

声子晶体中的多重拓扑相

陈泽国 吴莹

Multiple topological phases in phononic crystals

Chen Ze-Guo Wu Ying

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 227804 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.227804

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.227804>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I22>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非对称光束干涉制备二维微纳光子结构研究

[Fabrication of two-dimensional micro-nano photonic structures by symmetry-lost beams interference](#)

物理学报.2017, 66(21): 217801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.217801>

非线性光学超构表面

[Nonlinear photonic metasurfaces](#)

物理学报.2017, 66(14): 147803 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.147803>

利用波矢滤波超表面实现超衍射成像

[Super diffraction imaging with wave vector selective metasurface](#)

物理学报.2017, 66(14): 147804 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.147804>

宽入射角度偏振不敏感高效异常反射梯度超表面

[Polarization-insensitive and broad-angle gradient metasurface with high-efficiency anomalous reflection](#)

物理学报.2015, 64(23): 237802 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.237802>

基于加权实数编码遗传算法的超材料优化设计

[Optimization of metamaterial based weighted real-coded genetic algorithm](#)

物理学报.2014, 63(8): 087804 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.087804>

专题: 拓扑经典波动

声子晶体中的多重拓扑相*

陈泽国 吴莹†

(阿卜杜拉国王科技大学计算机电子和数学学院, 图瓦 23955-6900, 沙特阿拉伯)

(2017年7月31日收到; 2017年10月27日收到修改稿)

研究了圆环型波导依照蜂窝结构排列的声子晶体系统中的拓扑相变. 利用晶格结构的点群对称性实现自旋, 并在圆环中引入旋转气流来打破时间反演对称性. 通过紧束缚近似模型计算的解析结果表明, 没有引入气流时, 调节几何参数, 系统存在普通绝缘体和量子自旋霍尔效应绝缘体两个相; 引入气流后, 可以实现新的时间反演对称性破缺的量子自旋霍尔效应相, 而增大气流强度, 则可以实现量子反常霍尔效应相. 这三个拓扑相可以通过自旋陈数来分类. 通过有限元软件模拟了多个系统中边界态的传播, 发现不同于量子自旋霍尔效应相, 量子反常霍尔相系统的表面只支持一种自旋的边界态, 并且它无需时间反演对称性保护.

关键词: 声子晶体, 拓扑, 量子反常霍尔效应

PACS: 78.67.Pt, 03.65.Vf, 73.20.At

DOI: 10.7498/aps.66.227804

1 引言

波与物质的相互作用的研究是一个长盛不衰的课题. 无论从波的类型, 例如机械波、电磁波、电子波、引力波等出发, 还是从作用机理, 譬如散射、折射、干涉、衍射、吸收等考虑, 其研究成果都极大地丰富了人们对自然界的认识. 其中, 波在周期性结构中的传播, 因为其周期结构的布拉格散射和局域共振特性带来的奇异的色散关系, 已成为新世纪以来的研究热点. 一个典型的例子是周期性结构的系统会体现出带隙, 其对应的频率不支持波的传播, 使得系统在带隙频率范围内, 可以看成是波的绝缘体^[1,2].

带隙的范围可以通过求解能带问题的本征值得到, 和本征波函数无关. 20世纪80年代, 整数量子霍尔效应 (IQHE) 的发现^[3]让人们意识到在考虑本征波函数之后, 带隙可以通过拓扑来进行分类. 拓扑是个数学概念, 是用来研究物体在连续平滑变化下保持不变的性质. 这个性质通常用拓扑

不变量来描述. 带隙可以通过计算其拓扑不变量, 被分类为拓扑平庸和拓扑非平庸的, 两者的界面上存在单向传播的边界态. 一个拓扑非平庸的例子就是整数量子霍尔效应, 它是指在强磁场下, 二维电子气体的电子能谱形成分立的朗道能级, 当电子的费米能处在能隙中时, 体系的霍尔电导率为整数的现象. 这个整数化的霍尔电导, 后来被证实可以用拓扑数来描述 $\sigma_{xy} = Ce^2/h$, C 就是一个拓扑不变量, 又被称为陈数^[4]. 可以用整数量子霍尔效应来类比的绝缘体, 又被称为陈绝缘体. IQHE 需要强磁场来打破时间反演对称性. 最近, 新的一类保持时间反演对称性的拓扑态被提了出来, 不同于 IQHE, 它对应的陈数为 0, 但是它的自旋霍尔电导率是非零量子化的, 这类拓扑态被称为量子自旋霍尔效应 (QSH), 类比的绝缘体又被称为拓扑绝缘体或者 QSH 绝缘体^[5-7]. 由于这类绝缘体的陈数为 0, 因此它们需要用新的拓扑不变量 Z_2 ^[8] 或者自旋陈数^[9] 来描述. 需要指出的是, 拓扑来描述的物质态远不止这两类, 任何被“周期势”驱动的系统, 都可以定义拓扑^[10].

* 沙特阿卜杜拉国王科技大学基本科研经费 (批准号: BAS/1/1626-01-01) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ying.wu@kaust.edu.sa

这类用拓扑描述的物质态, 由于其在边界上具有鲁棒性的边界态, 在自旋电子学以及量子计算中拥有广阔的前景^[11-13]. 人们同时也考虑了其在光子和声子系统中的应用^[14-21]. 这里, 我们注意到光子和声子与电子主要有两点不同: 1) 电子对磁场有响应, 引入磁场可以打破时间反演对称性从而实现陈绝缘体, 而光子或者声子对外加磁场的响应不同^[15,16,22]; 2) 电子是费米子, 拥有半整数自旋, 而声子和光子是玻色子, 这两种粒子对于时间反演操作的响应是不同于费米子的, 因而通常在时间反演对称性的系统下没有Kramers简并, 也就不能简单地类比出自旋简并^[23-27].

本文考虑圆环波导组合而成的声子晶体系统^[28,29]. 通过在圆环中增加气流, 发现气流对声波传播的调制作用可以类比于磁场对电子的调制, 从而在声子系统中实现时间反演破缺. 同时, 采用特定的 C_{6v} 晶格, 通过晶格对称性来类比出Kramers简并, 构造出可以类比于电子系统中的自旋. 这个系统提供了一个很好的平台, 可以通过调节系统的几何参数或者外加气流强度, 类比出陈绝缘体或者拓扑绝缘体. 我们先实现声学中的拓扑绝缘体; 进一步地, 考虑在这个拓扑绝缘体系统中引入时间反演破缺, 通过理论计算以及数值模拟, 发现了一个新的拓扑相, 称作量子反常霍尔相(QAH)^[30,31], 可以用自旋陈数来描述. 不同于具有手性边界态(和自旋无关)的IQHE绝缘体以及具有一对螺旋形边界态的QSH绝缘体, 我们提出的QAH绝缘体, 它在边界上只有一支自旋锁定的手性边界态^[32]. 这支自旋锁定的手性边界态, 它无需时间反演对称性保护, 因此对于实现实际系统中的波的无损传播有很大的应用价值.

2 声子晶体系统模型与能带

我们的系统是一个二维三角晶格声子晶体: 它是一个刚性边界的环形波导网格结构, 其原胞是由六个固定内外半径的圆环以及固定宽度的矩形波导组合而成, 如图1(a)所示. 在这里取圆环的内半径为 $r_1 = 0.0875$ m, 外半径为 $r_2 = 0.125$ m, 矩形波导的宽度为 $d = 0.015$ m, 晶格常数为 $a = 1$ m, 同时设置圆环中心距离原胞中心的距离为一个可调节的变量 R .

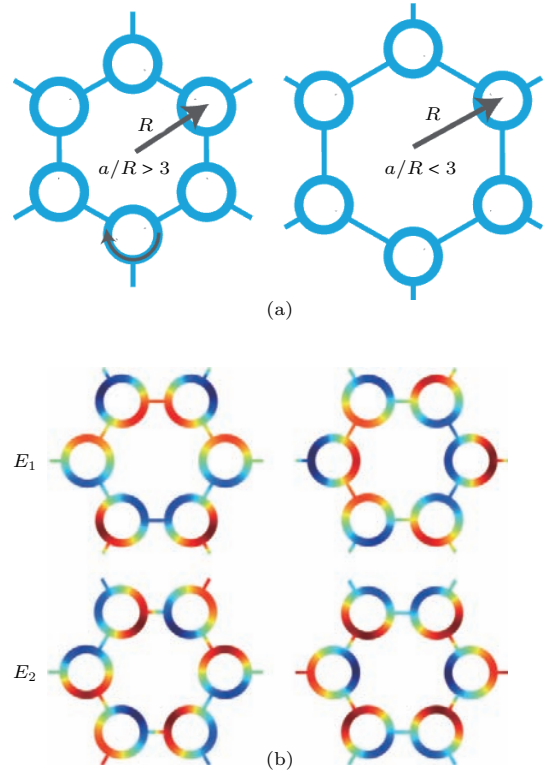


图1 圆环波导型声子晶体的原胞与本征态 (a) 圆环的内外半径分别为 $r_1 = 0.0875$ m, $r_2 = 0.125$ m, 圆环通过直径为 $d = 0.015$ m矩形波导的连接, 六个圆环构成声子晶体的原胞, 其晶格常数为 $a = 1$ m; 圆环内部引入顺时针旋转的气流, 气流的速度大小为 v , 圆环距离中心的距离 R 是个可以调节的参数; (b) 为图(a)所示的声子晶体的本征态, 可以通过对称性来分类, 其中 E_1 表示态对于 x 和 y 平面的镜像操作具有相反的宇称; E_2 表示态对于 x 和 y 平面的镜像操作具有相同的宇称

Fig. 1. The unit cell and eigenstate of the ring waveguide type phononic crystal: (a) The unit cell with lattice constant $a = 1$ m contains a hollow ring with inner and outer radii $r_1 = 0.0875$ m and $r_2 = 0.125$ m, respectively. Inside the ring, the air flows clockwise with a velocity field distribution $V = ve_\theta$, the distance between the ring and the center is R and is tunable; (b) four eigenstates at our interested frequency classified by symmetries.

周期性结构中声波可以写成布洛赫波的形式, 具有能带结构. 而从群论的角度来看, 其 Γ 点的波函数又和系统的对称性相关. 在三角晶格中, 任何一个 Γ 点的波函数都是 C_{6v} 群的一个不可约表示, 其中有两个是二维的, 分别为 E_1 表示和 E_2 表示. 如图1(b)所示, E_1 表示意味着态对于 σ_x 操作和 σ_y 操作具有相反的宇称, E_2 表示对应于态对 σ_x 操作和 σ_y 操作具有相同的宇称, 它们都是二重简并的^[33]. 这就意味着可以根据基本的 C_6 操作组合出一个反么正算符 T_s 满足 $T_s^2 = -1$, 正

是这个负号,使得我们可以根据二维不可约表示的两个态构造出赝自旋 ($E_1^\pm = (E_{11} \pm iE_{12})/\sqrt{2}$, $E_2^\pm = (E_{21} \pm iE_{22})/\sqrt{2}$)^[23], 具有这样赝自旋的准粒子可以类比为自旋 $-1/2$ 的费米子. 需要指出的是, 这个声子晶体是个玻色子系统, 其“费米子”的特性是和三角晶格对称性息息相关的^[34,35].

图 2 展示了 $a/R = 2.9$ 和 $a/R = 3.1$ 两种情况下的能带, 这里用 Γ 点的态来标记能带. 可以看到在 $a/R = 3.1$ 时, E_1 态的频率低于 E_2 态. 而增大 R 可以使得能带翻转, 从而 E_1 态的频率高于 E_2 态. $a/R = 3$, 就是一个临界点, 态 E_1 与态 E_2 构成一个二重简并的“双狄拉克锥”. 实际上在 $a/R = 3$ 时, 系统可以看成是一个复式六角晶格, 每个原胞里有两个圆环, 这个双狄拉克锥是由六角晶格 K 点处的狄拉克锥折叠形成的.

以这两个简并的态 (E_1 和 E_2) 为基, 可以根据其对称性构造出能带. 在二次量子化的框架下, 用紧束缚近似, 可以将系统的总能量表示为

$$\hat{H}_0 = \sum_{\hat{m}\hat{n}\alpha\beta} c_{\hat{m}\alpha}^\dagger t_{\hat{m}\hat{n}}^{\alpha\beta} c_{\hat{n}\beta},$$

其中 \hat{m} 和 \hat{n} 标记晶格位置, α 和 β 取值 (1, 2, 3, 4) 分别对应着态 ($E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$), $t_{\hat{m}\hat{n}}^{\alpha\beta}$ 描述了在格点 \hat{m} 的 α 态与格点 \hat{n} 的 β 态之间的耦合系数. 如果考虑周期性边界条件和最近邻相互作用, 那么将哈密顿量 \hat{H}_0 变换到 \mathbf{k} 空间, 采用新的表象 ($E_1^+, E_2^+, E_1^-, E_2^-$) 可以得到新的哈密顿量 $H_0(\mathbf{k})$, 在 Γ 点附近展开可以得到^[36]

$$H_0(\mathbf{k}) = A(\hat{\tau}_z k_y \hat{\sigma}_x - k_x \hat{\sigma}_y) + E_0 + Dk^2 + (M_0 - Bk^2)\hat{\sigma}_z, \quad (1)$$

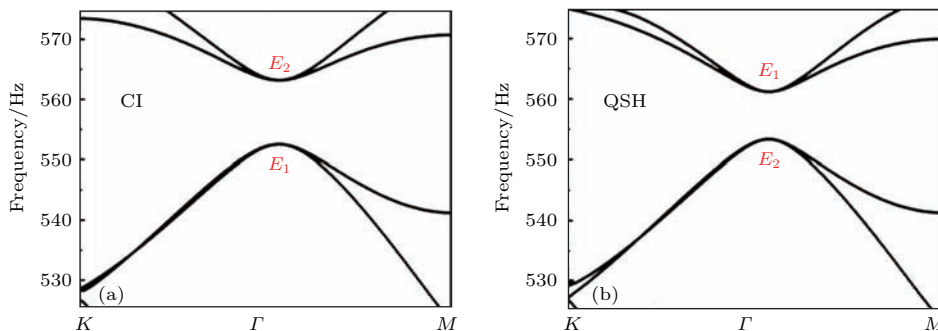


图 2 不引入气流下的两种声子晶体 (a) 参数 $a/R = 3.1$, E_1 态的频率低于 E_2 态, 系统是个普通绝缘体 (系统 I); (b) 参数 $a/R = 2.9$, E_1 态的频率高于 E_2 态, 系统是个量子自旋霍尔效应绝缘体 (系统 II)
 Fig. 2. Two phononic crystals without air flow: (a) The frequency of E_1 state is lower than E_2 state when $a/R = 3.1$, the system is a conventional insulator (system I); (b) the frequency of E_1 state is higher than E_2 state when $a/R = 2.9$, the system is a QSH insulator (system II).

这里 A, E_0, D, M_0, B 是通过耦合系数定义模型参数, 分别表示为:

$$\begin{aligned} E_0 &= (t_0^{11} + t_0^{33} + 3(t_1^{11} + t_1^{22} + t_1^{33} + t_1^{44}))/2, \\ D &= -3(t_1^{11} + t_1^{22} + t_1^{33} + t_1^{44})/8, \\ A &= 3(t_1^{14} + t_1^{23})/2, \\ M_0 &= (t_0^{11} - t_0^{33} + 3(t_1^{11} + t_1^{22} - t_1^{33} + t_1^{44}))/2, \\ B &= 3(t_1^{11} + t_1^{22} - t_1^{33} - t_1^{44})/8, \end{aligned}$$

其中 $t_r^{\alpha\beta}$ 为耦合系数, $r = 0$ 代表自身的耦合, $r = 1$ 代表与 x 方向最近邻的耦合. 用泡利矩阵 $\hat{\tau}$ 描述两个赝自旋, 用泡利矩阵 $\hat{\sigma}$ 描述两个带.

方程 (1) 描述的哈密顿量与描述 CdTe/HgTe/CdTe 量子阱的 Bernevig-Hughes-Zhang (BHZ) 模型类似^[37]. 在 BHZ 模型中, 系统蕴含着一个拓扑相变, 取决于 $M_0 B$ 的符号. 如果 $M_0 B < 0$, 系统是个普通的绝缘体, 如果 $M_0 B > 0$, 系统是个 QSH 绝缘体. 注意到在我们的系统中, $B > 0$, 因此系统具体处在哪个相, 可以由 M_0 的符号来决定, 而 M_0 的符号与 E_1 态和 E_2 态的相对频率有关. 如图 2 所示, 如果 E_1 态的频率低于 E_2 态, 系统是个普通绝缘体; 如果 E_1 态的频率高于 E_2 态, 系统是个 QSH 绝缘体.

下面研究自旋简并破缺的情形下系统的拓扑相的转变. 这里采用在圆环中加顺时针方向气流的方式破缺系统的时间反演对称性来破缺自旋简并, 气流速度分布如下式:

$$\mathbf{v}(x, y) = \left(\frac{vy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-vx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -v\mathbf{e}_\theta, \quad (2)$$

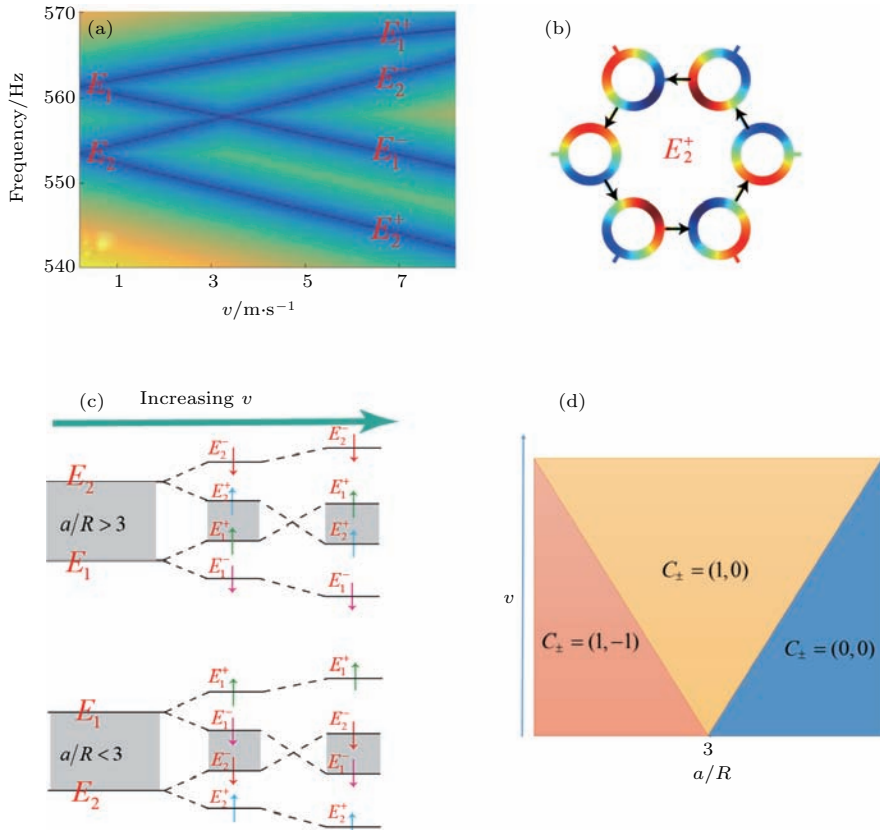


图3 (a) 引入气流后, Γ 点的本征态随着外加气流的变化; (b) 引入气流后, 系统的对称性从 C_{6v} 降到 C_6 , 可以用其矩形波导内部能流的方向类比为自旋, 这里定义逆时针能流为自旋向上; (c) 考虑两种声子晶体系统, 随着外加气流变化, 其能带演化的示意图, 其中灰色区域代表全带隙, 随着气流的增大, 可以看到能带的闭合与翻转; (d) 系统的拓扑相图, 改变参数 R 和外加气流强度 v , 系统一共呈现三个相, 分别用不同自旋陈数表示

Fig. 3. (a) The change of eigenfrequencies at the Γ point as functions of the introduced external airflow; (b) the illustration of pseudo-spin up component when we introduce the airflow that breaks the TR symmetry and changes the symmetry of the system from C_{6v} to C_6 ; (c) a schematic of the evolution of the band under an increasing external airflow V , gray area indicates a bandgap; there are two initial phases: (i) a conventional insulator phase when $a/R > 3$; (ii) a QSH phase when $a/R < 3$; increasing V splits the degeneracies of pseudospins, resulting in a gap closing and reopening process; (d) a schematic diagram to illustrate the topological phase transitions in our system. the three distinct phases are classified by different spin Chern numbers.

这里 e_θ 是沿着逆时针方向的单位矢量, v 是速度场的幅值. 这时声波在引入气流的系统中的传播可以由如下方程描述:

$$-\frac{\rho}{c^2}i\omega(i\omega\phi + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi) + \nabla \cdot \left(\rho\nabla\phi - \frac{\rho}{c^2}(i\omega\phi + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi)\mathbf{v} \right) = 0, \quad (3)$$

其中 ϕ 是速度势, ρ 和 c 是空气的密度和声速, ω 是声波角频率, \mathbf{v} 是 (2) 式描述的环形气流速度场分布. 这个新引入的速度场, 将系统的点群对称性从 C_{6v} 降低到 C_6 . 如图 3(b) 所示, 赝自旋态 E_1^\pm 和 E_2^\pm 的对称性是和 C_6 群的不可约表示一致的. 在这里用矩形波导内部逆时针声能流代表自旋向上的态. 气流引入的同时使得原本简并的能级劈裂,

E_1 态和 E_2 态的简并都被打开, 赝自旋态 E_1^\pm 和 E_2^\pm 的频率发生变化. 考虑 $a/R = 2.9$ 的情形, 随着圆环内气流的增大, 声波在圆环内的本征频率发生改变, 利用商业有限元软件 COMSOL 计算原胞本征频率随着气流的变化 (图 3(a)). 可以看出其中自旋向上的 E_1^+ 态与自旋向下的 E_2^- 态频率升高, 自旋向下的 E_1^- 态与自旋向上的 E_2^+ 态频率降低. 同时, 由于叠加原理, 圆环的本征频率随着气流有一个线性的变化关系, 这导致原胞的本征频率变化与气流也呈图 3(a) 所示的线性关系. 这也暗示了气流对应的速度场可以看作塞曼效应中引入的磁矢势 [22].

将引入的气流视作对系统的一个微扰, 其哈密顿量可以写为

$$H_z = \begin{pmatrix} z_{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_{E_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_{E_2} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

这里, 对赝自旋态 E_1^\pm 而言, 其分裂强度为 $2z_{E_1}$, 对赝自旋态 E_2^\pm 而言, 其分裂强度为 $2z_{E_2}$. 因为带 E_1 和带 E_2 的“有效质量”是相反的, 所以 $z_{E_1}z_{E_2} < 0$. 考虑到外加气流的方向, 在这个系统里, 有 $z_{E_1} > 0$, $z_{E_2} < 0$.

先研究在外加气流下能带的翻转情况. 如图 3(c) 所示, 先考虑 $a/R > 3$ 的情形, 根据前面的分析, 当外加气流为 0 时系统处于普通绝缘体, 而当气流逐渐增大, 能带将发生劈裂, 同时系统的带隙会渐渐闭合, 直到外加气流达到某个临界值之后再打开, 图中灰色区域代表着全带隙. 我们的讨论同样适用于 $a/R < 3$ 的情形, 这种带隙在外加气流的作用下闭合又打开的过程, 暗示着系统可能经历一个拓扑相变. 下面先通过理论分析来研究系统的拓扑相的转变过程.

3 拓扑不变量与相图

首先用泡利矩阵重新描述引入气流后的微扰哈密顿量:

$$H_z = (z_{E_1} - z_{E_2})\hat{\tau}_z\hat{\sigma}_z/2 + (z_{E_1} + z_{E_2})\hat{\sigma}_z/2.$$

根据理论分析以及模拟结果, 发现外加气流导致的 E_1^\pm 态与 E_2^\pm 态的劈裂是接近的, 因此可以认为 $z_{E_1} = -z_{E_2}$, 并且引入 $g_0 = (z_{E_1} - z_{E_2})/2$, 可以得到

$$\begin{aligned} H(\mathbf{k}) &= H_0(\mathbf{k}) + H_z(\mathbf{k}) \\ &= E_0 + Dk^2 + (M_0 - Bk^2)\hat{\sigma}_z + A(\hat{\tau}_z k_y \hat{\sigma}_x - k_x \hat{\sigma}_y) \\ &\quad + g_0 \hat{\tau}_z \hat{\sigma}_z. \end{aligned} \quad (5)$$

现在研究这个哈密顿量所描述的物理模型中的拓扑. $g_0 \hat{\tau}_z \hat{\sigma}_z$ 这一项打破了系统的时间反演对称性. 当 $g_0 = 0$, 即不加气流时, 这个受时间反演对称性保护的系统可以由 Z_2 拓扑数或者自旋陈数来描述. 它可以将具有量子自旋霍尔效应的绝缘体和普通绝缘体区分开来. 当 $g_0 \neq 0$, 即打破时间反演对称性之后, 自旋陈数的鲁棒性仍然保持不变, 而 Z_2 拓扑数却不能定义^[32]. 因此在本文的系统中, 我们采用自旋陈数作为拓扑不变量来研究系统的拓扑转变.

在计算(5)式中的拓扑不变量之前, 先介绍描述电子在 Bi_2Se_3 薄膜中运动的有效哈密顿量 $H_1(\mathbf{k})$: $H_1(\mathbf{k}) = E_0 + Dk^2 + (M_0 - Bk^2)\hat{\sigma}_z + [A(k_y \hat{\sigma}_x - k_x \hat{\sigma}_y)]\hat{\tau}_x$, 其自旋陈数可以解析求得^[32,38]:

$$C_\pm = \pm [\text{sgn}(B) + \text{sgn}(M_0)]/2. \quad (6)$$

接下来对(5)式所描述的哈密顿量进行一个么正变化, 得到新的哈密顿量 $H_s(\mathbf{k}) = S^\dagger H(\mathbf{k})S$, 其中

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

比较哈密顿量 $H_s(\mathbf{k})$ 和 $H_1(\mathbf{k})$ 的本征值与本征矢量, 可以发现如下对应关系:

$$E_s(M_0, g_0) = E_1(M_0 \pm g_0),$$

$$\Psi_s(M_0, g_0) = \Psi_1(M_0 \pm g_0).$$

我们知道, 自旋陈数的求解仅仅依赖于本征值以及对应的本征矢量, 因此可以将(6)式中的 M_0 替换为 $M_0 \pm g_0$. 从而得到哈密顿量 $H(\mathbf{k})$ 的自旋陈数的表达式:

$$C_\pm = \pm [\text{sgn}(B) + \text{sgn}(M_0 \pm g_0)]/2. \quad (7)$$

在我们的系统中, $B > 0$, 改变圆环离中心的距离 R 会调节 M_0 的符号, g_0 的符号由气流的方向决定. 固定气流的方向使得 $g_0 > 0$, 增大外加气流的速度 V 会增大 g_0 . 通过(7)式, 可以将系统分为几个相(如图 3(d) 所示):

1) 普通绝缘体相, 如图 2(a) 所示, $M_0 < 0$, $g_0 < |M_0|$, 这时有 $C_\pm = (0, 0)$;

2) 量子自旋霍尔效应相, 如图 2(b) 所示, $M_0 > 0$, $g_0 < |M_0|$, 这时有 $C_\pm = (1, -1)$;

3) 量子反常霍尔效应相, 如图 4 所示, 取 $v = 8 \text{ m/s}$, 这时有 $g_0 > |M_0|$, 考虑两种情形 $M_0 < 0$ (图 4(a)) 和 $M_0 > 0$ (图 4(b)), 都有 $C_\pm = (1, 0)$.

从以上的分析中不难看出, 对于某个特定的赝自旋, 如果其自旋陈数取值为 0, 则对应于平庸的绝缘体, 如果其自旋陈数取值为非零, 那就是个非平庸的绝缘体. 这意味着如果用这两种绝缘体构造出一个边界, 那么边界上将存在着边界态, 这个边界态会和特定的自旋相关. 下面通过有限元软件模拟, 来验证边界上的边界态与自旋的关系.

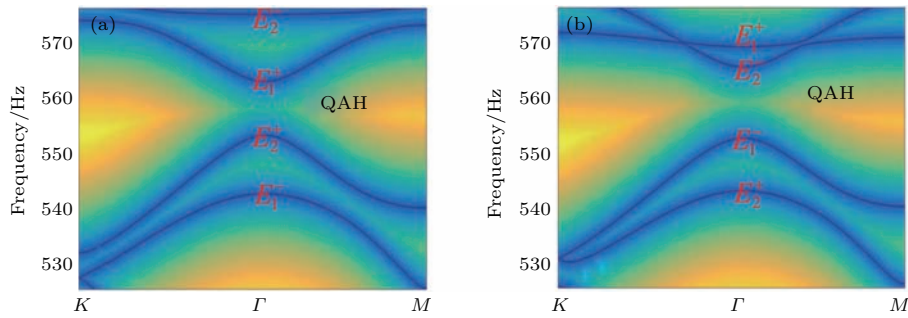


图4 引入顺时针强度为 $v = 8 \text{ m/s}$ 的气流下的两种声子晶体 (a) $a/R = 3.1$ (系统 III); (b) $a/R = 2.9$ (系统 IV); 与图 2 相比, 这两种声子晶体也在 560 Hz 附近呈现全带隙, 不同之处在于这两种声子晶体可以等价于量子反常霍尔效应 (QAH) 绝缘体, 其自旋陈数为 $C_{\pm} = (1, 0)$

Fig. 4. Two phononic crystals with $v = 8 \text{ m/s}$: (a) $a/R = 3.1$ (system III); (b) $a/R = 2.9$ (system IV). Compared with Fig. 2, all of these phononic crystals have a global bandgap around 560 Hz, and the difference is that these two phononic crystals are topologically identical to QAH insulators with $C_{\pm} = (1, 0)$.

4 超原胞与边界态

构造了两个声子晶体系统来研究边界态的情况. 第一个声子晶体是由图 2 (a) 的普通绝缘体 (系统 I) 和图 4 (b) 的 QAH 绝缘体 (系统 IV) 组成的三明治结构, 其超原胞由 20 个原胞组成, 每个超原

胞含有两个界面. 两种绝缘体在 560 Hz 附近拥有共同的带隙, 计算得到其投影能带, 可以发现有两条边界态, 这两条边界态分别对应着两条边界, 如图 5 (a) 所示. 根据先前的理论分析, 普通绝缘体的自旋陈数为 $C_{\pm} = (0, 0)$, 而 QAH 绝缘体的自旋陈数为 $C_{\pm} = (1, 0)$. 因此对于自旋向下的态而言, 其自旋陈数都为 $C_{-} = 0$, 系统 I 和系统 IV 对于自

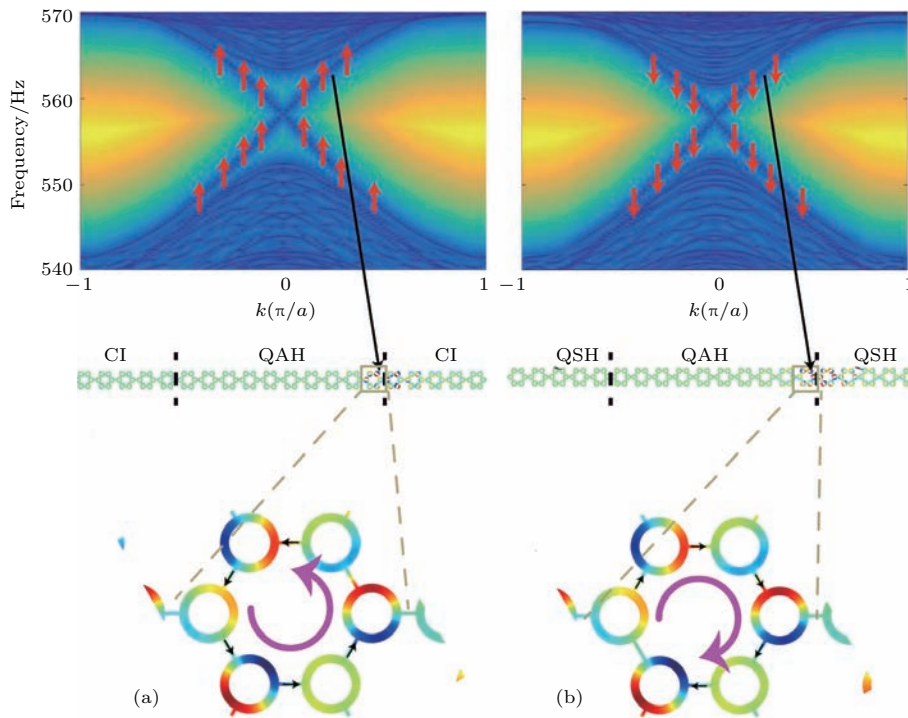


图5 超原胞边界态 (a) 用图 2 (a) 中的声子晶体 I 和图 4 (b) 中的声子晶体 IV 构造出的新的声子晶体系统, 共包含 20 个原胞, 其投影能带色散关系, 图中显示了系统在边界上支持向右传播的自旋向上的边界态; (b) 系统由图 2 (b) 中的声子晶体 II 和图 4 (b) 中的声子晶体 IV 组成, 图中显示了系统在边界上支持向右传播的自旋向下的边界态

Fig. 5. Projected band structures and edge states: (a) Dispersion relation for a ribbon-shaped 2D topological phononic crystal with 20 unit cells formed by systems I and IV, it shows the edge state with counterclockwise acoustic energy flux on the right interface, the pink arrows represent the pseudospins; (b) the same as (a) but for systems II and IV. It shows the edge state with clockwise acoustic energy flux.

旋向下的态而言都是个平庸的绝缘体, 在边界上没有自旋向下的态; 而对于自旋向上的态而言, 系统 I 的自旋陈数为 0, 系统 III 的自旋陈数为 1, 因此在边界上有一条边界态. 如图 5 (a) 所示, 观察边界态的场分布, 可以发现单胞里矩形波导的声强呈逆时针分布, 对应于定义中的自旋向上的态.

类似的分析同样适用于第二个声子晶体, 它是由图 2 (b) 的 QSH 绝缘体 (系统 II) 和图 4 (b) 的 QAH 绝缘体 (系统 IV) 组成的三明治结构, 两种绝缘体也在 560 Hz 附近拥有共同的带隙. 同样地, 根据先前的理论分析, QSH 绝缘体的自旋陈数为 $C_{\pm} = (1, -1)$, 因此对于自旋向上的态而言, 系统 II 和系统 IV 在拓扑上是等价的, 都有 $C_+ = 1$; 而对于自旋向下的态, 它们在拓扑上不等价, 如图 5 (b) 所示, 可以观察到自旋向下的边界态. 在这里强调一点, 虽然对于自旋向上的态而言, 系统 II 和 IV 都是拓扑非平庸的, 但是由于它们在拓扑上等价, 所以并没有自旋向上的边界态出现.

5 波的传播特性

从超原胞色散分析可以发现, 如果用系统 I 或者系统 II 与系统 IV 构成一个界面, 那么这个界面会支持边界态的传播, 并且这个边界态是和自旋相关的. 我们通过商业有限元软件 COMSOL 模拟波的传播特性来验证这一点. 先构造一个由系统 I 和系统 IV 组成的界面, 其原胞数目为 20×20 , 整个系统的边界是自由辐射边界. 如图 6 (a) 所示, 在界面处引入声源之后, 可以很明显地发现声波朝右传播, 进一步分析传播的态可以发现, 这个态是自旋向上的. 实际上这里采用的声源包含自旋向上与自旋向下两个分量, 但是这个界面只支持向右传播的自旋向上的分量, 如果采用自旋向下的声源, 整个系统会展示出带隙行为.

同时研究了系统 II 与系统 IV 构成的界面, 整个系统尺寸大小和先前一致. 同样的分析也适用于这个系统: 对于自旋向上的分量而言, 系统 II 与系统 IV 都有 $C_+ = 1$, 于是他们在拓扑上是等价的; 而对于自旋向下的分量, 两者在拓扑上是不等价的, 因此如图 6 (b) 所示, 这个界面只支持向右传播的自旋向下的边界态.

需要指出的是, 这里发现的自旋向上或者自旋向下的边界态与之前在陈绝缘体或者量子自旋

霍尔效应绝缘体都不同. 陈绝缘体在边界上有手性的 (chiral) 边界态, 这个边界态是包含两个自旋的; 量子自旋霍尔效应绝缘体在边界上有螺旋形的 (helical) 边界态, 这两条边界态根据不同的自旋分为沿着逆时针和顺时针方向传播. 但是在本文的系统中得到的边界态只有一条, 且只有一个自旋, 因此可以称为自旋锁定的手性边界态.

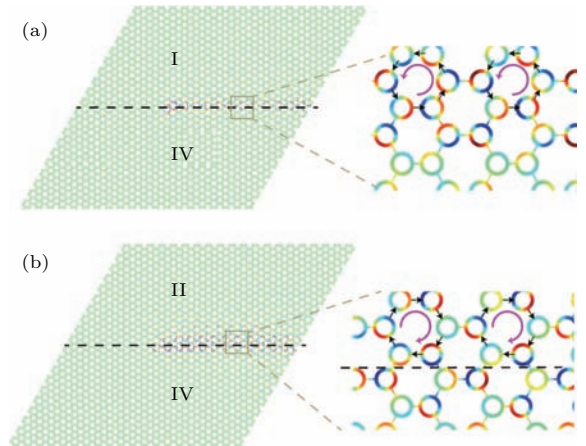


图 6 单向传播的边界态 (a) 考虑由声子晶体 I 和 IV 构成的界面, 对于自旋向上分量而言, 其拓扑不等价, 因此如果用普通的声源在界面中间激发声波, 可以观测到向右传播的自旋向上的边界态; (b) 考虑由声子晶体 II 和 IV 构成的界面, 对于自旋向下分量而言, 其拓扑不等价, 因此激发出来的边界态的自旋是向下的

Fig. 6. One way propagation interface state: (a) Consider the interface between systems I and IV, they are topologically distinct for pseudo-spin up component and can observe the right propagating interface state with pseudo-spin up component; (b) consider the interface between systems II and IV, they are topologically distinct for pseudospin down component which gives rise to the right propagating interface state with pseudospin down component.

6 结 论

提出了一个具有多重拓扑相的二维声子晶体系统. 首先通过特定的晶格对称性在声子晶体这个玻色子系统中构造出可以类比于费米子的半整数赝自旋, 通过调控晶格内部结构参数, 使得赝自旋简并的能带发生翻转, 实现了普通绝缘体到量子自旋霍尔效应的转变. 然后通过进一步引入时间反演对称性破缺的外加气流, 打破赝自旋的简并, 引入了一个新的量子反常霍尔效应拓扑相. 通过紧束缚近似理论模型得出系统可以等价于时间反演对称性破缺下的量子自旋霍尔效应, 并且理论计算了系统的自旋陈数. 解析结果表明系统的拓扑性质是和

自旋相关的,同时研究了波的传播特性,证实了理论预言的自旋锁定的手性边界态.期望本研究为无需时间反演对称性保护的自旋传播指明一个新的方向.

参考文献

- [1] John S 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2486
- [2] Yablonovitch E 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059
- [3] Klitzing K V, Dorda G, Pepper M 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 494
- [4] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405
- [5] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 226801
- [6] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
- [7] König M, Wiedmann S, Brüne C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp L W, Qi X L, Zhang S C 2007 *Science* **318** 766
- [8] Qi X L, Wu Y S, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. B* **74** 085308
- [9] Prodan E 2009 *Phys. Rev. B* **80** 125327
- [10] Kitagawa T, Berg E, Rudner M, Demler E 2010 *Phys. Rev. B* **82** 235114
- [11] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [12] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [13] Moore J E 2010 *Nature* **464** 194
- [14] Haldane F D M, Raghu S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013904
- [15] Wang Z, Chong Y D, Joannopoulos J D, Soljačić M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013905
- [16] Khanikaev A B, Hossein Mousavi S, Tse W K, Kargarman M, MacDonald A H, Shvets G 2013 *Nat. Mater.* **12** 233
- [17] Rechtsman M C, Zeuner J M, Plotnik Y, Lumer Y, Podolsky D, Dreisow F, Nolte S, Segev M, Szameit A 2013 *Nature* **496** 196
- [18] Lu L, Joannopoulos J D, Soljačić M 2014 *Nat. Photon.* **8** 821
- [19] Yang Z, Gao F, Shi X, Lin X, Gao Z, Chong Y, Zhang B 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 114301
- [20] Xiao M, Ma G, Yang Z, Sheng P, Zhang Z Q, Chan C T 2015 *Nat. Phys.* **11** 240
- [21] Lu J, Qiu C, Ke M, Liu Z 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 093901
- [22] Fleury R, Sounas D L, Sieck C F, Haberman M R, Alù A 2014 *Science* **343** 516
- [23] Wu L H, Hu X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 223901
- [24] He C, Sun X C, Liu X P, Lu M H, Chen Y, Feng L, Chen Y F 2016 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **113** 4924
- [25] Zhang Z, Wei Q, Cheng Y, Zhang T, Wu D, Liu X 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 084303
- [26] Xu L, Wang H X, Xu Y D, Chen H Y, Jiang J H 2016 *Opt. Express* **24** 18059
- [27] He C, Ni X, Ge H, Sun X C, Chen Y B, Lu M H, Liu X P, Chen Y F 2016 *Nat. Phys.* **12** 1124
- [28] Ni X, He C, Sun X C, Liu X P, Lu M H, Feng L, Chen Y F 2015 *New J. Phys.* **17** 053016
- [29] Chen Z G, Wu Y 2016 *Phys. Rev. Appl.* **5** 054021
- [30] Haldane F D M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015
- [31] Liu C X, Qi X L, Dai X, Fang Z, Zhang S C 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 146802
- [32] Li H, Sheng L, Shen R, Shao L B, Wang B, Sheng D N, Xing D Y 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 266802
- [33] Chen Z G, Ni X, Wu Y, He C, Sun X C, Zheng L Y, Lu M H, Chen Y F 2014 *Sci. Rep.* **4** 4613
- [34] Alexandradinata A, Fang C, Gilbert M J, Bernevig B A 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 116403
- [35] Liu C X, Zhang R X, van Leeuwen B K 2014 *Phys. Rev. B* **90** 085304
- [36] Sakoda K 2012 *Opt. Express* **20** 3898
- [37] Liu C X, Qi X L, Zhang H, Dai X, Fang Z, Zhang S C 2010 *Phys. Rev. B* **82** 045122
- [38] Chen Z G, Mei J, Sun X C, Zhang X, Zhao J, Wu Y 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043827

SPECIAL TOPIC — Topological classical waves

Multiple topological phases in phononic crystals*

Chen Ze-Guo Wu Ying[†]

(King Abdullah University of Science and Technology (KAUST), Division of Computer, Electrical and Mathematical Science and Engineering (CEMSE) Thuwal, 23955-6900, Saudi Arabia)

(Received 31 July 2017; revised manuscript received 27 October 2017)

Abstract

We report a new topological phononic crystal in a ring-waveguide acoustic system. In the previous reports on topological phononic crystals, there are two types of topological phases: quantum Hall phase and quantum spin Hall phase. A key point in achieving quantum Hall insulator is to break the time-reversal (TR) symmetry, and for quantum spin Hall insulator, the construction of pseudo-spin is necessary. We build such pseudo-spin states under particular crystalline symmetry (C_{6v}) and then break the degeneracy of the pseudo-spin states by introducing airflow to the ring. We study the topology evolution by changing both the geometric parameters of the unit cell and the strength of the applied airflow. We find that the system exhibits three phases: quantum spin Hall phase, conventional insulator phase and a new quantum anomalous Hall phase.

The quantum anomalous Hall phase is first observed in phononics and cannot be simply classified by the Chern number or \mathbb{Z}_2 index since it results from TR-broken quantum spin Hall phase. We develop a tight-binding model to capture the essential physics of the topological phase transition. The analytical calculation based on the tight-binding model shows that the spin Chern number is a topological invariant to classify the bandgap. The quantum anomalous Hall insulator has a spin Chern number $C_{\pm} = (1, 0)$ indicating the edge state is pseudo-spin orientation dependent and robust against TR-broken impurities.

We also perform finite-element numerical simulations to verify the topological differences of the bandgaps. At the interface between a conventional insulator and a quantum anomalous Hall insulator, pseudo-spin dependent one-way propagation interface states are clearly observed, which are strikingly different from chiral edge states resulting from quantum Hall insulator and pairs of helical edge states resulting from quantum spin Hall insulator. Moreover, our pseudo-spin dependent edge state is robust against TR-broken impurities, which also sheds lights on spintronic devices.

Keywords: phononic crystal, topology, quantum anomalous Hall effect

PACS: 78.67.Pt, 03.65.Vf, 73.20.At

DOI: [10.7498/aps.66.227804](https://doi.org/10.7498/aps.66.227804)

* Project supported by King Abdullah University of Science and Technology Baseline Research Fund (Grant No. BAS/1/1626-01-01).

[†] Corresponding author. E-mail: ying.wu@kaust.edu.sa