d_0 和层间叶子节点之间的耦合强度 d 相等, 在同步域有界的情况下, 文献 [45] 讨论的是层内耦合强度较弱的情况和层间叶子节点之间的耦合强度较弱的情况, 而本文没有做此设定. 对于叶子节点向中心节点耦合的三层及多层星形网络, 我们讨论的是层内耦合强度较弱的情况和层间中心节点之间的耦合强度较弱的情况; 而对于中心节点向叶子节点耦合的三层及多层星形网络的超拉普拉斯矩阵的最小非零特征值是确定的, 不需要讨论. 相对于文献 [45] 研究的两层网络, 本文重点研究了多层网络, 并且得出了网络的同步能力深受层数的影响.

由于多层网络复杂庞大, 本文对有向网络进行了简单一般化, 得到当同步域无界时, 网络层数的增大使网络的同步能力增强; 在同步域有界的情况下, 当层间中心节点之间的耦合强度较弱时, 层数对两种有向耦合方式的多层星形网络的同步能力的影响相同, 而当层内耦合强度较弱时, 层数对两种有向耦合方式的多层星形网络的同步能力的影响不同; 对于叶子节点向中心节点单向耦合的多层星形网络, 节点数的变化对网络的同步能力没有影响. 由于简单一般化的网络与实际网络的复杂无规则性还有一定的差异, 目前, 多层网络的研究仍然还有很多问题没有解决: 譬如本文的多层单向耦合的星形网络, 层间在有向耦合的情况下, 网络的特征值谱以及同步能力问题; 对于多层星形网络, 在层内耦合强度改变了网络的同步能力的情况下, 如何改变其他参数来使同步能力保持不变. 特征值谱方法对研究规则网络的同步能力问题有巨大的贡献, 而 Newman-Watts 小世界网络介于最近邻耦合规则网络与全局耦合网络之间, 是否可以推广到多层小世界网络的研究也有待验证. 目前多层网络的理论模型在应用层面还较为薄弱, 主要由于理论模

型与实际数据存在一定差距, 未来随着多层网络理论越来越逼近现实系统, 会产生较好的应用前景.

参考文献

- [1] Tang L, Lu J A, Wu X, Lü J H 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 1081
- [2] Wang X F 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 885
- [3] Barrat A, Barthélemy M, Vespignani A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 228701
- [4] Wang W X, Wang B H, Hu B, Yan G, Ou Q 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 188702
- [5] Ide Y, Izuhara H, Machida T 2016 *Physics* **457** 331
- [6] Dahan M, Levi S, Luccardini C, Rostaing P, Riveau B, Triller A 2003 *Science* **302** 442
- [7] Raquel A B, Borgeholthoef J, Wang N, Moreno Y, Gonzálezbailón S 2013 *Entropy* **15** 4553
- [8] Boukobza E, Chuchem M, Cohen D, Vardi A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 180403
- [9] Weber S, Hütt M T, Porto M 2008 *Europhys. Lett.* **82** 28003
- [10] Luan Z 2008 *Phys. Rep.* **469** 93
- [11] Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, Moreno Y, Zhou C 2008 *Phys. Reports* **469** 93
- [12] Timme M, Wolf F, Geisel T 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 074101
- [13] Motter A E, Zhou C, Kurths J 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016116
- [14] Xue M, Yeung E, Rai A, Roy S, Wan Y, Warnick S 2011 *Complex Syst.* **21** 297
- [15] Cai S, Zhou P, Liu Z 2014 *Nonlinear Dyn.* **76** 1677
- [16] Chen Y, Yu W, Tan S, Zhu H 2016 *Automatica* **70** 189
- [17] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D U 2006 *Phys. Rep.* **424** 175
- [18] Massah S, Hollebakk R, Labrecque M P, Kolybaba A M, Beischlag T V, Prefontaine G G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 218701
- [19] Song Q, Cao J, Liu F 2010 *Phys. Lett. A* **374** 544
- [20] He P, Jing C G, Fan T, Chen C Z 2014 *Complexity* **19** 10
- [21] Arenas A, Díazguilera A, Pérezvicente C J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 114102
- [22] Zhang Q, Zhao J 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 2519
- [23] Zhang Q, Luo J, Wan L 2013 *Nonlinear Dyn.* **71** 353
- [24] Ling L, Li C, Wang W, Sun Y, Wang Y, Sun A 2014 *Nonlinear Dyn.* **77** 1
- [25] Pacheco J M, Traulsen A, Nowak M A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 258103
- [26] Zhang J, Small M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 238701
- [27] Gómez-Gardeñes J, Moreno Y, Arenas A 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 034101
- [28] Murase Y, Török J, Jo H H, Kaski K, Kertész J 2014 *Phys. Rev. E* **90** 052810
- [29] Cardillo A, Zanin M, Gómez-Gardeñes J, Romance M, Amo A J G D, Boccaletti S 2013 *Eur. Phys. J. Special Topics* **215** 23
- [30] Bassett D S, Wymbs N F, Porter M A, Mucha P J, Carlson J M, Grafton S T 2011 *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **108** 7641
- [31] Li Y, Wu X, Lu J, Lu J 2015 *IEEE Trans. Circ. Syst. II Express Briefs* **63** 206
- [32] Kivelä M, Arenas A, Barthélemy M, Gleeson J P, Moreno Y, Porter M A 2014 *J. Complex Netw.* **2** 203
- [33] Lü J H 2008 *Adv. Mech.* **38** 713 (in Chinese) [吕金虎 2008 力学进展 **38** 713]
- [34] Lu J A 2010 *Complex Syst. Complex Sci.* **7** 19 (in Chinese) [陆君安 2010 复杂系统与复杂性科学 **7** 19]
- [35] Baptista M S, Garcia S P, Dana S K, Kurths J 2008 *Eur. Phys. J. Special Topics* **165** 119
- [36] Lee T H, Ju H P, Wu Z G, Lee S C, Dong H L 2012 *Nonlinear Dyn.* **70** 559
- [37] Qin J, Yu H J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6828 (in Chinese) [秦洁, 于洪洁 2007 物理学报 **56** 6828]
- [38] Wang J, Zhang Y 2010 *Phys. Lett. A* **374** 1464
- [39] Zhao M, Wang B H, Jiang P Q, Zhou T 2005 *Prog. Phys.* **25** 273 (in Chinese) [赵明, 汪秉宏, 蒋品群, 周涛 2005 物理学进展 **25** 273]
- [40] Gómez S, Díazguilera A, Gómezgardeñes J, Pérezvicente C J, Moreno Y, Arenas A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 028701
- [41] Almendral J A, Díazguilera A 2007 *New J. Phys.* **9** 187
- [42] Granell C, Gómez S, Arenas A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 128701
- [43] Pecora L M, Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2109
- [44] Liang Y, Wang X Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 038901 (in Chinese) [梁义, 王兴元 2012 物理学报 **61** 038901]
- [45] Xu M M, Lu J A, Zhou J 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 028902 (in Chinese) [徐明明, 陆君安, 周进 2016 物理学报 **65** 028902]
- [46] Aguirre J, Sevillaescoboza R, Gutiérrez R, Papo D, Buldú J M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 248701
- [47] Dabrowski A 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1225
- [48] Johnson G A, Mar D J, Carroll T L, Pecora L M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3956
- [49] Sun J, Bollt E M, Nishikawa T 2008 *Europhys. Lett.* **85** 60011
- [50] Xu M, Zhou J, Lu J A, Wu X 2015 *Euro. Phys. J. B* **88** 240
- [51] Xu W G, Wang L G 2016 *Acta Math. Appl. Sin.* **39** 801

Synchronizability and eigenvalues of multilayer star networks through unidirectionally coupling*

Sun Juan¹⁾²⁾ Li Xiao-Xia^{1)2)†} Zhang Jin-Hao¹⁾²⁾ Shen Yu-Zhuo¹⁾²⁾ Li Yan-Yu¹⁾²⁾

1) (State Key Laboratory of Reliability and Intelligence of Electrical Equipment, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China)

2) (Key Laboratory of Electromagnetic Field and Electrical Apparatus Reliability of Hebei Province, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China)

(Received 1 April 2017; revised manuscript received 16 May 2017)

Abstract

Previous studies on multilayer networks have found that properties of multilayer networks show great differences from those of the traditional complex networks. In this paper, we derive strictly the spectra of the Supra-Laplace matrix of three-layer star networks and multilayer star networks through unidirectionally coupling by using the master stability method to analyze the synchronizability of these two networks. Through mathematical analyses of the eigenvalues of the Supra-Laplace matrix, we explore how the node number, the intra-layer coupling strength the inter-layer coupling strength, and the layer number influence the synchronizability of multilayer star networks through unidirectionally coupling in two different ways. In particular, we focus on the layer number and the inter-layer coupling strength between the hub nodes, and then we conclude that the synchronizability of networks is greatly affected by the layer number. We find that when the synchronous region is unbounded, the synchronizability of the two different coupling multilayer star networks is related to not only the intra-layer coupling strength or the inter-layer coupling strength between the leaf nodes of the entire network, but also the layer number. If the synchronous region of two different coupling multilayer star networks is bounded, and the intra-layer coupling strength is weak, the synchronizability of the two different coupling multilayer star networks is different with the changing of the intra-layer coupling strength and the inter-layer coupling strength between the leaf nodes and the layer number. If the synchronous region of two different coupling multilayer star networks is bounded, and the inter-layer coupling strength between the hub nodes is weak, the two different coupling multilayer star networks are consistent with the changing of the intra-layer coupling strength and the layer number while different from the inter-layer coupling strength between the leaf nodes and the inter-layer coupling strength between the hub nodes. We find that the node number has no effect on the synchronizability of multilayer star networks through coupling from the hub node to the leaf node. The synchronizability of the network is directly proportional to the layer number, while inversely proportional to the inter-layer coupling strength between the hub nodes. Finally, the effects of the coupling strength, the layer number and the node number on the synchronizability of the two different coupling star networks can be extended from three-layer network to multilayer networks.

Keywords: multilayer star networks, unidirectional network, eigenvalue spectrum, synchronization

PACS: 89.75.Fb, 89.75.Hc, 89.75.-k, 89.70.a

DOI: 10.7498/aps.66.188901

* Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. E2011202051).

† Corresponding author. E-mail: lixiaoxia@hebut.edu.cn