

余维 -1 非光滑分岔下的簇发振荡及其机理

张正娣 刘杨 张苏珍 毕勤胜

Bursting oscillations as well as the mechanism with codimension-1 non-smooth bifurcation

Zhang Zheng-Di Liu Yang Zhang Su-Zhen Bi Qin-Sheng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **66**, 020501 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.020501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.020501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I2>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

柔性杆与凸轮斜碰撞特性分析

[Dynamical analysis of the flexible beam-cam oblique-impact system](#)

物理学报.2016, 65(24): 240502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.240502>

基于亥姆霍兹定理计算动力学系统的哈密顿能量函数

[Calculation of Hamilton energy function of dynamical system by using Helmholtz theorem](#)

物理学报.2016, 65(24): 240501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.240501>

基于人工蜂群算法的混沌信号盲提取

[Blind chaotic signal extraction based on artificial bee colony algorithm](#)

物理学报.2016, 65(23): 230501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.230501>

分数阶 Willis 环脑动脉瘤系统的混沌动力学分析与控制

[Chaotic dynamics of the fractional Willis aneurysm system and its control](#)

物理学报.2016, 65(23): 230502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.230502>

基于频域信息交换的随机共振研究

[Stochastic resonance based on frequency information exchange](#)

物理学报.2016, 65(22): 220501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.220501>

## 余维-1非光滑分岔下的簇发振荡及其机理\*

张正娣 刘杨 张苏珍 毕勤胜†

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2016年8月15日收到; 2016年11月2日收到修改稿)

不同尺度耦合会导致一些特殊的振荡行为, 通常表现为大幅振荡与微幅振荡的组合, 也即所谓的簇发振荡. 迄今为止, 相关工作大都是围绕光滑系统开展的, 而非光滑系统中由于存在着各种形式的非常规分岔, 从而可能会导致更为复杂的簇发振荡模式. 本文旨在揭示存在非光滑分岔时动力系统的不同尺度耦合效应. 以典型的含两个非光滑分界面的广义蔡氏电路为例, 通过引入周期变化的电流源以及一个用于控制的电容, 选取适当的参数使得周期频率与系统频率之间存在量级差距, 建立了含不同尺度的四维分段线性动力系统模型. 基于快子系统在不同区域中的平衡点及其稳定性分析, 以及系统轨迹穿越非光滑分界面时的分岔分析, 得到了不同余维非光滑分岔的存在条件及其分岔行为. 重点探讨了余维-1非光滑分岔下的簇发振荡的吸引子结构及其产生机理, 揭示了非光滑分岔下系统复杂振荡行为的本质.

**关键词:** 非光滑电路系统, 不同尺度, 簇发振荡, 非常规分岔

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.66.020501

## 1 引言

在实际工程系统中往往存在大量非光滑因素, 如碰撞<sup>[1]</sup>、干摩擦<sup>[2]</sup>、开关<sup>[3]</sup>、脉冲控制<sup>[4]</sup>等. 根据所建立的数学模型中的非光滑度的不同, 非光滑系统大致可以分为以下三类: 1) 非光滑连续系统, 系统的向量场连续, 而其 Jacobi 矩阵不连续, 如蔡氏电路系统<sup>[5]</sup>; 2) Filippov 系统, 系统的向量场和其 Jacobi 矩阵均不连续, 但其状态空间连续, 如干摩擦系统<sup>[6]</sup>; 3) 非光滑脉冲系统, 系统的向量场、Jacobi 矩阵及其状态空间均不连续, 如碰撞系统<sup>[7]</sup>.

与光滑系统相比, 非光滑动力系统存在许多特殊的动力学现象, 如丰富的运动形式、分岔行为及通向混沌路径的多样性<sup>[8]</sup>. 同时, 由于系统的非光滑性, 传统的分析分岔及复杂性的方法对非光滑系统不再适用, 需要探索一些新的方法和手段<sup>[9]</sup>, 因此, 非光滑系统动力学的理论分析、数值计算和应

用研究具有一定的挑战性.

针对非光滑动力系统, 国内外许多学者开展了一系列研究. 例如, Shaw 和 Holmes<sup>[10]</sup>对低维情形下的冲击振子和分段线性振子系统展开了一系列研究, 发现该类系统存在着次谐波响应、倍周期分岔等非线性特征; Nordmark 等<sup>[11]</sup>通过建立 Poincaré-Nordmark 映射, 分析了冲击振子发生碰撞时的运动形式, 发现其中存在着一种被称作擦边碰撞的现象, 且在周期运动状态下的振子, 通过擦边分岔可以直接进入混沌运动; Hu<sup>[12]</sup>针对分段光滑的系统, 分析了向量场的非光滑性对 Poincaré 映射可微性的影响; Xu<sup>[13]</sup>探究了该类系统复杂动力学行为的产生机理; 陆启韶和金俐<sup>[14]</sup>研究分析了在刚性约束下的  $n$  维非线性系统的动力学行为, 建立了这一类型的系统在刚性约束附近具有的局部映射关系, 给出了该系统局部映射 Jacobi 矩阵的计算方法; 姜海波等<sup>[15]</sup>对脉冲作用下 Chen 系统进行了非光滑分岔分析, 运用了 Floquet 理论揭示了系统周期解的分岔机理.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11472115, 11472116) 和江苏省青蓝工程资助的课题.

† 通信作者. E-mail: qbi@ujs.edu.cn.

由于缺乏有效的分析手段, 相关研究大都是围绕着平衡点或周期轨道展开的<sup>[16]</sup>, 并通过不同的数值方法建立其相应的分岔图, 例如强制法, 仅能给出稳定的周期轨道, 又如轨道跟踪法, 虽然能够给出相关的不稳定轨道, 但仅能展现常规分岔模式. 为解释非光滑分岔机理, 以Leine为代表的学者引入微分包含理论来分析系统在非光滑分界面上的分岔特性<sup>[17]</sup>, 通过分析广义Jacobi矩阵的特征值随辅助参数的退化情况, 揭示各种非光滑分岔的动力特性及其相应的产生机理.

迄今为止, 相关工作大都是针对同一尺度下的非光滑系统的分岔展开的, 基本上没有涉及不同尺度耦合下的非光滑动力系统的研究, 而事实上, 不同尺度耦合系统, 涉及到科学和工程技术的各个领域. 例如, 飞行器中存在着快速的旋转运动与相对较慢的平动之间的耦合<sup>[18]</sup>, 绳系卫星中系绳的纵横向振动与卫星姿态动力学之间的耦合<sup>[19]</sup>, 催化反应中存在着不同量级的反应速率<sup>[20]</sup>, 而几乎所有的神经元模型几乎都包含不同尺度之间的耦合<sup>[21]</sup>.

不同尺度耦合系统的研究最早可以追溯到Poincaré研究行星轨道时提出的奇异摄动方程, 但是直到诺贝尔奖获得者Hodgkin和Huxley<sup>[22]</sup>建立了快慢两尺度神经元放电模型(H-H模型), 成功地再现了其中的簇发放电行为, 不同尺度耦合系统的复杂性才引起了学术界的高度重视. 由于传统的非线性理论无法解决不同尺度之间的相互作用, 早期相关工作大都局限在近似求解、数值仿真和实验分析. 直到2000年, Izhikevich<sup>[23]</sup>引入了Rinzel的快慢分析法才将相关研究上升到机理分析的层次. 虽然近年来在不同尺度耦合领域取得了一定的进展, 但绝大部分结果均是针对光滑系统取得的, 而非光滑系统由于存在着非光滑分岔, 不仅会导致一些特殊的簇发振荡现象, 也会使得相应的簇发振荡结果更加复杂. 同时, 针对时域上不同尺度耦合的工作开展较多, 而频域上不同尺度耦合由于不存在明显的快慢子系统, 相关工作开展较少.

自Chua和Lin<sup>[24]</sup>构建了存在混沌现象的蔡氏电路以来, 其动力特性引起了国内外学者的广泛关注并开展了大量的研究<sup>[25,26]</sup>. 以原始的具有分段线性特性的蔡氏电路为基础, 通过引起其他元器件或改变其中非线性阻尼的伏安特性, 得到了各种形式的蔡氏电路, 给出了许多典型的非线性现象,

如倍周期分岔的混沌道路、多涡卷混沌吸引子等等<sup>[27,28]</sup>. 但是, 相关工作均是在同一尺度上开展的, 同时, 很少考虑其中的非光滑分岔特性. 本文旨在揭示存在非光滑分岔时系统频域上的不同尺度效应. 以典型的含两个非光滑分界面的广义蔡氏电路为例, 通过引入周期变化的电流源以及用于控制的电容, 适当选择参数, 使得激励频率远小于系统的固有频率, 建立了含频域两尺度耦合的四维分段线性非光滑动力系统. 讨论了非光滑分界面上的非常规分岔条件, 分析了余维-1非光滑分岔下的簇发振荡及其产生机理.

## 2 数学模型

具有分段线性特性的蔡氏电路不仅在实验室容易搭建, 而且存在着诸如概周期振荡、混沌振荡等复杂动力学行为, 因此常被作为基础模型来研究各种非线性现象. 本文在典型的非光滑广义蔡氏电路的基础上, 引入控制电容 $C_1$ 和周期变化的电流源 $i_G$ , 如图1所示, 其中包含两个电感 $L_1$ 和 $L_2$ , 两个电容 $C_1$ 和 $C_2$ 以及一个分段线性的非线性电阻 $R_G$ , 同时并联一个周期变化的电流源 $i_G$ , 其相应的动力学模型可以表示为

$$\begin{aligned} di_{L_1}/dt &= (V_{C_1} - i_{L_1}R_1)/L_1, \\ di_{L_2}/dt &= (V_{C_2} - V_{C_1} - i_{L_2}R_2)/L_2, \\ dV_{C_1}/dt &= (i_{L_1} + i_{L_2})/C_1 + i_G, \\ dV_{C_2}/dt &= (i_{L_2} - G(V_{C_2}))/C_2, \end{aligned} \quad (1)$$

其中非线性电阻的伏安特性为 $G(V_{C_2}) = P_2V_{C_2} + (P_1 - P_2)(|V_{C_2} + E_0| - |V_{C_2} - E_0|)/2$ , 周期变化的电流源特性为 $i_G = I_G \sin(\bar{\omega}t)$ . 引入变换 $t = R_2C_1\tau, x = R_2i_{L_1}, y = R_2i_{L_2}, u = V_{C_1}, v = V_{C_2}$ , 则(1)式可表示为如下无量纲形式:

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= \alpha(-\beta x + u), \\ dy/d\tau &= \gamma(-y - u + v), \\ du/d\tau &= x + y + w, \\ dv/d\tau &= \delta(y - G(v)), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $w = A \sin(\Omega t), \alpha = C_1R_2^2/L_1, \beta = R_1/R_2, \gamma = R_2^2C_1/L_2, \delta = C_1/C_2, a = R_2C_1P_1/C_2, b = R_2C_1P_2/C_2, A = C_1R_2I_G, \Omega = C_1R_2\bar{\omega}, G(v) = bv + \frac{1}{2}(a - b)(|v + 1| - |v - 1|)$ .

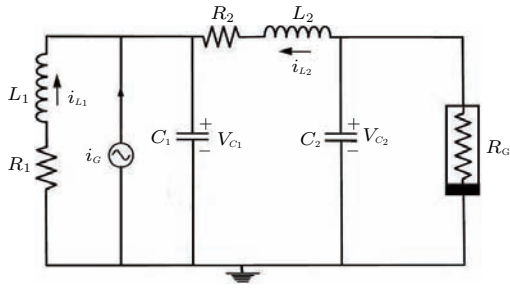


图1 电路原理图

Fig. 1. Circuit schematic diagram.

由于非线性电阻  $R_N$  的分段线性特性, 使得系统中包含有两个非光滑分界  $\sum_{\pm} : \{(x, y, u, v) | v = \pm 1\}$ , 对应系统的状态空间也因此被划分为由分界面连接的三个不同区域, 分别表示为  $D_- : \{-1 < v\}$ ,  $D_0 : \{-1 < v < +1\}$ ,  $D_0$  和  $D_+ : \{v > +1\}$ .

### 3 快子系统分岔分析

取定参数  $\Omega = 0.01$ ,  $\alpha = 0.001$ , 而其他参数为常规量, 也即考虑在弱控制下系统激励

频率与系统固有频率  $\omega$  之间存在量级差距时其动力学行为. 显然, 在固有频率对应的任一周期  $T \in [\tau_0, \tau_0 + 2\pi/\omega]$  内, 外激励项  $w$  将在  $W_A = A \sin(\Omega\tau_0)$  和  $W_B = A \sin(\Omega\tau_0 + 2\pi\Omega/\omega)$  之间变化, 由于  $\Omega \ll \omega$ ,  $W_A \approx W_B$ , 也即虽然外激励项会在  $\pm A$  之间变化, 但在任一固有频率所对应的周期内,  $w$  变化非常缓慢, 因此, 整个外激励项  $w$  可视为慢变参数. 因此快子系统可以表示为

$$\begin{aligned} dy/d\tau &= \gamma(-y - u + v), \\ du/d\tau &= x + y + w, \\ dv/d\tau &= \delta(y - G(v)), \end{aligned} \quad (3)$$

而慢子系统则为

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= \alpha(-\beta x + u), \\ d^2w/d\tau^2 &= \Omega^2 w. \end{aligned} \quad (4)$$

在区域  $D_0$  中, 快子系统具有如下惟一的平衡点  $E_0$ :

$$E_0 : \{-(x + w), x + w - (x + w)/a, -(x + w)/a\}, \quad (5)$$

而在区域  $D_{\pm}$  中, 快子系统分别存在惟一的平衡点  $E_{\pm}$ :

$$E_{\pm} : \{-(x + w), (xb - x + wb - w - a \pm b)/b, (-x - w + a - b)/b\}, \quad (6)$$

其稳定性可以由相应的特征方程得到. 注意到在不同区域中向量场为线性系统, 因而不会产生分岔, 而当轨迹穿越非光滑分界面  $\sum_{\pm} : \{(x, y, u, v) | v = \pm 1\}$  时, 系统可能会发生非光滑分岔. 为得到各种可能存在的非光滑分岔, 引入辅助参数  $q$ , 建立 Clarke 广义 Jacobi 矩阵:  $J(\pm 1) = \{qJ_0 + (1 - q)J_{\pm}\}$ ,  $q \in [0, 1]$ , 其中  $J_0$  和  $J_{\pm}$  分别表示  $E_0$  和  $E_{\pm}$  所对应的特征矩阵, 其对应的特征方程为

$$P_q(\lambda) = \lambda^3 + k_1\lambda^2 + k_2\lambda + k_3 = 0, \quad (7)$$

其中  $k_1 = \gamma + \delta b - q\delta b + q\delta a$ ,  $k_2 = \gamma - \delta\gamma + \delta\gamma b - q\delta\gamma b + q\delta\gamma a$ ,  $k_3 = -q\delta\gamma b + q\delta\gamma a + \delta\gamma b$ . 系统中可能会产生两种不同形式的非光滑分岔, 一是在分界面处发生 fold 分岔, 其产生条件为

$$NSFB : k_3 = 0, (k_1 > 0, k_1 k_2 - k_3 > 0), \quad (8)$$

另一是在分界面处发生 Hopf 分岔, 其产生条件为

$$NSHB : k_1 k_2 - k_3 = 0, (k_1 > 0, k_3 > 0), \quad (9)$$

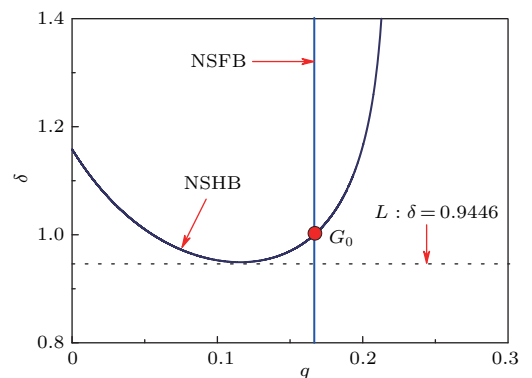


图2  $(q, \delta)$  平面上的非光滑分岔集

Fig. 2. The non-smooth bifurcation sets on the  $(q, \delta)$  plane.

取定参数  $\beta = 1.2, \gamma = 0.6, a = -3.0, b = 0.6, A = 3.0$ , 图 2 给出了  $(q, \delta)$  平面上的非光滑分岔图, 显然当  $\delta < 0.9446$  时, 随着  $q$  在  $[0, 1]$  之间变化, 广义 Jacobi 矩阵存在零特征值, 因此会产生余维-1 非光滑 fold 分岔, 而当  $\delta > 0.9446$  时, 不仅会存在零特征值, 也会存在一对纯虚根, 因此存在二次穿越现象, 导致余维-2 非光滑 fold-Hopf 分岔.

## 4 非光滑余维-1 周期簇发振荡

### 4.1 周期簇发振荡运动过程

由图 2 可知, 当  $\delta = 0.9$  时, 在分界面上仅会产生余维-1 非光滑 fold 分岔, 此时快子系统在三个不同区域中分别存在着三个不同的平衡点, 计算可知,  $E_0$  为不稳定鞍点, 其相应的特征值为  $\lambda_1 = 2.8476, \lambda_{2,3} = -0.3738 \pm 0.6551i$ ;  $E_{\pm}$  为稳定焦点, 其相应的特征值为  $\lambda_1 = -1.0651, \lambda_{2,3} = -0.0375 \pm 0.5503i$ . 图 3 给出了  $\delta = 0.9$  时系统在  $(y, v)$  和  $(u, v)$  平面上的相图.

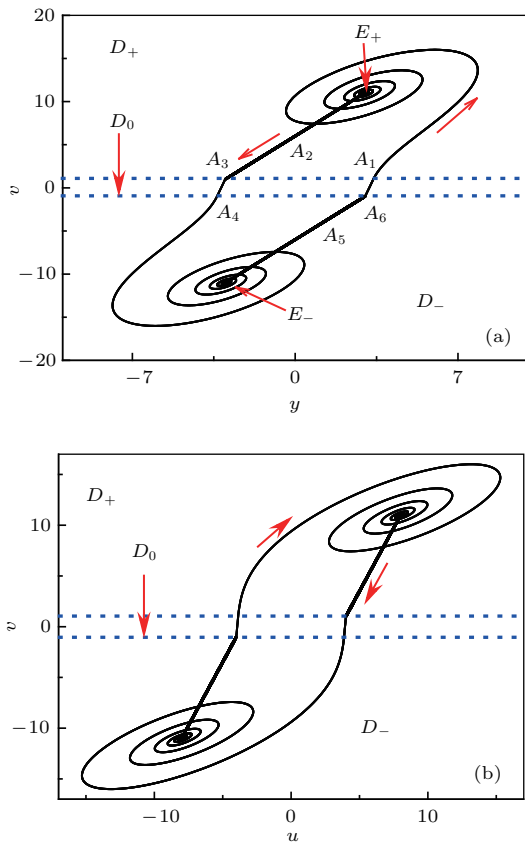


图 3  $\delta = 0.9$  时的相图 (a)  $(y, v)$  平面的相图; (b)  $(u, v)$  平面的相图  
 Fig. 3. Phase portraits for  $\delta = 0.9$ : (a) On the  $(y, v)$  plane; (b) on the  $(u, v)$  plane.

我们以  $(y, v)$  平面上的相图为例来说明轨迹的运动情况. 假设轨迹从非光滑分界面  $v = +1$  上的  $A_1$  点出发, 由于在  $D_+$  域内存在惟一的稳定焦点  $E_+$ , 此时轨迹将大致按照  $E_+$  的特性, 逐渐振荡趋于  $E_+$ . 在此过程中, 由于外激励是一个慢变过程, 因此系统轨迹主要由快子系统决定. 当轨迹逼近于  $E_+$  时, 由于  $E_+$  是稳定的焦点, 快子系统只会使得系统轨迹驻留在  $E_+$  点, 因此慢变的外激励的影响将会体现出来. 在外激励的作用下, 其相应的平衡点  $E_+$  的位置会发生变化, 大致沿着  $E_+A_3$  向分界面移动, 从而导致系统轨迹缓慢地由  $A_2$  点运动到  $A_3$  点. 当轨迹到达分界面上的  $A_3$  点, 由于在  $D_0$  域内存在惟一的不稳定鞍点, 在慢变外激励驱动下, 系统轨迹快速地穿越  $D_0$  域, 到达分界面  $v = -1$  上的  $A_4$  点, 并从  $A_4$  点出发, 逐渐振荡趋于  $D_-$  区域中惟一稳定的焦点  $E_-$ . 经过与  $D_+$  区域内相对称的过程, 抵达分界面  $v = -1$  上的  $A_6$  点, 并快速穿越区域  $D_0$ , 到达起始点  $A_1$ , 完成一个周期的簇发振荡.

### 4.2 周期簇发振荡的结构

为进一步说明周期簇发振荡的结构, 图 4 给出了其相应的时间历程.

从图 3 (a) 中可以看出, 在簇发振荡对称的半个周期内, 大致包含三个部分: 1) 从分界面上  $A_1$  点逐渐趋于  $E_+$  的逼近过程; 2) 从  $E_+$  附近向分界面上  $A_3$  点的运动过程; 3) 从  $A_3$  穿越区域  $D_0$  到  $A_4$  的过程. 其中第二过程占据了主要部分.

第一过程对应于从  $A_1$  到  $E_+$  的逼近过程 (见图 4 (c)), 振荡频率主要受  $E_+$  所对应的共轭复根的虚部的影响, 通过计算, 其振荡周期的理论值为  $T_S = 2\pi/0.5503 = 11.4177$ , 这与图 4 (c) 中的数值模拟值  $T_P = 11.4272$  相符合, 其振荡幅值的变化主要受该对共轭复根的实部影响, 其在  $v$  方向上的变化可以用曲线  $A_P$  来描述, 近似为  $V_P = V_{P0} \exp[-0.0375(t - t_{P0})]$ , 其中  $V_{P0}$  和  $t_{P0}$  分别对应于在  $A_1$  处围绕  $E_+$  振荡在方向上的幅值和时间. 从图 4 (c) 可以看出曲线  $A_P$  大致与从  $A_1$  点到  $E_+$  的振荡幅值符合, 因此, 按照振幅衰减到起始振幅的 1% 为标准, 从  $A_1$  点到  $E_+$  时间的理论值可以计算为  $T_1 = 122.80$ , 这与图 4 (c) 中的数值模拟值  $T_{P1} = 141.45$  也较为符合.

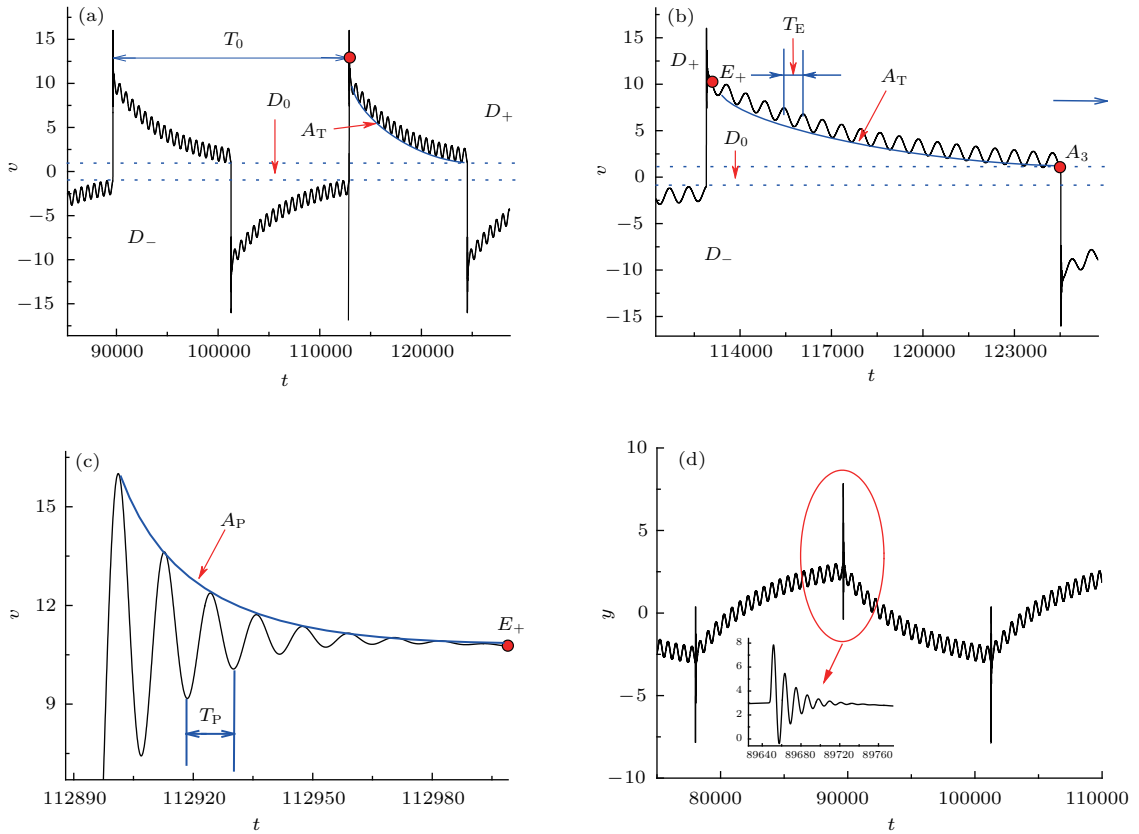


图4  $\delta = 0.9$ 时簇发振荡的时间历程图

Fig. 4. The time history of system for  $\delta = 0.9$ .

第二过程主要对应于随慢变量  $x$  的变化平衡点向分界面移动的过程, 由于受外激励的影响, 该过程从  $E_+$  振荡趋于  $A_3$  点, 其振荡周期为  $T_E = 2\pi/\Omega$ , 这与图 4(b) 中的数值模拟结果一致, 而振荡幅值主要受 (3) 式中的第一式所对应的特征值  $\lambda_T = 0.0001(-\beta - 1) = -0.00022$  的控制, 其在  $v$  方向上随时间的变化大致可以用曲线  $A_T$  来描述, 其相应的表达式为  $V_E = V_0 \exp[-0.00022(t - t_0)]$ , 其中  $v_0$  和  $t_0$  对应于轨迹在  $E_+$  处的  $v$  值及所对应的时间, 因此, 可以从理论上计算从  $E_+$  到  $A_3$  点的时间为  $T_2 = \ln(10.8761)/0.00022 = 10848.0$ .

第三过程对应于穿越区域  $D_0$  的过程, 由于时间非常短, 可以忽略不计, 通过计算可以得到簇发振荡周期的理论解为  $T_J = 2(10848.0 + 122.80) = 21941.6$ , 与数值模拟结果  $T_0 = 23140$  符合良好(见图 4(a)).

### 4.3 簇发振荡机理分析

为揭示该簇发振荡的机理, 在此采用包络分析法. 其主要思想是, 分别考察外激励项

$w = A \sin(\Omega t)$  在  $w = \pm A$  极值处的平衡态及其分岔模式, 并结合系统的相图, 得到不同簇发振荡的产生机理. 图 5 给出了在  $(x, v)$  平面上系统簇发振荡的相图与快子系统的包络平衡线的叠加图.

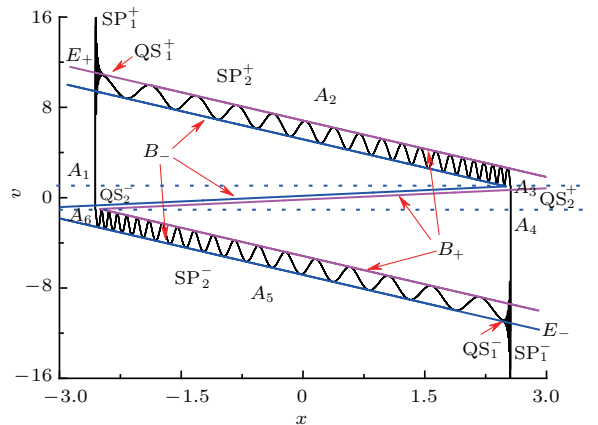


图5  $(x, v)$  平面上簇发振荡相图与快子系统  $(x, v)$  平衡曲线的叠加图

Fig. 5. The overlap diagram between the phase portrait and the equilibrium branches of the fast subsystem on the  $(x, v)$  plane.

图 5 中  $B_{\pm}$  分别对应于  $w = \pm A = \pm 0.5$  时三个不同区域的快子系统的平衡线. 假设系统轨迹从

分界面  $v = +1$  上的  $A_1$  点 (见图 3(a)) 出发, 轨迹受  $D_+$  区域内的系统控制, 逐渐趋于  $D_+$  区域内快子系统惟一稳定焦点  $E_+$ , 由于  $A_1$  点与  $E_+$  之间存在较大的距离, 使得逼近过程存在大幅振荡特性, 也即处于激发态  $SP_1^+$ , 并大致按照  $E_+$  的特性, 振幅逐渐减小, 振荡趋于  $E_+$ , 进入沉寂态  $QS_1^+$ . 虽然此时快子系统的轨迹将稳定于  $E_+$ , 但耦合系统的轨迹由于受第二个尺度也即慢变周期激励的影响, 将按照外激励周期做小幅周期振荡, 也即开始激发态  $SP_2^+$  振荡. 在该过程中, 由于整个外激励值在  $\pm A$  之间周期变化, 导致耦合系统在该阶段周期振荡的轨迹在分别取  $w = \pm A$  所得到的快子系统的两条平衡线之间来回变化, 并受两条平衡线的制约, 使得轨迹逐渐振荡趋于分界面  $v = +1$ .

当轨迹到达分界面  $v = +1$  上的  $A_3$  点时, 受平衡线的制约, 轨迹将穿越分界面, 而由于在  $D_0$  域内存在惟一的不稳定鞍点, 所以在慢变外激励驱动下, 系统轨迹快速地穿越  $D_0$  域, 到达分界面  $v = -1$  上的  $A_4$  点, 形成沉寂态  $QS_2^+$  并从  $A_4$  点出发, 逐渐振荡趋于  $D_-$  区域中惟一稳定的焦点  $E_-$ . 同样, 由于  $A_4$  点和  $E_-$  之间存在着较大的距离, 使得该逼近过程存在着较大幅值的振荡, 导致激发态  $SP_1^-$ . 由于慢变激励项  $w$  按照外激励频率  $\Omega$  在  $w = \pm A$  之间周期变化, 导致轨迹也按照频率  $\Omega$  在  $w = \pm A$  所对应的两条平衡线之间周期来回变化, 直至轨迹到达分界面  $v = -1$  上的  $A_6$  点, 并快速穿越区域  $D_0$ , 到达起始点  $A_1$ , 完成一个周期的簇发振荡.

需要指出的是, 由于  $D_0$  区域中不稳定鞍点所对应的实特征值较大, 使得轨迹会快速穿越  $D_0$  区域, 分别趋于  $D_{\pm}$  中的稳定焦点, 同时, 当轨迹抵达  $D_+$  或  $D_-$  区域中  $w = \pm A$  时快子系统的两条平衡线之间时, 振荡轨迹会在这两条平衡线之间来回周期振荡, 也即轨迹为  $w = \pm A$  时快子系统的两条平衡线包络.

## 5 结 论

对于周期激励下含两非光滑分界面的广义蔡氏电路, 选取适当的参数使得周期频率与系统频率之间存在量级差, 建立了一个含频域两时间尺度的四维分段线性系统. 通过对快子系统进行平衡点以及非光滑分岔分析可知, 在具体参数下, 当系统轨

迹穿越非光滑分界面时, 会产生余维 -1 非常规 fold 分岔, 从而导致了簇发振荡现象的产生. 这与光滑系统中的簇发振荡现象不同, 光滑系统中轨迹是在系统同时存在的不同稳定平衡点之间跳跃, 而在该非光滑系统中, 轨迹是在不同区域中惟一的平衡点之间的跳跃, 从而揭示了非光滑因素下非常规 fold 分岔对系统簇发振荡行为的影响机理. 本文仅探讨了非光滑系统中的余维 -1 非常规 fold 分岔导致的簇发振荡, 对于系统的更复杂的簇发振荡还有待进一步研究.

## 参考文献

- [1] Siefert A, Henkel F O 2014 *Nucl. Eng. Des.* **269** 130
- [2] Duan C, Singh R 2005 *J. Sound Vib.* **285** 1223
- [3] Zhusubaliyev Z H, Mosekilde E 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2237
- [4] Jiang H B, Li T, Zeng X L, Zhang L P 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 120508 (in Chinese) [姜海波, 李涛, 曾小亮, 张丽萍 2013 物理学报 **62** 120508]
- [5] Galvenetto U 2001 *J. Sound Vib.* **248** 653
- [6] Carmona V, Fernández-García S, Freire E 2012 *Physica D* **241** 623
- [7] Dercole F, Gagnani A, Rinaldi S 2007 *Theor. Popul. Biol.* **72** 197
- [8] Zhusubaliyev Z T, Mosekilde E 2008 *Physica D* **237** 930
- [9] Rene O, Baptista M S, Caldas I L 2003 *Physica D* **186** 133
- [10] Shaw S W, Holmes P A 1983 *J. Sound Vib.* **90** 129
- [11] Nordmark A, Dankowicz H, Champneys A 2009 *Int. J. Non-Linear Mech.* **44** 1011
- [12] Hu H Y 1995 *Chaos, Solitons Fractals* **5** 2201
- [13] Xu H D 2008 *Ph. D. Dissertation* (Sichuan: Southwest Jiaotong University) (in Chinese) [徐慧东 2008 博士学位论文 (四川: 西南交通大学)]
- [14] Lu Q S, Jin L 2005 *Acta Mech. Sol. Sin.* **26** 132 (in Chinese) [陆启韶, 金俐 2005 固体力学学报 **26** 132]
- [15] Jiang H B, Zhang L P, Chen Z Y, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 080505 (in Chinese) [姜海波, 张丽萍, 陈章耀, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 080505]
- [16] Stavrinos S G, Deliolanis N C 2008 *Chaos, Solitons Fractals* **36** 1055
- [17] Leine R I 2006 *Physica D* **223** 121
- [18] Jia Z, Leimkuhler B 2003 *Future Gener. Comp. Syst.* **19** 415
- [19] Leimkuhler B 2002 *Appl. Numer. Math.* **43** 175
- [20] Gyorgy L, Field R J 1992 *Nature* **355** 808
- [21] Duan L X, Lu Q S, Wang Q Y 2008 *Neurocomputing* **72** 341
- [22] Hodgkin A L, Huxley A F 1952 *J. Physiol.* **117** 500
- [23] Izhikevich E M 2000 *Int. J. Bifurcation Chaos* **6** 1171
- [24] Chua L O, Lin G N 1990 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **37** 885
- [25] Mkaouar H, Boubaker O 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** 1292
- [26] Kahan S, Sicardi-Schifino A C 1999 *Physica A* **262** 144

# Bursting oscillations as well as the mechanism with codimension-1 non-smooth bifurcation\*

Zhang Zheng-Di Liu Yang Zhang Su-Zhen Bi Qin-Sheng<sup>†</sup>

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

( Received 15 August 2016; revised manuscript received 2 November 2016 )

## Abstract

The coupling of different scales in nonlinear systems may lead to some special dynamical phenomena, which always behaves in the combination between large-amplitude oscillations and small-amplitude oscillations, namely bursting oscillations. Up to now, most of the relevant reports have focused on the smooth dynamical systems. However, the coupling of different scales in non-smooth systems may lead to more complicated forms of bursting oscillations because of the existences of different types of non-conventional bifurcations in non-smooth systems. The main purpose of the paper is to explore the coupling effects of multiple scales in non-smooth dynamical systems with non-conventional bifurcations which may occur at the non-smooth boundaries. According to the typical generalized Chua's electrical circuit which contains two non-smooth boundaries, we establish a four-dimensional piecewise-linear dynamical model with different scales in frequency domain. In the model, we introduce a periodically changed current source as well as a capacity for controlling. We select suitable parameter values such that an order gap exists between the exciting frequency and the natural frequency. The state space is divided into several regions in which different types of equilibrium points of the fast sub-system can be observed. By employing the generalized Clarke derivative, different forms of non-smooth bifurcations as well as the conditions are derived when the trajectory passes across the non-smooth boundaries. The case of codimension-1 non-conventional bifurcation is taken for example to investigate the effects of multiple scales on the dynamics of the system. Periodic bursting oscillations can be observed in which codimension-1 bifurcation causes the transitions between the quiescent states and the spiking states. The structure analysis of the attractor points out that the trajectory can be divided into three segments located in different regions. The theoretical period of the movement as well as the amplitudes of the spiking oscillations is derived accordingly, which agrees well with the numerical result. Based on the envelope analysis, the mechanism of the bursting oscillations is presented, which reveals the characteristics of the quiescent states and the repetitive spiking oscillations. Furthermore, unlike the fold bifurcations which may lead to jumping phenomena between two different equilibrium points of the system, the non-smooth fold bifurcation may cause the jumping phenomenon between two equilibrium points located in two regions divided by the non-smooth boundaries. When the trajectory of the system passes across the non-smooth boundaries, non-smooth fold bifurcations may cause the system to tend to different equilibrium points, corresponding to the transitions between quiescent states and spiking states, which may lead to the bursting oscillations.

**Keywords:** non-smooth circuit system, multiple scales, bursting oscillations, non-conventional bifurcation

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.66.020501

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11472115, 11472116) and the Qinglan Project of Jiangsu Province, China.

† Corresponding author. E-mail: [qbi@ujs.edu.cn](mailto:qbi@ujs.edu.cn).