

二维声子晶体中简单旋转操作导致的拓扑相变

王健 吴世巧 梅军

Topological phase transitions caused by a simple rotational operation in two-dimensional acoustic crystals

Wang Jian Wu Shi-Qiao Mei Jun

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), **66**, 224301 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.224301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.224301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphys.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种基于二维 Helmholtz 腔阵列的低频宽带隔声结构实验研究

[A broadband low-frequency sound insulation structure based on two-dimensionally inbuilt Helmholtz resonator](#)

物理学报.2017, 66(1): 014307 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.014307>

基于绝缘体上硅的一种改进的 Mach-Zehnder 声光调制器

[An improved Mach-Zehnder acousto-optic modulator on a silicon-on-insulator platform](#)

物理学报.2016, 65(1): 014304 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014304>

基于等效参数反演的敷设声学覆盖层的水下圆柱壳体声散射研究

[Investigation of underwater sound scattering on a cylindrical shell coated with anechoic coatings by the finite element method based on an equivalent parameter inversion](#)

物理学报.2016, 65(1): 014305 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014305>

声子晶体中的半狄拉克点研究

[Semi-Dirac points in two-dimensional phononic crystals](#)

物理学报.2015, 64(19): 194301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194301>

稳态损耗因子的衰减法识别研究

[Estimation of steady loss factor with decay rate method](#)

物理学报.2015, 64(18): 184301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184301>

专题: 拓扑经典波动

## 二维声子晶体中简单旋转操作导致的拓扑相变\*

王健 吴世巧 梅军†

(华南理工大学物理与光电学院, 广州 510641)

(2017年7月24日收到; 2017年9月19日收到修改稿)

构建了一种简单的二维声子晶体: 由两个横截面为三角形的钢柱所组成的复式元胞按三角点阵的形式排列在空气中, 等效地形成了一个蜂巢点阵结构. 当三角形钢柱的取向与三角点阵的高对称方向一致时, 整个体系具有  $C_{6v}$  对称性. 研究发现: 在保持钢柱填充率不变的条件下, 只需要将所有三角柱绕着自己的中心旋转  $180^\circ$ , 就可实现二重简并的 p 态和 d 态在布里渊区中心  $\Gamma$  点处的频率反转, 且该能带反转过程实质上是一个拓扑相变过程. 通过利用  $\Gamma$  点的 p 态和 d 态的空间旋转对称性, 构造了一个赝时反演对称性, 并在声学系统中实现了类似于电子系统中量子自旋霍尔效应的赝自旋态. 随后通过  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  微扰法导出了  $\Gamma$  点附近的有效哈密顿量, 并分别计算了拓扑平庸和非平庸系统的自旋陈数, 揭示了能带反转和拓扑相变的内在联系. 最后通过数值模拟演示了受到拓扑不变量保护的声波边界态的单向传输行为和对缺陷的背向散射抑制. 文中所研究的声波体系, 尽管材料普通常见, 但其拓扑带隙的相对宽度超过 21%, 比已报道的类似体系的带隙都要宽, 且工作原理涵盖从次声波到超声波的很大频率范围, 从而在实际应用上具有较大的优势和潜力.

关键词: 声子晶体, 拓扑相变, 能带反转, 赝自旋

PACS: 43.40.+s, 43.20.+g, 46.40.-f, 46.40.Cd

DOI: 10.7498/aps.66.224301

## 1 引言

量子霍尔效应 (quantum hall effect, QHE)<sup>[1-3]</sup> 和量子自旋霍尔效应 (quantum spin hall effect, QSHE)<sup>[4-7]</sup> 的发现不仅开启了凝聚态物理中拓扑绝缘体<sup>[8,9]</sup> 研究的新篇章, 而且也使得数学中抽象的拓扑概念在物理学中受到越来越多的关注和重视. 拓扑态有许多新奇的特性, 比如: 单向传输的边界态, 对缺陷不敏感的背向散射抑制等, 这些有趣的现象都引起了人们极大的研究兴趣. 但是在电子体系中, 拓扑非平庸系统的实现在实验条件上要求比较高, 比如说 QHE 往往需要在低温和强磁场中才能实现, 这就给实验和应用造成了很大的困难.

光子晶体和声子晶体是由不同性质的材料在空间中做周期性排列而形成的人工结构, 电磁波

和声波在其中的传输特性与自然晶体中的电子波类似, 都可用能带结构和带隙的概念加以描述. 存在外加磁场的情况下, 由于破坏了时间反演对称性, 光子晶体中可实现沿边界单向传输的边界态<sup>[10-12]</sup>. 但对于声子晶体, 由于常见材料的声学性质对磁场不敏感, 无法像光子晶体那样直接引入磁场来打破时间反演对称性. 于是, 有学者建议通过加入旋转的背景气流<sup>[13-17]</sup>, 起到类似磁场的效果, 来打破时间反演对称性, 从而实现单向传播的边界态. 还有学者通过时空调制<sup>[18,19]</sup>、耦合共振<sup>[20-22]</sup> 等方式也在声波系统中实现了受拓扑保护的边界态. 也有学者另辟蹊径, 通过构造具有特定对称性的光子晶体<sup>[23,24]</sup> 或声子晶体结构<sup>[25-27]</sup>, 使相应体现的带结构在布里渊区中心或边界产生狄拉克锥, 再通过改变填充率或降低对称性的方法, 使狄拉克锥打开一个带隙, 进而研究体带隙中产生的边界态是否具有拓扑性质. 例如, 利用布里

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11274120, 11574087) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: phjunmei@scut.edu.cn

渊区中心的  $C_{6v}$  对称性, 以及  $C_{6v}$  点群的两个二维不可约表示, 在一定条件下在  $\Gamma$  点可产生偶然的四重简并态和双狄拉克锥<sup>[28-31]</sup>. 在此基础上通过调节散射体的几何参数, 可实现带隙从打开到关闭再到打开的拓扑相变过程, 从而在经典波领域实现了类似于电子系统中的 QSHE. 此外, 通过构建具有  $C_{3v}$  对称性的三角晶格, 使得布里渊区边界上  $K$  和  $K'$  点不等价<sup>[32]</sup>, 然后将  $K$  点的对称性降低为  $C_3$ , 就会在  $K$  和  $K'$  点的狄拉克锥中打开一个带隙, 从而实现具有谷拓扑性质的边界态<sup>[33,34]</sup>.

本文构建了一种结构简单的二维声子晶体系统: 由两个三角形钢柱组成的复式元胞按三角点阵形式排列在空气中, 并使整个系统具有  $C_{6v}$  对称性. 与现有研究方法不同的是, 本文方法不需要改变钢柱子的填充率, 也不必移动钢柱子在元胞中的位置来降低体系的对称性, 而只需要将每个柱子绕自己中心旋转  $180^\circ$  就可以实现能带反转. 有趣的是, 旋转前后的结构分别是拓扑平庸和拓扑非平庸的, 尽管它们的填充率是完全一样的, 尽管每个柱子中心的位置也没有改变. 而且, 通过这种简单旋转的方法实现的拓扑非平庸带隙的相对宽度可以超过 21%, 显著地超过已知类似体系的带隙, 这就给实验测量和实际应用带来了很大的方便, 因为只需要较小的样品就可以观察到受拓扑保护的边界态, 而且该表面态的鲁棒性也很好.

## 2 研究的体系

### 2.1 体系的设计

将截面为正三角形的 2 个钢柱子组成一个复式元胞, 然后按照三角晶格形式排列在空气中, 于是就从整体上形成了蜂巢晶格的结构, 如图 1 所示. 三角形柱子的中心位于六边形元胞的六个顶点上, 且所有三角柱子的朝向都与晶格点阵的高对称方向重合. 我们发现, 即使每个柱子的朝向都与相邻的柱子不同, 还是有两种排列方式可以确保整个晶格具有  $C_{6v}$  对称性, 这两种排列方式分别命名为 P 型和 N 型, 如图 1 所示.  $r$  为三角柱的顶点到其中心的距离,  $L$  为相邻两个三角柱中心的距离. 复式元胞的晶格常数  $a = \sqrt{3}L$ , 基矢量

$$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}a}{2}\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}a}{2}\mathbf{j}.$$

在这样的体系中传播的声波方程为

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_r(\mathbf{x})} \nabla \psi \right) = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\psi}{B_r(\mathbf{x})}, \quad (1)$$

其中  $\psi$  是声压;  $\rho_r = \rho/\rho_0$  和  $B_r = B/B_0$  分别表示相对质量密度和相对体弹性模量;  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  和  $B = B(\mathbf{x})$  是空间中某一点  $\mathbf{x}$  处的质量密度和体弹性模量;  $\omega$  为角频率;  $B_0$  和  $\rho_0$  表示基体的质量密度和体弹性模量,  $c_0 = \sqrt{B_0/\rho_0}$  为基体中的声波速度. 在本文中基体为空气, 散射体为钢柱, 由于两者密度和纵波速度都相差甚大, 所以可以忽略散射体中剪切波的影响, 把钢柱当作刚体来处理. 事实上, 只要是散射体和基体的阻抗相差很大, 下面的计算结果和结论都依然成立. 本文中计算和模拟都是采用 COMSOL Multiphysics(一种基于有限元法的数值模拟仿真软件)来完成的.

### 2.2 能带反转

具有  $C_{6v}$  对称性的晶格结构, 在布里渊区中心  $\Gamma$  点的本征态有 2 个二维不可约表示:  $E_1$  和  $E_2$ . 二重简并的偶极子态, 如图 2 中的  $p_x$  和  $p_y$ , 对应于  $E_1$  不可约表示, 具有奇宇称, 简称为 p 态. 二重简并的四极子态, 如图 2 中的  $d_{x^2-y^2}$  和  $d_{2xy}$ , 对应于  $E_2$  不可约表示, 具有偶宇称, 简称为 d 态. 这里所谓 p 态和 d 态的叫法都是来源于量子系统中的电子波函数.

对于 P 型声子晶体, 位于  $\Gamma$  点的二重简并的 p 态和 d 态的频率随几何参数  $r/L$  的变化情况如图 1 的蓝色点线所示. 可以看到, 当  $r = r_c = 0.31L$  时(红点位置处), p 态和 d 态在  $\Gamma$  点偶然简并成为四重简并态, 此时带结构在布里渊区中心形成了双狄拉克锥线性色散关系<sup>[25-27]</sup>; 在其他情况下, p 态和 d 态之间都存在着一个带隙. 通过考察不同  $r$  时的本征频率, 发现当  $r < r_c$  时, p 态的频率比 d 态高, 二者之间有一个拓扑非平庸的带隙; 而当  $r > r_c$  时, p 态的频率比 d 态低, 二者之间有一个拓扑平庸的带隙. 也就是说, p 态和 d 态的本征频率, 在经过  $r_c = 0.31L$  时, 它们的相互位置发生了改变. 这称之为能带反转, 意味着拓扑相变<sup>[23,25-27]</sup>. 但从图 1 中可以看到, 对 P 型声子晶体而言, 能带反转前后, 带隙频率的重合部分很小, 这不利于拓扑边缘态的产生和利用, 因此我们将采用另外一种方式来实现能带反转.

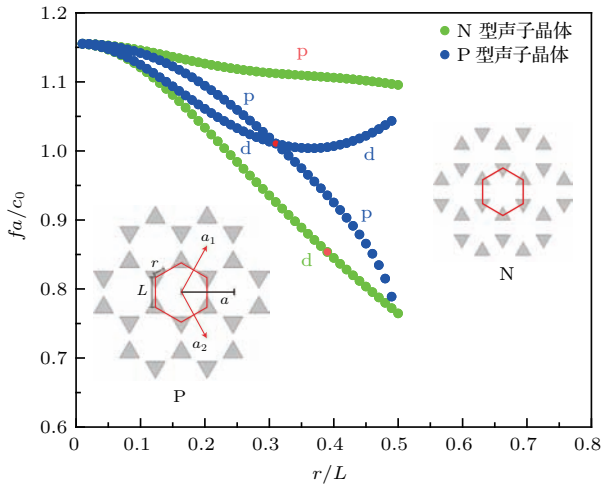


图1 P型和N型声子晶体在 $\Gamma$ 点的两个双重简并态的频率随结构参数 $r/L$ 的变化曲线. 嵌入的两幅图分别为P型和N型声子晶体的结构示意图, 红色的正六边形表示一个元胞, 每个元胞包含2个钢柱,  $f$ 为频率

Fig. 1. Frequencies of doublydegenerate p states and d states at the  $\Gamma$  point as functions of the geometrical parameter ( $r/L$ ) for both P-type and N-type acoustic crystals (ACs). Insets schematically show the structure of P-type and N-type ACs, where the red hexagon represents one unit cell, which is composed of two identical steel rods.

将P型声子晶体中的每个三角柱绕着自己的中心旋转 $180^\circ$ , 就变成了N型声子晶体, 此时 $C_{6v}$ 对称性依然得以保留. N型声子晶体的p态和d态的频率随参数 $r/L$ 的变化情况如图1的绿色点线所示. 通过观察其本征频率, 发现N型声子晶体永远都是p态在d态上面, 无论怎么改变 $r$ 都不可能发生拓扑相变. 但如果比较P型和N型两种声子晶体, 就会发现在 $0.31 < r/L < 0.50$ 的范围内, N型声子晶体拓扑非平庸的带隙(p态在d态上面)总是包含着P型声子晶体拓扑平庸的带隙(p态在d态下面). 因此, 下文中将利用N型声子晶体的非平庸带隙和P型声子晶体的平庸带隙来构造和研究边界态.

作为例子, 图2(a)和图2(b)中, 分别给出了P型和N型声子晶体在 $r/L = 0.45$ 时的带结构. 在图2(a)中,  $\Gamma$ 点有两个二重简并态, 且在它们之间有个很大的带隙 $fa/c_0 = (0.865 - 1.022)$ , 带隙相对宽度, 即带隙频宽与带隙中间频率之比, 达到了16.6%, 这比已报道的类似体系的拓扑带隙[25-27]都要宽. 嵌入的四个图分别表示这两个二重简并态的本征场, 可以看出在带隙下方的二重简并态为p态, 带隙上方的为d态, 因此这个带隙是拓扑平庸的. 在图2(b)中,  $\Gamma$ 点也有两个二重简并态, 且它

们之间的带隙更大 $fa/c_0 = (0.803-0.996)$ , 带隙相对宽度甚至达到了21.4%. 注意这里由于第四条带的最低点不在 $\Gamma$ 点而在 $M$ 点, 所以实际的绝对带隙为 $(0.803-0.996)$ , 而不是 $\Gamma$ 点两个双重简并态之间的频率间隔 $(0.803-1.102)$ . 并且p态在带隙上方, d态在带隙下方, 因此这个带隙是拓扑非平庸的. 也就是说, 与图2(a)相比, p态和d态在 $\Gamma$ 点实现了反转.

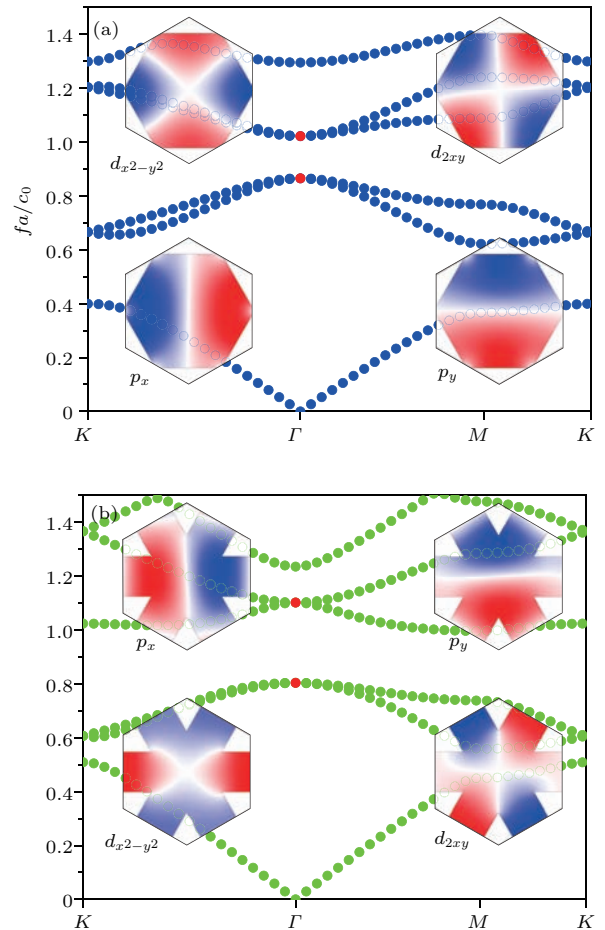


图2 P型和N型声子晶体在 $r/L = 0.45$ 时的带结构, 嵌入的图为 $\Gamma$ 点(红点处)的两个双重简并态(p态和d态)的声压场 (a) P型声子晶体的拓扑平庸的带结构; (b) N型声子晶体的拓扑非平庸的带结构

Fig. 2. Band structures of P-type and N-type ACs when  $r/L = 0.45$ : (a) The band gap of P-type AC is topologically trivial; (b) the band gap of N-type AC is topologically nontrivial. In both (a) and (b), insets show the acoustic pressure fields of the doublydegenerate p states and d states at the  $\Gamma$  point.

### 2.3 赝时间反演对称性与赝自旋态

前文已提到,  $C_{6v}$ 点群有2个二维不可约表示:  $E_1$ 和 $E_2$ .  $\{p_x, p_y\}$ 对应于 $E_1$ 表示, 而 $\{d_{x^2-y^2}, d_{2xy}\}$ 对应于 $E_2$ 表示. 根据 $E_1$ 和 $E_2$ 表

示基函数的旋转对称性, 可以构造一个赝时间反演算符  $T = UK$ , 其中  $U = -i\sigma_y$  是一个反么正算符,  $K$  为复共轭算符 [23,25-27].  $T$  算符具有如下性质:

$$\begin{cases} Tp_+ = -ip_-, \\ Tp_- = ip_+, \end{cases} \quad (2a)$$

$$\begin{cases} T^2p_+ = -p_+, \\ T^2p_- = -p_-. \end{cases} \quad (2b)$$

可以看出,  $T$  算符的角色完全类似于电子系统中真实的时间反演算符, 所以  $T$  称之为赝时间反演算符. 显然, 两个赝自旋态  $p_{\pm} = (p_x \pm ip_y) / \sqrt{2}$  都是  $T$  的本征态: 它们在  $T$  的作用下能互相转换.  $p_+$  和  $p_-$  分别表示赝自旋向上和赝自旋向下的态. 同样的道理, 根据  $d$  态的旋转对称性, 也能构造出类似的赝自旋态  $d_{\pm} = (d_{x^2-y^2} \pm id_{2xy}) / \sqrt{2}$ .

### 2.4 哈密顿量与自旋陈数

为了研究  $\Gamma$  点附近的色散关系, 根据  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  微扰理论 [23-26,29,30,35-37], 可以只考虑两个二重简并态的贡献. 此时, 体系的有效哈密顿量在基矢  $(|p_x\rangle, |p_y\rangle, |d_{x^2-y^2}\rangle, |d_{2xy}\rangle)^T$  下可写为

$$H_{ij}^{\text{eff}} = H'_{ij} + \sum_n \frac{H'_{in}H'_{nj}}{\epsilon_i - \epsilon_n} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad (3)$$

其中  $H'_{ij} = \langle \Gamma_i | H' | \Gamma_j \rangle$  为不同本征态  $\Gamma_i$  和  $\Gamma_j$  之间的交叠积分,  $H' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = i\mathbf{k} \cdot (2\rho_r^{-1}\nabla + \nabla\rho_r^{-1})$  是声波波动方程的微扰项.  $\Gamma_i = \{|p_x\rangle, |p_y\rangle, |d_{x^2-y^2}\rangle, |d_{2xy}\rangle\}$  表示四个本征态, 它们的频率  $\epsilon_i = \{\epsilon_p, \epsilon_p, \epsilon_d, \epsilon_d\}$ . 由于  $|p_x\rangle$  和  $|p_y\rangle$  具有奇宇称,  $|d_{x^2-y^2}\rangle$  和  $|d_{2xy}\rangle$  具有偶宇称, 所以  $H'_{ij}$  的分块对角项为零. 变换到新基矢  $(|p_+\rangle, |d_+\rangle, |p_-\rangle, |d_-\rangle)^T$  下, 可得有效哈密顿量为

$$H^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} M - Bk^2 & Ak_+ & 0 & 0 \\ A^*k_- & -M + Bk^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M - Bk^2 & Ak_- \\ 0 & 0 & A^*k_+ & -M + Bk^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中  $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$ ,  $M = (\epsilon_d - \epsilon_p) / 2$ ,  $A$  来自一阶微扰项  $H'_{ij}$  的非对角项.  $B$  来自二阶微扰项的对角项, 且小于零.

为了描述体系的拓扑序, 可通过下面的式子来计算自旋陈数 (spin Chern number) [4,38]:

$$C_s = \pm \frac{1}{2} [\text{sgn}(M) + \text{sgn}(B)]. \quad (5)$$

显然, 如果  $BM < 0$ ,  $C_s = 0$ , 对应于拓扑平庸态; 如果  $BM > 0$ ,  $C_s = \pm \text{sgn}(M)$ , 对应于拓扑非平庸态. 在本文的体系中, 对于 P 型声子晶体,  $d$  态频率在  $p$  态之上 ( $\epsilon_d > \epsilon_p$ ),  $M > 0$ ,  $C_s = 0$ , 所以带隙是拓扑平庸的. 但对于 N 型声子晶体,  $d$  态频率在  $p$  态之下 ( $\epsilon_d < \epsilon_p$ ),  $M < 0$ ,  $C_s = \pm 1$ , 带隙则是拓扑非平庸的.

无论是有效哈密顿量, 自旋陈数, 还是拓扑相变机理, 本文的声子晶体系统都类似于 CdTe/HgTe/CdTe 量子阱系统中的 Bernevig-Hughes-Zhang 模型 [4], 因此完全有理由相信, 在本文的声子晶体系统可以出现一个类似电子 QSHE 的声学自旋霍尔效应.

### 2.5 自旋依赖的拓扑边界态

既然体态受到自旋陈数的保护, 根据体态-边界态对应原则, 在非平庸声子晶体的边界上会出现受到拓扑保护的单向传播边界态. 将上面的 P 型和 N 型声子晶体拼接在一起, 形成一种三明治结构: 厚度为 10 层的 N 型声子晶体被厚度为 10 层的 P 型声子晶体从两边夹在一起, 如图 3(b) 所示. 计算了该超胞结构沿  $\Gamma M$  方向的投影带结构, 结果如图 3(a) 所示, 其中黑点表示体态, 蓝点表示边界态. 可以看出, 边界态 (蓝色) 出现在体态带隙的地方, 且边界态将体态连接起来. 值得注意的是, 图中边界态 (蓝色) 上的每一点都为二重简并, 这是由于在同一波矢同一频率处永远都有赝自旋向上和赝自旋向下两个态同时存在所导致的. 而且, 这两个同频率的边界态分别位于 N 型声子晶体的左侧和右侧边界上. 为了更直观地显示结果, 在图 3(a) 中选取了 A, B 两个代表点, 将其所对应的边界态的场图绘于图 3(b) 中.

B 点的场图绘于图 3(b) 的上方, 可以看出: 左侧边界上能流是逆时针旋转的, 对应赝自旋垂直纸面朝上, 该边界态向下 ( $-y$  方向) 传播; 右侧边界上能流是顺时针旋转的, 对应赝自旋垂直纸面朝下, 该边界态也向下 ( $-y$  方向) 传播. A 点的场图与 B 点类似, 只不过能流方向、赝自旋方向和传播方向均与 B 点相反: 左侧边界上能流是顺时针旋转的,

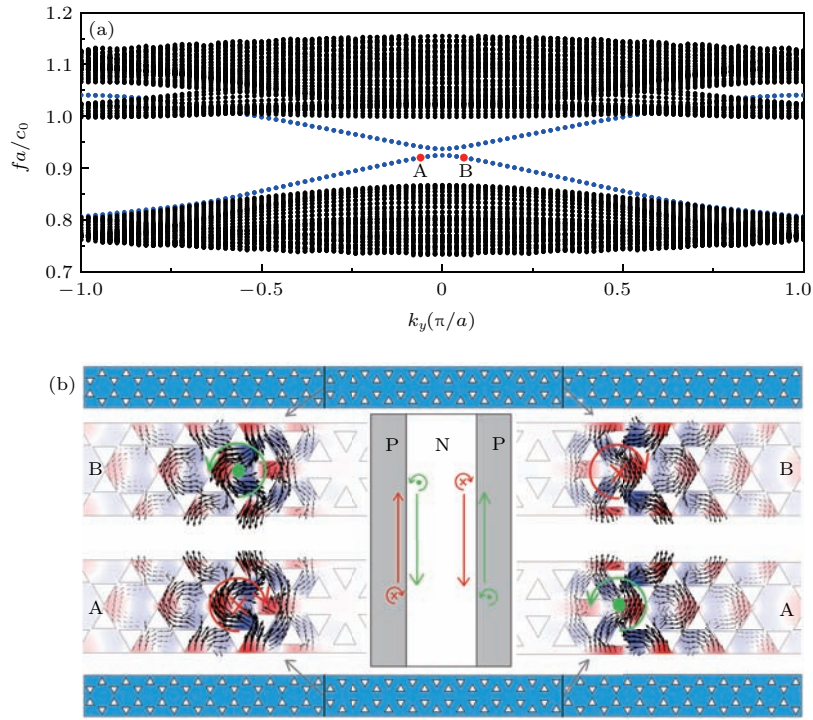


图3 P型/N型声子晶体界面上的拓扑边界态 (a) 表示PNP三明治结构(由10层N型结构被10层P型结构从两边包夹而组成)沿着 $\Gamma M$ 方向的投影带结构,黑色的点表示体态,蓝色的点表示边界态;(b)蓝色矩形代表计算所用到的超胞结构,上面两个场图画出了B点的边界态,下面两个场图为A点的边界态,其中黑色箭头表示时间平均后的能流密度矢量,逆时针旋转的能流对应赝自旋方向垂直纸面朝外,用绿色的旋转箭头表示,顺时针旋转的能流对应赝自旋垂直纸面朝内,用红色的旋转箭头表示;中间的示意图表示在每个界面上携带某个赝自旋分量的声波边界态只能沿着一个固定的方向传播,体现了边界态的手性

Fig. 3. (a) The projected band structure along the  $\Gamma M$  direction for a ribbon of a N-type AC (10 unit cells) sandwiched by two P-type ACs (10 unit cells) from both sides, black and blue dots represent bulk and edge states, respectively; (b) the blue rectangle represents the supercell used in the calculation, acoustic pressure field distributions at edge states A and B are shown, where the wave energy is obviously localized around the interface between N-type/P-type ACs, black arrows represent the time-averaged Poynting vectors, the counterclockwise and clockwise rotational behaviors of the Poynting vectors are consistent with the spin-up and spin-down orientations of the pseudospin components.

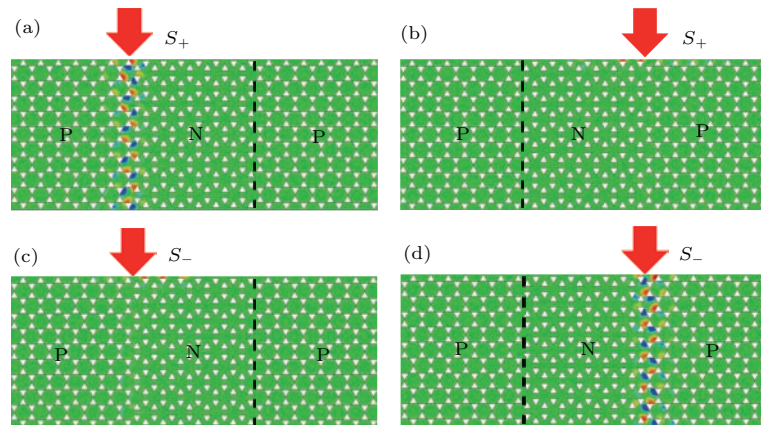


图4 (a)赝自旋向上( $S_+$ )的声波能沿着左侧的P/N边界向下传播,但不能沿着右侧的N/P边界向下传播(b);(c)赝自旋向下( $S_-$ )的声波不能沿着左侧P/N边界向下传播,但能沿着右侧的N/P边界向下传播(d)

Fig. 4. (a), (b) When excited by a pseudospinup source ( $S_+$ ), there exists an edge mode that can propagate along the left hand side P/N interface, but no edge state exists along the right hand side N/P interface; (c), (d) when excited by a pseudospin-down source ( $S_-$ ), there exists an edge mode that can propagate along the right hand side N/P interface, but no edge state exists along the left hand side P/N interface.

质自旋垂直纸面朝下, 该边界态向上 (+y 方向) 传播; 右侧边界上能流是逆时针旋转的, 质自旋垂直纸面朝上, 该边界态也向上 (+y 方向) 传播. 这样就在每条边界上 (不管是左侧边界还是右侧边界), 同时都存在 2 个边界态, 每个边界态都有一个确定的传播方向, 且锁定一个确定的质自旋方向. 因此, 这种边界态是手性的 (helical).

为了验证手性边界态的性质, 图 4 展示了不同质自旋态的声波沿两种边界传输的情况. 图 4(a) 和图 4(b) 模拟的是质自旋朝上 ( $S_+$ ) 的声波从样品上方入射到两个边界的情况, 可以看出声波可以沿左侧边界 (P/N 边界) 无损传输, 但无法通过右侧边界 (N/P 边界). 图 4(c) 和图 4(d) 模拟的是质自旋朝下 ( $S_-$ ) 的声波从样品上方入射到两个边界的情况, 同样可以看到, 声波只能沿其中一个边界传输, 但与前一种情况刚好相反: 质自旋朝下的声波能通过右侧边界 (N/P 边界), 但不能通过左侧边界 (P/N 边界). 边界态的这种行为与电子系统中的 QSHE 完全一致.

### 2.6 缺陷免疫

拓扑边界态的一个重要性质就是它的鲁棒性: 它对缺陷是免疫的, 不管是弯曲边界, 还是边界上

存在空穴 (cavity) 和无序 (disorder) 等缺陷, 受拓扑保护的边界态都可以绕过这些缺陷传输过去, 并且几乎没有反射. 图 5 (a) 模拟的是平面波从上方入射到一条有四个直角转弯的边界上, 可以发现声波没有阻碍地沿着边界传输过去, 几乎没有反射, 就像在直边界上传播一样. 图 5 (b) 是在图 5 (a) 的基础上在边界中加入了空穴和无序的缺陷, 同样让平面波从上方入射, 可以发现声波很轻易地就绕过了这些缺陷向下传输了过去, 就像这些缺陷不存在一样. 值得注意的是, 边界态之所以具有这么好的鲁棒性, 是因为本文所设计的系统具有很宽的拓扑带隙. 如前所述, 带隙的相对宽度达到了 21%, 比已报道的类似体系的带隙都要宽, 这使得边界态对缺陷很不敏感, 从而在实际应用上具有较大的优势和潜力.

### 3 讨论与结论

设计了两种具有  $C_{6v}$  对称性的二维声子晶体: 它们是由两个三角形钢柱组成的复式元胞按三角点阵的形式排列在空气中所形成的. 只需将所有三角柱绕着自己的中心旋转  $180^\circ$ , 这两种声子晶体就能简单地完成互相转变. 这样就在保持晶格对称性和填充率不变的条件下实现拓扑相变. 通过利用  $\Gamma$  点二重简并的 p 态和 d 态的空间对称性, 构造了一个质时间反演对称性, 从而在声学系统中实现了类似于电子系统中 QSHE 的质自旋态. 接着通过  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  简并微扰法导出了  $\Gamma$  点附近的有效哈密顿量, 并计算了 P 型和 N 型两种声子晶体带结构的自旋陈数, 揭示了能带反转和拓扑相变的联系. 然后又通过数值模拟证实了具有自旋取向依赖的单向传输的边界态, 该边界态具有很好的鲁棒性, 对直角弯曲、空穴和无序等缺陷是免疫的. 虽然该类型的声子晶体用到的都是普通常见材料, 但拓扑带隙很宽, 结构也并不复杂, 其基本原理适用于从次声波到超声波的很大频率范围的声波, 在实际应用上具有较大的优势和潜力.

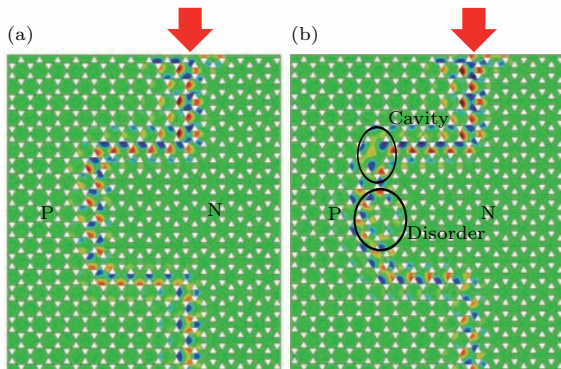


图 5 (a) 平面波入射到一个具有弯曲通道的 PN 型声子晶体中, 可以发现声波几乎没有阻碍的传播过去; (b) 在 (a) 图的基础上引入了空穴和无序的缺陷, 但声波绕过这些缺陷传播了过去, 与 (a) 相比只是相位有所改变; 红色箭头代表入射波方向

Fig. 5. (a) The edge mode can propagate unidirectionally along the interface with almost no backscattering even when there are four 90-degree bends at the interface; (b) similar to (a) but with two more defects (a cavity defect and a disorder defect) are introduced into the interface. It can be seen that the acoustic wave can go round all these defects with little back-scattering. Red arrows represent the incident waves.

### 参考文献

[1] Klitzing K V, Dorda G, Pepper M 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 494  
 [2] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405

- [3] Laughlin R B 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1395
- [4] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
- [5] Bernevig B A, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 106802
- [6] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 226801
- [7] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
- [8] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [9] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [10] Wang Z, Chong Y D, Joannopoulos J D, Soljačić M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013905
- [11] Wang Z, Chong Y D, Joannopoulos J D, Soljačić M 2009 *Nature* **461** 772
- [12] Fang Y T, He H Q, Hu J X, Chen L K, Wen Z 2015 *Phys. Rev. A* **91** 033827
- [13] Fleury R, Sounas D L, Sieck C F, Haberman M R, Alù A 2014 *Science* **343** 516
- [14] Yang Z J, Gao F, Shi X H, Lin X, Gao Z, Chong Y D, Zhang B L 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 114301
- [15] Ni X, He C, Sun X C, Liu X P, Lu M H, Feng L, Chen Y F 2015 *New J. Phys.* **17** 053016
- [16] Chen Z G, Wu Y 2016 *Phys. Rev. Appl.* **5** 054021
- [17] Khanikaev A B, Fleury R, Mousavi S H, Alù A 2015 *Nat. Commun.* **6** 8260
- [18] Fleury R, Sounas D L, Alù A 2015 *Phys. Rev. B* **91** 174306
- [19] Fleury R, Khanikaev A B, Alu A 2016 *Nat. Commun.* **7** 11744
- [20] Peng Y G, Qin C Z, Zhao D G, Shen Y X, Xu X Y, Bao M, Jia H, Zhu X F 2016 *Nat. Commun.* **7** 13368
- [21] He C, Li Z, Ni X, Sun X C, Yu S Y, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2016 *Appl. Phys. Lett.* **108** 031904
- [22] Wei Q, Tian Y, Zuo S Y, Cheng Y, Liu X J 2017 *Phys. Rev. B* **95** 094305
- [23] Wu L H, Hu X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 223901
- [24] Wang H X, Xu L, Chen H Y, Jiang J H 2016 *Phys. Rev. B* **93** 235155
- [25] Mei J, Chen Z G, Wu Y 2016 *Sci. Rep.* **6** 32752
- [26] He C, Ni X, Ge H, Sun X C, Chen Y B, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2016 *Nat. Phys.* **12** 1124
- [27] Zhang Z W, Wei Q, Cheng Y, Zhang T, Wu D J, Liu X J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 084303
- [28] Chen Z G, Ni X, Wu Y, He C, Sun X C, Zheng L Y, Lu M H, Chen Y F 2014 *Sci. Rep.* **4** 4613
- [29] Li Y, Mei J 2015 *Opt. Express* **23** 12089
- [30] Li Y, Wu Y, Mei J 2014 *Appl. Phys. Lett.* **105** 014107
- [31] Dai H Q, Liu T T, Jiao J R, Xia B Z, Yu D J 2017 *J. Appl. Phys.* **121** 135105
- [32] Lu J Y, Qiu C Y, Ke M Z, Liu Z Y 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 093901
- [33] Ma T, Shvets G 2016 *New J. Phys.* **18** 025012
- [34] Lu J Y, Qiu C Y, Ye L P, Fan X Y, Ke M Z, Zhang F, Liu Z Y 2017 *Nat. Phys.* **13** 369
- [35] Mei J, Wu Y, Chan C T, Zhang Z Q 2012 *Phys. Rev. B* **86** 035141
- [36] Wu Y 2014 *Opt. Express* **22** 1906
- [37] Lu J Y, Qiu C Y, Xu S J, Ye Y T, Ke M Z, Liu Z Y 2014 *Phys. Rev. B* **89** 134302
- [38] Shen S Q, Shan W Y, Lu H Z 2011 *Spin* **1** 33



SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

# Topological phase transitions caused by a simple rotational operation in two-dimensional acoustic crystals\*

Wang Jian Wu Shi-Qiao Mei Jun<sup>†</sup>

(School of Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

(Received 24 July 2017; revised manuscript received 19 September 2017)

## Abstract

We design a two-dimensional acoustic crystal (AC) to obtain topologically protected edge states for sound waves. The AC is composed of a triangular array of a complex unit cell consisting of two identical triangle-shaped steel rods arranged in air. The steel rods are placed on the vertices of the hexagonal unit cell so that the whole lattice possesses the  $C_{6v}$  symmetry. We show that by simply rotating all triangular rods around their respective centers by 180 degrees, a topological phase transition can be achieved, and more importantly, such a transition is accomplished with no need of changing the fill ratios or changing the positions of the rods. Interestingly, the achieved topologically nontrivial band gap has a very large frequency width, which is really beneficial to future applications. The topological properties of the AC are rooted in the spatial symmetries of the eigenstates. It is well known that there are two doubly-degenerate eigenstates at the  $\Gamma$  point for a  $C_{6v}$  point group, and they are usually called the p and d states in electronic system. By utilizing the spatial symmetries of the p and d states in the AC, we can construct the pseudo-time reversal symmetry which renders the Kramers doubling in this classical system. We find pseudospin states in the interface between topologically trivial and nontrivial ACs, where anticlockwise (clockwise) rotational behaviors of time-averaged Poynting vectors correspond to the pseudospin-up (pseudospin-down) orientations of the edge states, respectively. These phenomena are very similar to the real spin states of quantum spin Hall effect in electronic systems. We also develop an effective Hamiltonian for the associated bands to characterize the topological properties of the AC around the Brillouin zone center by the  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  perturbation method. We calculate the spin Chern numbers of the ACs, and reveal the inherent link between the band inversion and the topological phase transition. With full-wave simulations, we demonstrate the one-way propagation of sound waves along the interface between topologically distinct ACs, and demonstrate the robustness of the edge states against different types of defects including bends, cavity and disorder. Our design provides a new way to realize acoustic topological effects in a wide frequency range spanning from infrasound to ultrasound. Potential applications and acoustic devices based on our design are expected, so that people can manipulate and transport sound waves in a more efficient way.

**Keywords:** acoustic crystals, topological phase transition, band inversion, pseudospin

**PACS:** 43.40.+s, 43.20.+g, 46.40.-f, 46.40.Cd

**DOI:** [10.7498/aps.66.224301](https://doi.org/10.7498/aps.66.224301)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11274120, 11574087).

† Corresponding author. E-mail: [phjunmei@scut.edu.cn](mailto:phjunmei@scut.edu.cn)