

三维边界层内诱导横流失稳模态的感受性机理

陆昌根 朱晓清 沈露予

Receptivity mechanism of cross-flow instability modes induced in three-dimensional boundary layer

Lu Chang-Gen Zhu Xiao-Qing Shen Lu-Yu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 204702 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.204702

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.204702>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I20>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

瑞利-泰勒不稳定问题的光滑粒子法模拟研究

Numerical study of Rayleigh-Taylor instability by using smoothed particle hydrodynamics

物理学报.2017, 66(16): 164701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.164701>

无限薄平板边界层前缘感受性过程的数值研究

Numerical study of leading-edge receptivity on the infinite-thin flat-plate boundary layer

物理学报.2016, 65(19): 194701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.194701>

三维边界层内定常横流涡的感受性研究

Receptivity of the steady cross-flow vortices in three-dimensional boundary layer

物理学报.2017, 66(1): 014703 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.014703>

壁面局部吹吸边界层感受性的数值研究

Numerical study on boundary-layer receptivity with localized wall blowing/suction

物理学报.2015, 64(22): 224702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.224702>

界面张力对 Rayleigh-Taylor 不稳定性的影响

Effects of surface tension on Rayleigh-Taylor instability

物理学报.2013, 62(21): 214702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.214702>

# 三维边界层内诱导横流失稳模态的感受性机理\*

陆昌根<sup>†</sup> 朱晓清 沈露予<sup>‡</sup>

(南京信息工程大学海洋科学学院, 南京 210044)

(2017年3月3日收到; 2017年6月6日收到修改稿)

边界层感受性问题是层流向湍流转捩的初始阶段, 在转捩过程中起关键性作用, 尤其是三维边界层流动. 因此, 研究三维边界层感受性问题对进一步理解层流向湍流转捩机理以及湍流成因具有重要的理论意义. 采用数值方法研究自由来流湍流与三维壁面局部粗糙相互作用下三维边界层的感受性问题, 确定是否能在三维边界层内寻找一种新的横流失稳模态; 确定在何种条件下三维边界层内能诱导出定常、非定常的横流失稳模态; 探索自由来流湍流的强度、展向波数和法向波数以及三维壁面局部粗糙的大小和结构类型等因素在自由来流湍流与三维壁面局部粗糙作用下三维边界层内被激发出的感受性过程中有何影响, 并确定何种横流失稳模态在三维边界层感受性过程中占据何种地位. 对自由来流湍流与三维壁面局部粗糙作用激发三维边界层内感受性问题的深入研究, 将有助于完善流动稳定性与湍流理论, 为层流向湍流转捩过程的预测与控制提供合理的理论依据.

**关键词:** 感受性, 三维边界层, 壁面局部粗糙, 自由来流湍流

**PACS:** 47.20.Pc, 47.20.-k, 47.27.ek

**DOI:** 10.7498/aps.66.204702

## 1 引言

层流向湍流转捩的物理机理相当复杂, 而边界层感受性问题是转捩过程的初始阶段, 决定着层流向湍流转捩的物理过程<sup>[1]</sup>. 早期感受性问题的研究主要集中在二维边界层流动, 三维边界层感受性问题的研究相对较少, 研究三维边界层感受性问题具有重要的理论价值和广泛的应用前景<sup>[2]</sup>.

后掠平板边界层流动是一种典型的三维边界层流. 在低湍流度环境下, 转捩过程主要由定常横流涡(SCF)主导; 反之, 在高湍流度环境下, 转捩过程主要由非定常横流涡(UCF)主导<sup>[3]</sup>. 早期, Bippes和Nitschke-Kowsky<sup>[4]</sup>通过实验证实后掠翼边界层内定常横流失稳模态是由壁面局部粗糙激发的, 而自由来流中的小扰动影响较小. Radeztsky等<sup>[5]</sup>实验发现, 后掠翼边界层内的转捩

只对三维局部粗糙敏感, 对二维局部粗糙不敏感. 随后, Radeztsky等<sup>[6]</sup>实验研究圆形粗糙的半径和高度对三维边界层感受性和转捩过程的影响时发现, 当圆形粗糙半径大于横流涡波长的8%时, 粗糙高度( $\leq 6 \mu\text{m}$ )的变化对三维边界层转捩过程的影响可以忽略不计. Deyhle和Bippes<sup>[7]</sup>通过实验发现, 线性理论无法正确预测三维边界层内被激发产生横流涡的非线性演化过程, 且线性理论预测增长率要大于实验值的局限. Reibert等<sup>[8,9]</sup>通过实验发现, 三维边界层内被激发出的横流涡波长与粗糙单元之间的间距密切相关; 当粗糙单元间距为12 mm时, 可激发出波长为12, 6, 4, 3 mm的横流涡, 但不能激发出波长为24 mm的横流涡. Fedorov<sup>[10]</sup>和Manuilovich<sup>[11]</sup>通过理论研究证实壁面粗糙能激发三维边界层内产生定常横流涡; 随后, Crouch<sup>[12]</sup>和Choudhari<sup>[13]</sup>分别采用扰动法和非渐进理论研究壁面局部粗糙作用在Falkner-

\* 国家自然科学基金(批准号: 11472139)、江苏高校优势学科建设工程(批准号: PAPD)和南京信息工程大学人才启动基金(批准号: 2016r046)资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: cglu@nuist.edu.cn

<sup>‡</sup> 通信作者. E-mail: shenluyu@nuist.edu.cn

Skan-Cooke 边界层内诱导出定常横流涡的感受性过程. Ng 和 Crouch<sup>[14]</sup> 基于线性理论的有限雷诺数法, 计算获得定常横流涡的感受性系数与实验值符合的结论; 但是, 当粗糙单元高度大于等于 48 μm 时, 计算结果大于实验结果. 最近, Kurz 和 Kloker<sup>[15]</sup> 直接进行数值模拟发现, 当壁面粗糙高度小于当地边界层厚度的 15% 时, 三维边界层内被激发出的感受性强度与壁面粗糙高度呈线性关系; 我们在这方面做了相关的工作<sup>[16]</sup>.

在高湍流度环境下, 转捩过程由非定常横流涡主导. Schrader 等<sup>[17,18]</sup> 采用直接数值模拟方法, 研究在自由来流涡扰动作用下边界层内被激发出非定常横流涡的感受性过程. Tempelmann 等<sup>[19,20]</sup> 通过直接数值模拟方法和抛物化稳定方程的方法, 求解线性不可压 Navier-Stokes 方程, 发现在光滑后掠翼边界层内有非定常横流失稳模态存在. Borodulin 等<sup>[21]</sup> 实验发现, 自由来流涡扰动和局部粗糙作用诱导三维边界层内感受出非定常横流失稳模态.

综上所述, 三维边界层感受性问题的研究, 大多数集中在三维边界层内被诱导定常横流或非定常横流失稳模态的研究. 同时, 考虑自由来流湍流与三维壁面局部粗糙相互作用激发三维边界层感受性过程的理论机理相关报道十分少见. 该问题的深入研究, 将为三维边界层转捩过程的预测与控制提供合理的理论依据.

## 2 数值方法

### 2.1 控制方程及数值方法

选用边界层出口位移厚度  $\delta^*$ 、无穷远速度  $U_\infty$  以及密度  $\rho$  为特征量, 将不可压 Navier-Stokes 方程无量纲化, 获得无量纲的 Navier-Stokes 方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V}, \end{cases} \quad (1)$$

式中速度  $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{V}' = [u, v, w]^T$  为扰动速度,  $\mathbf{U}$  为基本流的数值解;  $p$  为压力; 雷诺数  $Re = U_\infty \delta^* / \nu$ ,  $\nu$  为运动黏性系数. 对于控制方程 (1) 式的数值离散为: 时间偏导数采用四阶修正后的 Runge-Kutta 格式; 空间偏导数采用变间距的紧致有限差分格式, 即对流项采用五阶精度迎风紧致有限差分, 压力梯度项采用六阶精度紧致有限差

分, 黏性项采用五阶精度紧致有限差分; 展向偏导数采用傅里叶级数展开且压力泊松方程采用三阶精度变间距有限差分离散, 具体参见文献<sup>[22]</sup>.

### 2.2 自由来流湍流模型

在满足连续性方程的基础上, 考虑到自由来流湍流的随机性, 构建一组傅里叶级数谱来模拟三维自由来流湍流模型<sup>[23]</sup>, 其数学表达式为

$$\mathbf{u}_\infty = \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \\ w_\infty \end{pmatrix} = \varepsilon \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \sum_{j=-J}^J \begin{pmatrix} \hat{u}_\infty \\ \hat{v}_\infty \\ \hat{w}_\infty \end{pmatrix} \times \exp [I (m\kappa_1 x + j\kappa_2 y + n\kappa_3 z - m\kappa_1 t)], \quad (2)$$

式中

$$\begin{cases} \hat{u}_\infty = I \frac{m\kappa_1 j\kappa_2}{\kappa \sqrt{m^2\kappa_1^2 + n^2\kappa_3^2}} \cdot \sqrt{\frac{2E(\kappa) \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}{4\pi\kappa^2}} \cdot \exp(I\sigma), \\ \hat{v}_\infty = -I \frac{\sqrt{m^2\kappa_1^2 + n^2\kappa_3^2}}{\kappa} \cdot \sqrt{\frac{2E(\kappa) \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}{4\pi\kappa^2}} \cdot \exp(I\sigma), \\ \hat{w}_\infty = I \frac{j\kappa_2 n\kappa_3}{\sqrt{m^2\kappa_1^2 + n^2\kappa_3^2}} \cdot \sqrt{\frac{2E(\kappa) \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}{4\pi\kappa^2}} \cdot \exp(I\sigma), \end{cases}$$

$I = \sqrt{-1}$ ;  $u_\infty$ ,  $v_\infty$  和  $w_\infty$  分别表示自由来流湍流的流向、法向和展向扰动速度, 且  $\hat{u}_\infty$ ,  $\hat{v}_\infty$  和  $\hat{w}_\infty$  分别代表  $u_\infty$ ,  $v_\infty$  和  $w_\infty$  扰动速度谱;  $\varepsilon$  为自由来流湍流幅值;  $M$ ,  $J$  和  $N$  为选定的最大模数;  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  和  $\kappa_3$  分别为  $x$ ,  $y$  和  $z$  向的基本波数;  $\kappa = (m^2\kappa_1^2 + j^2\kappa_2^2 + n^2\kappa_3^2)^{1/2} = (\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2)^{1/2}$ , 且流向、法向和展向波数为  $\alpha = m\kappa_1$ ,  $\gamma = j\kappa_2$  和  $\beta = n\kappa_3$ .  $\hat{u}_\infty$ ,  $\hat{v}_\infty$  和  $\hat{w}_\infty$  与一维能量谱  $E(\kappa)$  及相位角  $\sigma$  有关.

### 2.3 计算区域和边界条件

图 1 为计算区域, 流向、法向和展向区域为  $x \in [-200, 500]$ ,  $y \in [0, 14.39]$  和  $z \in [-Z/2, Z/2]$ , 且  $Z = 2\pi/\kappa_3$ ; 法向高度  $Y$  选取五倍边界层厚度  $\delta$ , 即  $5\delta/\delta^* = 5 \times 2.877 \approx 14.39$  ( $\delta = 2.877\delta^*$ ); 平板前缘流向位置为  $x = 0$ ; 后掠角  $\Phi_{BS}$  为来流速度  $U_\infty$  的方向与  $x$  轴向之间的夹角; 后掠角度为  $45^\circ$ ; 计算网格数为  $600 \times 200 \times 32$ ; 雷诺数  $Re = 1000$ .

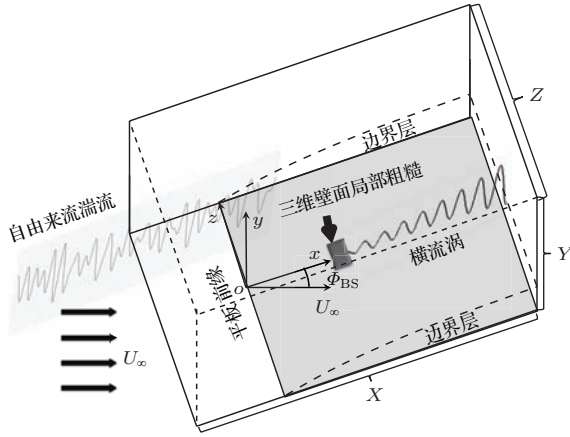


图1 计算区域示意图

Fig. 1. The computational domain.

入流条件: 扰动速度由自由来流湍流模型 ((2) 式) 给出;  $\partial p / \partial x = 0$ .

上边界条件: 扰动速度依据自由来流湍流模型 ((2) 式) 确定;  $p = 0$ .

下边界条件: 当  $x \geq 0, y = 0$  时, 无滑移条件为  $u(x, 0) = v(x, 0) = w(x, 0) = 0, \partial p / \partial y = 0$ ;  $x < 0$  和  $y = 0$  时无滑移条件为前缘驻点上游,  $\partial u / \partial y = \partial v / \partial y = \partial w / \partial y = \partial p / \partial y = 0$ . 根据文献 [19], 在平板上设计展向具有周期性变化的三维局部粗糙, 且采用线性化的处理方法将三维局部粗糙等效为平板局部区域上的扰动速度 [17,18,24], 其表达式为

$$\begin{cases} u(x_w, 0, z_w) = -h \cdot U'(0) \sin(\beta_R z_w), \\ w(x_w, 0, z_w) = -h \cdot W'(0) \sin(\beta_R z_w), \end{cases} \quad (3)$$

式中三维局部粗糙的展向分布为正弦函数,  $h$  为三维局部粗糙的高度,  $\beta_R$  为波数;  $x_w \in [x_1, x_2]$  和  $z_w \in [-Z/2, Z/2]$  分别为三维局部粗糙在平板壁面上的流向和展向方向的分布区域, 其流向长度  $L = x_2 - x_1$ ;  $U'(0)$  和  $W'(0)$  为基本流在壁面上的  $y$  方向导数值.

出流条件:  $\partial p / \partial x = 0$ ; 扰动速度采用无反射条件.

展向采用周期性边界条件.

### 3 数值结果与分析

#### 3.1 三维边界层感受性问题

首先, 数值研究自由来流湍流与三维局部粗糙相互作用激发三维边界层感受性过程的机理; 并通过快速傅里叶分析在三维边界层内提取获得小

扰动波, 详细分析小扰动波的色散关系、增长率以及相速度等特性. 为方便比较, 将边界层外缘计算区域范围内自由来流湍流的稳定扰动幅值  $A_{FST}$  定义为

$$A_{FST} = \sqrt{u_{FST}^2 + v_{FST}^2 + w_{FST}^2}, \quad (4)$$

式中  $u_{FST}^2, v_{FST}^2$  和  $w_{FST}^2$  代表  $x, y$  和  $z$  向上自由来流湍流扰动速度平方的时均值. 无量纲频率定义为  $F = 10^6 \times 2\pi f\nu / U_\infty$ . 为便于与文献 [16, 25] 比较, 选取自由来流湍流的流向基本波数  $\kappa_1 = 0.025$ , 最大模数  $M = 8$ , 强度  $A_{FST} = 0.1\%$ ; 展向基本波数  $\kappa_3 = 0.050$ , 模数  $N = 1$ , 则展向波数  $\beta_{FST} = 0.050$ ; 三维局部粗糙的高度、流向长度和展向宽度分别为  $h = 0.004, L = 12$  和  $Z = 2\pi / \kappa_3$ , 且流向长度和展向宽度分别占据的分布区域为  $x_w \in [18, 30]$  和  $z_w \in [-Z/2, Z/2]$ .

通过展向快速傅里叶分析方法, 可从三维边界层内提取获得被激发产生三种不同性质的小扰动波. 第一种是定常小扰动波, 其展向波数等于  $\beta_R$ ; 该结果与文献 [16] 的结果符合, 且最大误差约为  $10^{-4}$ , 具体验证过程与文献 [16] 相同, 此处省略描述; 由此可知, 由自由来流湍流与三维局部粗糙作用激发三维边界层内诱导出的这种定常小扰动波就是定常横流涡. 第二种是非定常小扰动波的波包结构, 其展向波数等于  $\beta_{FST}$ ; 该结果与文献 [25] 的结果符合, 且最大误差约为  $10^{-4}$ , 具体验证过程与文献 [25] 相同, 此处省略描述; 同样可证, 由自由来流湍流与三维局部粗糙作用激发三维边界层内诱导出的非定常小扰动波的波包结构是非定常横流涡的波包结构. 第三种是在三维边界层内发现了一种新的非定常小扰动波的波包结构, 可证明它是一种新的非定常横流涡的波包结构, 具体验证过程如下.

在选取两种不同类型三维壁面局部粗糙 (即展向正弦分布的三维壁面局部粗糙的波数  $\beta_R$  分别选为 0.200 和 0.100) 的情况下, 采用展向傅里叶分析的方法, 在自由来流湍流与三维局部粗糙作用下的三维边界层内发现了一种新的非定常小扰动波波包, 这种新的非定常小扰动波波包向下游传播的方向  $S$  与  $x$  向之间的夹角与第一种定常横流涡和第二种非定常横流涡正负展向波数的线性组合的大小密切相关. 当展向波数组合分别为  $\beta_{CF} = \beta_{FST} + \beta_R = 0.250$  ( $\beta_{FST} = 0.050, \beta_R = 0.200$ ),  $\beta_{CF} = \beta_{FST} + \beta_R = 0.150$  ( $\beta_{FST} = 0.050, \beta_R =$

0.100) 及  $\beta_{CF} = \beta_{FST} - \beta_R = -0.150$  时, 三维边界层内被激发出新的非定常小扰动波的波包传播方向  $S$  与  $x$  向之间的夹角以及波包传播的群速度分别为  $45.57^\circ$ ,  $26.15^\circ$  和  $-15.07^\circ$  (逆时针旋转为正方向) 以及  $0.4136$ ,  $0.3943$  和  $0.3420$ , 详细结果如图 2 所示. 波包的展向波数  $\beta_{CF}$  满足

$$\beta_{CF} = \pm\beta_{FST} \pm \beta_R. \quad (5)$$

若选取其他不同展向波数的自由来流湍流和其他不同展向分布正弦函数的波数  $\beta_R$  的三维壁面局部粗糙类型, 并仿照上述研究过程可获得与 (5) 式相同的结论.

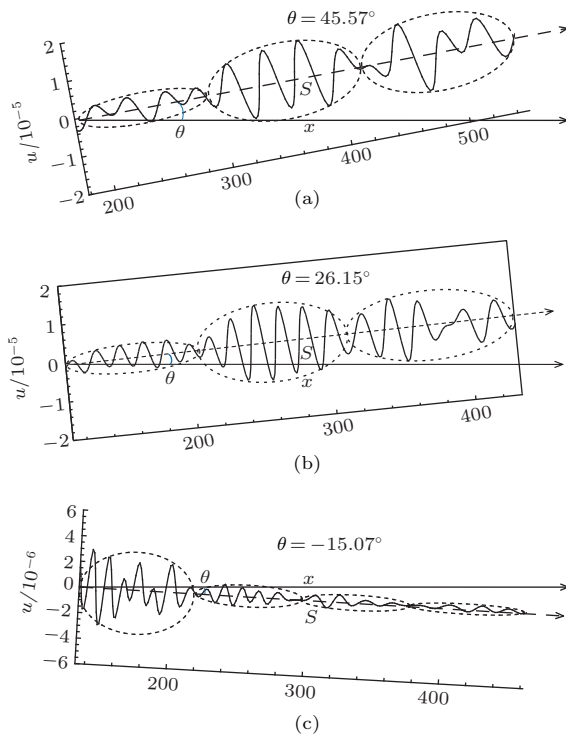


图 2 三维边界层内被感受出的一组新的非定常小扰动波波包的演化 ( $y = 0.66, z = 0$ ): (a)  $\beta_{FST} = 0.050, \beta_R = 0.200, \beta_{CF} = \beta_{FST} + \beta_R = 0.250$ ; (b)  $\beta_{FST} = 0.050, \beta_R = 0.100, \beta_{CF} = \beta_{FST} + \beta_R = 0.150$ ; (c)  $\beta_{FST} = 0.050, \beta_R = 0.200, \beta_{CF} = \beta_{FST} - \beta_R = -0.150$

Fig. 2. The evolution of the new unsteady perturbation wave packets in the three-dimensional boundary layer ( $y = 0.66, z = 0$ ): (a)  $\beta_{FST} = 0.050, \beta_R = 0.200, \beta_{CF} = \beta_{FST} + \beta_R = 0.250$ ; (b)  $\beta_{FST} = 0.050, \beta_R = 0.100, \beta_{CF} = \beta_{FST} + \beta_R = 0.150$ ; (c)  $\beta_{FST} = 0.050, \beta_R = 0.200, \beta_{CF} = \beta_{FST} - \beta_R = -0.150$ .

随后, 采用展向和时间傅里叶分析的方法, 可从三维边界层内被激发出的初始小扰动速度场中提取获得新的非定常小扰动波沿  $x$  方向的流向扰动速度的演化规律, 如图 3 所示. 由图 3 可知, 自由来流湍流与三维局部粗糙作用激发三维边界层

内产生新的小扰动波既包含不稳定波 (图 3(a) 和图 3(b)), 也包含稳定波 (图 3(c)), 这一结论也与 Schrader 等<sup>[17]</sup> 的结果一致. 在图 3 数值结果的基础上, 依据文献 [25] 中计算小扰动波色散关系和相速度的数值方法, 获得三维边界层内被激发出的新的非定常小扰动波的色散关系和相速度以及线性理论解, 如表 1 所示. 比较表 1 发现, 三维边界层内被诱导形成的新的非定常小扰动波的展向波数完全符合 (5) 式中的关系, 其色散关系和相速度与线性理论解完全符合; 其他频率情况下的结论与最具有代表性的频率为 125 时的情况相类似. 同理, 可计算得到其他不同展向波数的自由来流湍流和不同展向分布类型的三维壁面局部粗糙作用激发三维边界层内诱导出新小扰动波的色散关系和相速度, 与线性理论解进行比较发现结果也是一致的, 此处不再赘述.

表 1 自由来流湍流和三维壁面局部粗糙的展向波数, 以及激发出的一组新的非定常小扰动波的展向波数  $\beta_{CF}$ 、流向波数  $\alpha_{CF}$  和相速度  $C$ , 并与线性理论解 (LST) 进行比较 ( $F = 125$ )

Table 1. The spanwise wave numbers of the free-stream turbulence and three-dimensional roughness, the spanwise wave numbers  $\beta_{CF}$ , streamwise wave numbers  $\alpha_{CF}$ , and the phase speed  $C$  of the new excited unsteady perturbation waves compared with the linear stability theory (LST) solutions ( $F = 125$ ).

		$\beta_{FST} = 0.0250, \beta_R = 0.2000$			
	$\beta_{CF}$	0.1750	0.2250	-0.1750	-0.2250
$\alpha_{CF}$	DNS	0.1956	0.1427	0.4692	0.5093
	LST	0.1953	0.1428	0.4696	0.5094
$C$	DNS	0.4763	0.4692	0.2496	0.2245
	LST	0.4767	0.4691	0.2494	0.2245
		$\beta_{FST} = 0.0500, \beta_R = 0.2000$			
	$\beta_{CF}$	0.1500	0.2500	-0.1500	-0.2500
$\alpha_{CF}$	DNS	0.2191	0.1139	0.4503	0.5293
	LST	0.2189	0.1137	0.4502	0.5297
$C$	DNS	0.4708	0.4550	0.2634	0.2135
	LST	0.4711	0.4551	0.2634	0.2134
		$\beta_{FST} = 0.0500, \beta_R = 0.1000$			
	$\beta_{CF}$	0.0500	0.1500	-0.0500	-0.1500
$\alpha_{CF}$	DNS	0.3013	0.2195	0.3740	0.4505
	LST	0.3010	0.2189	0.3749	0.4502
$C$	DNS	0.4093	0.4701	0.3312	0.2633
	LST	0.4097	0.4711	0.3305	0.2634

依据图3的数值结果计算获得幅值和增长率沿 $x$ 方向的演变规律, 并与理论解比较发现, 数值结果与理论结果一致, 如图4所示.

最后, 选取色散关系为 $\beta_{CF} = 0.2500$ ,  $\alpha_{CF} = 0.1139$ 的小扰动波, 将其幅值和相位沿法向的演变与线性理论解进行比较, 发现结果也是重合的, 如图5所示. 由此证明, 由自由来流湍流与三维壁面局部粗糙作用激发三维边界层内诱导出的新的非定常小扰动波波包结构就是新的非定常横流涡的

波包结构.

综上所述, 由自由来流湍流与三维壁面局部粗糙相互作用激发三维边界层内诱导出三种初始失稳模态, 即定常横流涡、非定常横流涡的波包结构以及展向波数满足(5)式的新的非定常横流涡的波包结构, 这说明自由来流湍流与三维壁面局部粗糙相互作用是激发三维边界层感受性过程的一种新物理机理.

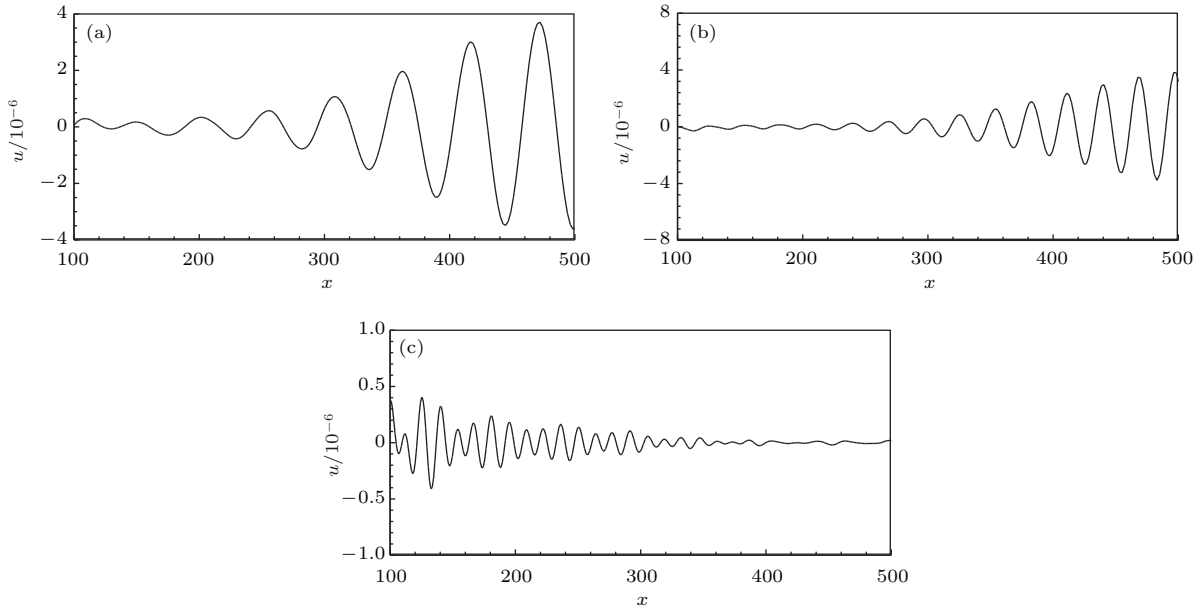


图3 三维边界层内被感受出的一组新的非定常小扰动波沿流向的演化 ( $F = 125$ ): (a)  $\beta_{FST} = 0.050$ ,  $\beta_R = 0.200$ ,  $\beta_{CF} = \beta_{FST} + \beta_R = 0.250$ ; (b)  $\beta_{FST} = 0.050$ ,  $\beta_R = 0.100$ ,  $\beta_{CF} = \beta_{FST} + \beta_R = 0.150$ ; (c)  $\beta_{FST} = 0.050$ ,  $\beta_R = 0.200$ ,  $\beta_{CF} = \beta_{FST} - \beta_R = -0.150$

Fig. 3. The streamwise evolution of the new unsteady perturbation waves in the three-dimensional boundary layer ( $F = 125$ ): (a)  $\beta_{FST} = 0.050$ ,  $\beta_R = 0.200$ ,  $\beta_{CF} = \beta_{FST} + \beta_R = 0.250$ ; (b)  $\beta_{FST} = 0.050$ ,  $\beta_R = 0.100$ ,  $\beta_{CF} = \beta_{FST} + \beta_R = 0.150$ ; (c)  $\beta_{FST} = 0.050$ ,  $\beta_R = 0.200$ ,  $\beta_{CF} = \beta_{FST} - \beta_R = -0.150$ .

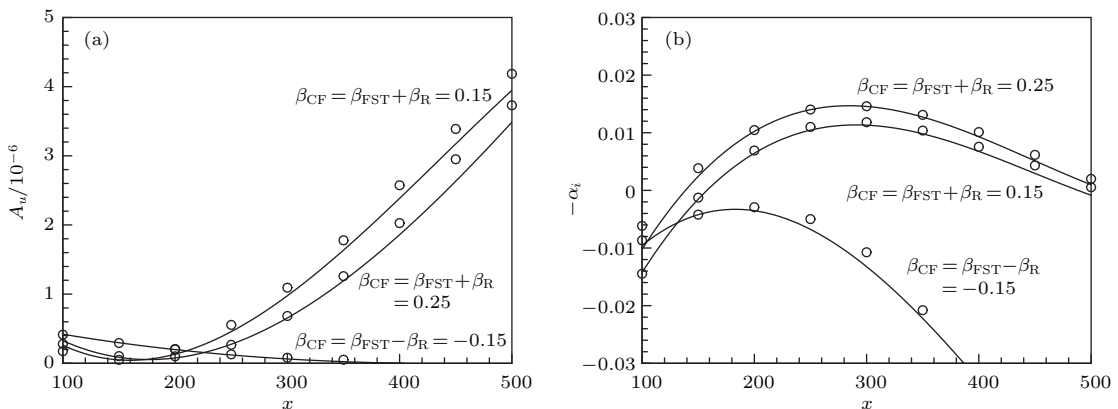


图4 三维边界层内激发出的新的非定常小扰动波的幅值和增长率沿 $x$ 方向演变的数值结果与 (a)  $e^N$  法结果和 (b) 线性理论解的比较

Fig. 4. The numerical results of  $x$ -direction evolutions of the amplitudes and growth rates of the new excited unsteady perturbation waves in the three-dimensional boundary layer compared with (a) the  $e^N$  method results and (b) the linear stability theory results.

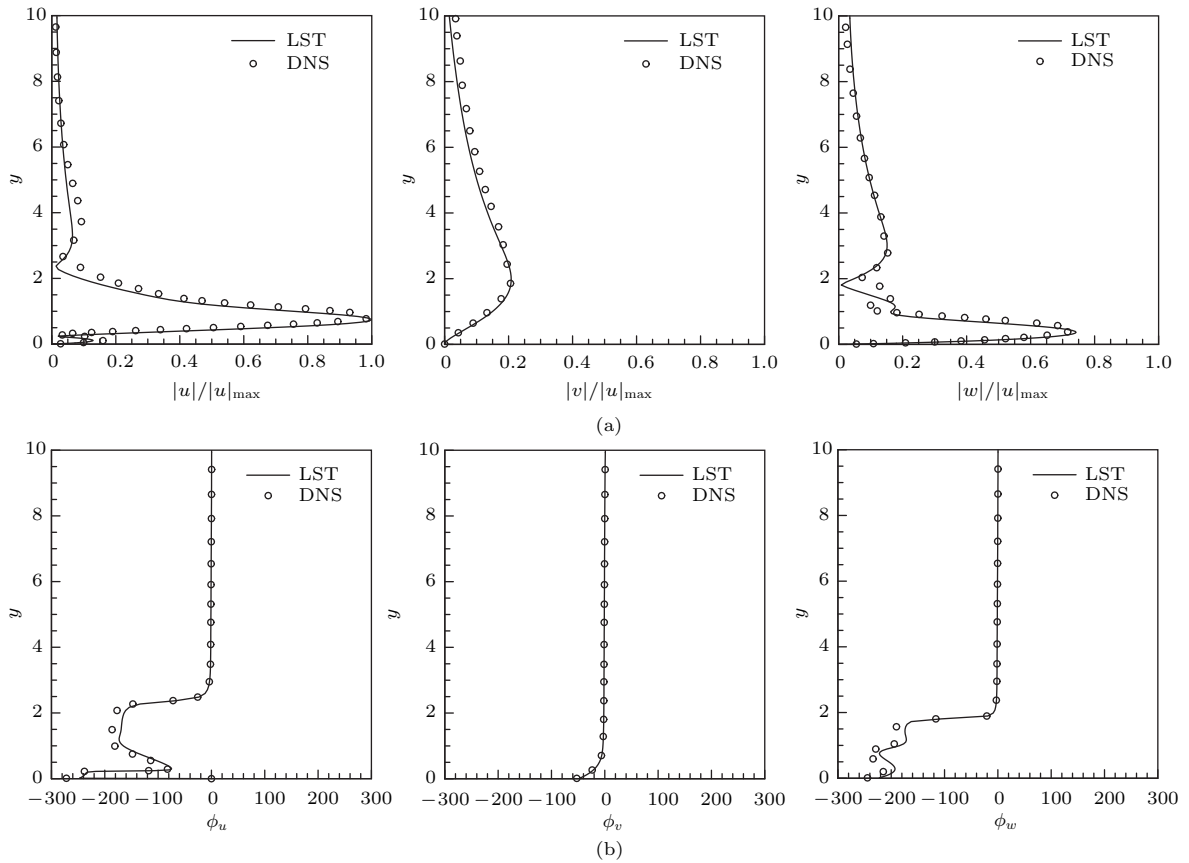


图5 三维边界层内被激发出的小扰动波的(a)幅值和(b)相位的法向分布与线性理论解的比较

Fig. 5. The normal distributions of (a) the amplitudes and (b) phases of the excited perturbation waves in the three-dimensional boundary layer compared with theoretical solutions.

### 3.2 三维边界层感受性与自由来流湍流强度、展向波数和法向波数之间的关系

分别改变自由来流湍流强度、展向波数和法向波数, 研究自由来流湍流与三维局部粗糙相互作用下三维边界层内被感受出的定常横流涡与非定常横流涡波包之间的关系. 为方便比较, 将自由来流湍流与三维局部粗糙相互作用下三维边界层内被激发出横流涡的幅值定义为  $A_{CF}$ , 其表达式为

$$A_{CF} = \sqrt{u_{CF}^2 + v_{CF}^2 + w_{CF}^2}, \quad (6)$$

式中  $\overline{u_{CF}^2}$ ,  $\overline{v_{CF}^2}$  和  $\overline{w_{CF}^2}$  代表  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向上三维边界层内三维局部粗糙处被激发出定常横流涡与非定常横流涡波包的扰动速度平方的时均值. 选取自由来流湍流基本波数  $\kappa_1 = 0.025$ , 最大模数  $M = 8$ , 展向波数  $\beta_{FST} = 0.025$ ; 三维局部粗糙的高度为  $h = 0.004$ ,  $\beta_R = 0.200$ , 流向长度  $L = 12$ , 展向宽度  $Z = 2\pi/\kappa_3$  (展向基本波数  $\kappa_3 = 0.050$ ).

当三维壁面局部粗糙的高度  $h$  分别为 0.004, 0.006, 0.008 和 0.010 时, 在三维边界层内被激发出

定常横流涡和非定常横流涡波包的初始幅值随自由来流湍流度的演变如图 6 所示. 从图 6 可以看出, 三维边界层内被激发出非定常横流涡波包的初始幅值与自由来流湍流度呈线性关系, 而定常横流涡的幅值不随自由来流湍流度的增加而改变. 当  $h = 0.004$ ,  $A_{FST} < 0.6\%$  时, 三维边界层内被激发出定常横流涡的幅值大于非定常横流涡波包的幅值; 当  $h = 0.004$ ,  $A_{FST} \geq 0.6\%$  时, 非定常横流涡波包的幅值大于定常横流涡的幅值. 当  $h = 0.006$ , 0.008, 0.010 时, 这一阈值分别为  $A_{FST} = 0.9\%$ , 1.2%, 1.5%. 当  $h \leq 0.008$ , 且  $A_{FST} > 1.6\%$  时, 非定常横流涡波包的幅值比三维边界层内被激发出的定常横流涡的幅值大一个量级.

自然界中真实的湍流运动是随机的、不确定的, 并包含任意多的流向、展向和法向波数的扰动分量, 为方便说明问题, 在数值计算中仅分别选取单个展向或法向波数的自由来流湍流与三维局部粗糙作用激发边界层感受性问题, 来探索自由来流湍流的展向和法向波数对三维边界层感受性问题的影响.

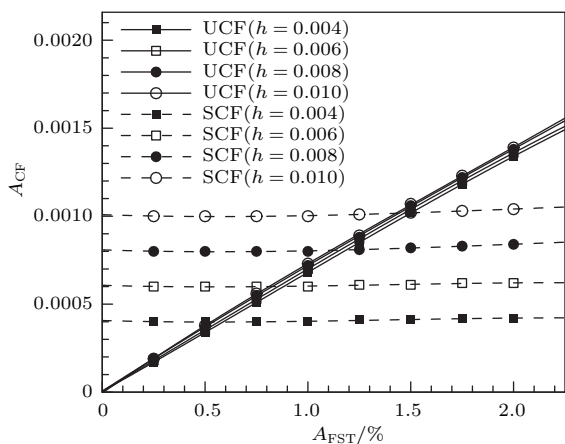


图6 边界层内被激发定常横流涡与非定常横流涡波包的初始幅值随自由来流湍流度的变化  
Fig. 6. The initial amplitudes of the excited steady and unsteady cross-flow vortices in the boundary layer varying with the free-stream intensity.

当自由来流湍流度  $A_{FST} = 0.5\%$  时, 研究自由来流湍流的展向波数与三维边界层内感受性问题之间的关系. 从图7可以看出, 随着自由来流湍流的展向波数  $\beta_{FST}$  不断增大, 三维边界层内被激发出的非定常横流涡波包的初始幅值将逐渐增大, 但被激发的定常横流涡的初始幅值不发生变化. 当自由来流湍流的展向波数  $\beta_{FST} < 0.030$  时, 三维边界层内被激发出的非定常横流涡波包的幅值略小于定常横流涡的幅值; 当  $\beta_{FST} \geq 0.030$  时, 非定常横流涡波包的幅值大于定常横流涡的幅值; 当  $\beta_{FST} \geq 0.130$  时, 非定常横流涡波包的幅值比定常横流涡的幅值大一个量级.

当自由来流湍流度  $A_{FST} = 0.8\%$  时, 研究自由来流湍流的法向波数对三维边界层感受性问题的影响. 从图8可以看出, 随着自由来流湍流的法向波数  $\gamma$  的增大, 三维边界层内被激发出的非定常横流涡波包的幅值将逐渐增大; 当  $\gamma$  约为 0.050 时, 获得最大幅值; 随后, 非定常横流涡波包的幅值将逐渐减小; 但是, 三维边界层内被激发出定常横流涡的幅值同样不随自由来流湍流的法向波数  $\gamma$  的变化而改变. 从图8还可以看出, 当  $-0.060 \leq \gamma \leq 0.130$  时, 三维边界层内被激发出非定常横流涡波包的初始幅值大于定常横流涡的初始幅值; 当  $\gamma < -0.060$  或  $\gamma > 0.130$  时, 非定常横流涡波包的初始幅值小于定常横流涡的初始幅值. 但是, 不管如何改变自由来流湍流的法向波数, 在三维边界层内被激发出非定常横流涡波包的初始幅值与定常横流涡的初始幅值始终都在同一个量级范围之内.

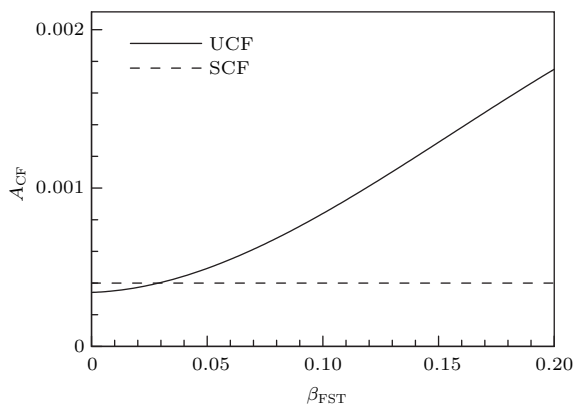


图7 边界层内被激发出的定常横流涡与非定常横流涡波包的初始幅值随自由来流湍流展向波数的变化  
Fig. 7. The initial amplitudes of the excited steady and unsteady cross-flow vortices in the boundary layer varying with the spanwise wave numbers of free-stream turbulence.

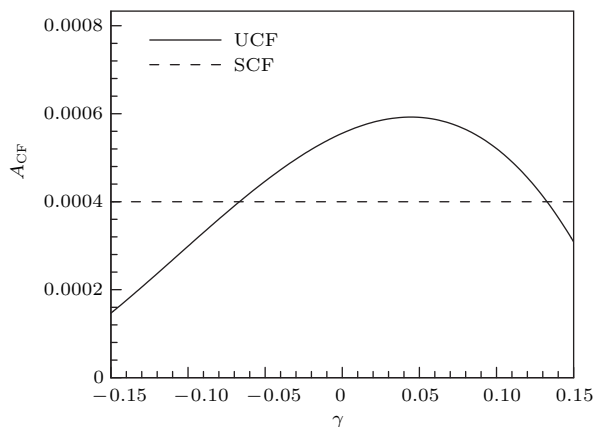


图8 边界层内被激发出的定常横流涡与非定常横流涡波包的初始幅值随自由来流湍流法向波数的变化  
Fig. 8. The initial amplitudes of the excited steady and unsteady cross-flow vortices in the boundary layer varying with the normal wave numbers of free-stream turbulence.

### 3.3 三维边界层感受性与三维局部粗糙高度、流向长度以及不同展向分布的三维局部粗糙之间的关系

选取自由来流湍流基本参数为  $\kappa_1 = 0.025$ ,  $\gamma = 0.000$ ,  $M = 8$ ,  $A_{FST} = 0.5\%$ ; 三维局部粗糙高度  $h = 0.004$ , 流向长度  $L = 12$ , 且  $\beta_R = 0.200$ , 展向宽度  $Z = 2\pi/\kappa_3$  (展向基本波数  $\kappa_3 = 0.050$ ). 通过改变三维局部粗糙高度、流向长度以及不同展向正弦分布的波数  $\beta_R$  来研究自由来流湍流与三维局部粗糙作用下三维边界层内被感受出定常横流涡与非定常横流涡波包之间的关系.

首先研究自由来流湍流度  $A_{FST}$  分别为 0.5%, 1.0%, 1.5% 和 2.0% 时, 三维局部粗糙高度对三维



边界层内被激发出定常横流涡和非定常横流涡波包初始幅值的影响. 由图9可知, 三维边界层内被激发出定常横流涡的初始幅值随着三维局部粗糙高度的增加而快速增大, 三维边界层内被激发出非定常横流涡波包的幅值不随三维局部粗糙高度的增加而改变. 当 $A_{FST} = 0.5\%$ ,  $h < 0.004$ 时, 三维边界层内被激发出非定常横流涡波包的初始幅值大于定常横流涡的初始幅值; 当 $A_{FST} = 0.5\%$ ,  $h \geq 0.004$ 时, 定常横流涡的初始幅值大于非定常横流涡波包的初始幅值; 当 $A_{FST}$ 分别为1.0%, 1.5%和2.0%时, 这一阈值分别为 $h = 0.008, 0.012, 0.016$ ; 当 $A_{FST} \leq 1.0\%$ , 且 $h > 0.015$ 时, 三维边界层内被激发出定常横流涡的初始幅值比非定常横流涡波包的初始幅值大一个量级.

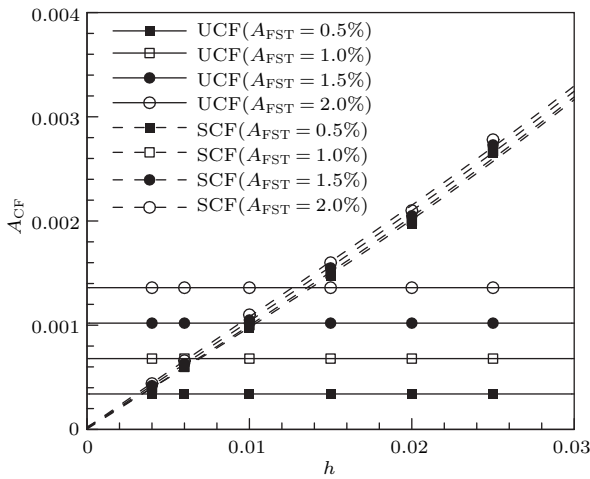


图9 边界层内被激发出的定常横流涡与非定常横流涡波包初始幅值随粗糙高度的变化  
Fig. 9. Initial amplitudes of the excited steady and unsteady cross-flow vortices in the boundary layer varying with the roughness heights.

其次, 研究三维局部粗糙流向长度与三维边界层感受性问题之间的关系. 从图10可以看出, 三维边界层内被激发出定常横流涡的初始幅值与三维局部粗糙流向长度之间呈正弦分布曲线关系, 而三维边界层内被激发出非定常横流涡波包的初始幅值不受三维局部粗糙流向长度变化的影响. 不管如何改变三维局部粗糙流向长度, 三维边界层内被激发出定常横流涡的初始幅值与非定常横流涡波包的初始幅值都在同一个量级范围之内.

最后, 研究不同展向正弦分布(即正弦函数的波数 $\beta_R$ 变化)的三维局部粗糙对三维边界层感受性问题的影响. 从图11可以看出, 三维边界层内被激发出定常横流涡的初始幅值随着三维局部粗糙展向正弦分布波长 $2\pi/\beta_R$ 的增加呈现先增大后

减小的趋势; 当三维局部粗糙展向正弦分布的波长 $2\pi/\beta_R = 21$ 时, 获得最大幅值. 三维边界层内被激发出非定常横流涡的初始幅值不受三维局部粗糙展向正弦分布波长 $2\pi/\beta_R$ 变化的影响.

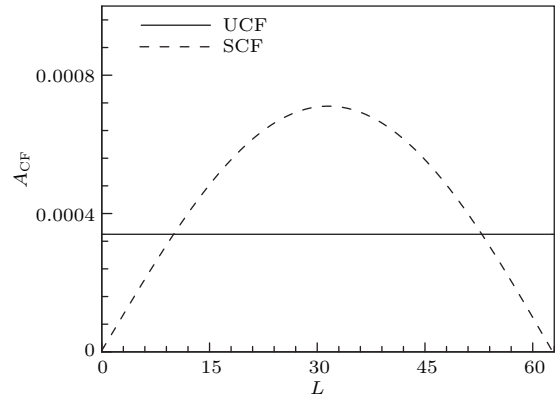


图10 三维边界层内被激发出的定常横流涡与非定常横流涡波包初始幅值随三维壁面局部粗糙流向长度的变化  
Fig. 10. Initial amplitudes of the excited steady and unsteady cross-flow vortices in the boundary layer varying with the roughness lengths.

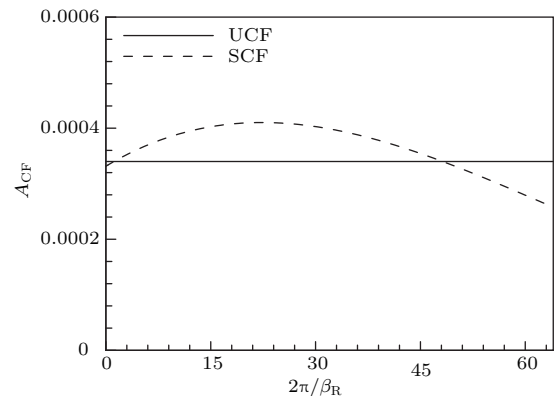


图11 三维边界层内被激发出的定常横流涡与非定常横流涡波包初始幅值随不同展向分布的三维壁面局部粗糙类型变化的演变规律  
Fig. 11. Initial amplitudes of the excited steady and unsteady cross-flow vortices in the boundary layer varying with the spanwise distributions of the three-dimensional roughness.

#### 4 结 论

当自由来流湍流度较小时, 三维壁面局部粗糙作用激发三维边界层内诱导出定常横流涡模态占据主导地位; 当自由来流湍流度较大时, 自由来流湍流作用激发三维边界层内诱导出非定常横流涡模态占据主导作用; 当自由来流湍流与三维壁面局部粗糙相互作用相当时, 三维边界层内能够同时被激发出三种失稳模态, 第一种是定常横流涡, 第二

种是非定常横流涡,第三种是新的非定常横流涡,其展向波数是第一种定常横流涡的正负展向波数与第二种非定常横流涡的正负展向波数的线性组合,即满足(5)式所示关系.

自由来流湍流是激发三维边界层内产生非定常横流涡模态最关键的外部环境扰动条件之一,被诱导的非定常横流涡的初始强度取决于自由来流湍流度的大小,二者之间呈现线性关系;在三维边界层内感受性过程中,自由来流湍流扰动展向波数的变化比法向波数的变化更容易被感知.另外,三维局部粗糙是激发三维边界层内产生定常横流涡模态的重要因素之一,与自由来流湍流属性无关.

在三维边界层内被激发出定常横流涡的初始幅值与三维局部粗糙高度和流向长度之间分别呈现线性增长和正弦分布曲线关系;不同展向正弦分布的三维局部粗糙类型对三维边界层内被诱导出的定常横流涡有明显影响,但是对三维边界层内被诱导出的非定常横流涡几乎没有影响.

## 参考文献

- [1] Saric W S, Reed H L, White E B 2003 *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **35** 413
- [2] Xu G L, Fu S 2012 *Advances in Mechanics* **42** 262 (in Chinese) [徐国亮, 符松 2012 力学进展 **42** 262]
- [3] Bippes H 1999 *Prog. Aerosp. Sci.* **35** 363
- [4] Bippes H, Nitschke-Kowsky P 1990 *AIAA J.* **28** 1758
- [5] Radeztsky Jr. R H, Reibert M S, Saric W S 1994 *AIAA P.* 2373
- [6] Radeztsky R H, Reibert M S, Saric W S 1999 *AIAA J.* **37** 1370
- [7] Deyhle H, Bippes H 1996 *J. Fluid. Mech.* **316** 73
- [8] Reibert M S, Saric W S, Carrillo Jr. R B, Chapman K 1996 *AIAA P.* 0184
- [9] Reibert M S, Saric W S 1997 *AIAA P.* 1816
- [10] Fedorov A V 1988 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **29** 643
- [11] Manuilovich S V 1989 *Fluid. Dyn.* **24** 764
- [12] Crouch J D 1993 *AIAA P.* 0074
- [13] Choudhari M 1994 *Theor. Comp. Fluid. Dyn.* **6** 1
- [14] Ng L L, Crouch J D 1999 *Phys. Fluid.* **11** 432
- [15] Kurz H B E, Kloker M J 2014 *J. Fluid. Mech.* **755** 62
- [16] Shen L Y, Lu C G 2017 *Acta. Phys. Sin.* **66** 014703 (in Chinese) [沈露予, 陆昌根 2017 物理学报 **66** 014703]
- [17] Schrader L U, Brandt L, Henningson D S 2009 *J. Fluid. Mech.* **618** 209
- [18] Schrader L U, Brandt L, Mavriplis C, Henningson D S 2010 *J. Fluid. Mech.* **653** 245
- [19] Tempelmann D, Schrader L U, Hanifi A, Brandt L, Henningson D S 2011 *AIAA P.* 3294
- [20] Tempelmann D, Schrader L U, Hanifi A, Brandt L, Henningson D S 2012 *J. Fluid. Mech.* **711** 516
- [21] Borodulin V I, Ivanov A V, Kachanov Y S, Roschektaev A P 2013 *J. Fluid. Mech.* **716** 487
- [22] Shen L Y, Lu C G 2016 *Appl. Math. Mech.* **37** 929
- [23] Zhang Y, Zaki T, Sherwin S, Wu X 2011 *6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference* Hawaii, USA, June 27-30, p3292
- [24] Luchini P 2013 *J. Fluid. Mech.* **737** 349
- [25] Shen L, Lu C 2017 *Appl. Math. Mech.* **38** 1213

# Receptivity mechanism of cross-flow instability modes induced in three-dimensional boundary layer\*

Lu Chang-Gen<sup>†</sup> Zhu Xiao-Qing Shen Lu-Yu<sup>‡</sup>

(School of Marine Science, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

( Received 3 March 2017; revised manuscript received 6 June 2017 )

## Abstract

Boundary-layer receptivity is the initial stage of the laminar-turbulent transition process, which plays a key role in the transition, especially for the case of three-dimensional boundary-layer flow. The research of the three-dimensional boundary-layer receptivity is theoretically significant for further understanding of the mechanisms of laminar-turbulent transition and turbulence formation. A numerical method is used to study the three-dimensional boundary-layer receptivity under the interaction of the free-stream turbulence and the three-dimensional localized wall roughness. Then whether a new cross-flow instability mode can be found in the three-dimensional boundary layer is studied. Subsequently, investigated are the conditions under which the steady or unsteady cross-flow instability mode can be induced in the three-dimensional boundary layer, the influences of the intensity, spanwise wave number and normal wave number of the free-stream turbulence, and the size and structure of the three-dimensional roughness on the three-dimensional boundary-layer receptivity under the free-stream turbulence interacting with the three-dimensional localized wall roughness, and the instability mode that can be induced and its role in the three-dimensional boundary-layer receptivity. The numerical results show that when the turbulence intensity is low, the steady cross-flow vortex excited by the three-dimensional localized wall roughness dominates the three-dimensional boundary-layer receptivity; on the contrary, when the turbulence intensity is high, the unsteady cross-flow vortex excited by the free-stream turbulence dominates the receptivity; additionally, when the interaction between the three-dimensional localized wall roughness and the free-stream turbulence is existent, three kinds of instability modes are all produced at the same time, namely, the steady cross-flow vortex, the unsteady cross-flow vortex and the new unsteady cross-flow vortex whose dispersion relation is equal to the linear combination of the positive and negative spanwise wave numbers of the first steady cross-flow vortex and the second unsteady cross-flow vortex. The in-depth research on the three-dimensional boundary-layer receptivity under the interaction of the free-stream turbulence and the three-dimensional localized wall roughness is of benefit to accomplishing the hydrodynamic instability theory and the turbulence theory, and providing the theoretical foundation for the prediction and control of the laminar-turbulent transition.

**Keywords:** receptivity, three-dimensional boundary layer, localized wall roughness, free-stream turbulence

**PACS:** 47.20.Pc, 47.20.-k, 47.27.ek

**DOI:** 10.7498/aps.66.204702

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11472139), the Priority Academic Development Program of Jiangsu Higher Education Institutions, China (Grant No. PAPD), and the Startup Foundation for Talents of Nanjing University of Information Science and Technology, China (Grant No. 2016r046).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [cglu@nuist.edu.cn](mailto:cglu@nuist.edu.cn)

<sup>‡</sup> Corresponding author. E-mail: [shenluyu@nuist.edu.cn](mailto:shenluyu@nuist.edu.cn)