

负参数空间分数阶 Chua 系统的动力学行为及实验验证

胡串 李志军 陈茜茜

Dynamics analysis and circuit implementation of fractional-order Chua's system with negative parameters

Hu Chuan Li Zhi-Jun Chen Xi-Xi

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), **66**, 230502 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.230502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.230502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I23>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

利用混沌激光脉冲在线实时产生 7 Gbit/s 物理随机数

[Online real-time 7 Gbit/s physical random number generation utilizing chaotic laser pulses](#)

物理学报.2017, 66(5): 050501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.050501>

基于混沌系统的 SM4 密钥扩展算法

[SM4 key scheme algorithm based on chaotic system](#)

物理学报.2017, 66(2): 020504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.020504>

三维空间域多普勒功率谱及其多天线系统性能

[Doppler power spectrum density and multi-antenna system performance in three-dimensional environment](#)

物理学报.2014, 63(24): 240507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240507>

基于改进的统计信道模型与多天线系统性能分析

[Geometrical statistical channel model and performance investigation for multi-antenna systems in wireless communications](#)

物理学报.2014, 63(14): 140506 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.140506>

基于扩展混沌映射的认证密钥协商协议

[An authenticated key agreement protocol based on extended chaotic maps](#)

物理学报.2014, 63(5): 050507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.050507>

负参数空间分数阶 Chua 系统的动力学行为 及实验验证*

胡串 李志军[†] 陈茜茜

(湘潭大学信息工程学院, 湘潭 411105)

(2017年7月20日收到; 2017年8月14日收到修改稿)

Chua 系统展现出丰富的动力学行为, 易于电路实现, 因而成为混沌研究的经典范例. 然而, 现有针对 Chua 系统的研究大都局限于系统的正参数空间. 基于分数阶的时域求解法, 研究了分数阶 Chua 系统在负参数空间下的动力学行为. 采用分数阶稳定性理论分析了系统平衡点的稳定性, 用分岔图、最大李雅普诺夫指数研究了系统控制参数和阶次变化时系统的动力学行为. 为了实验验证系统的动力学行为, 采用运放、电阻、电容等模拟器件实现了负参数空间下的分数阶 Chua 系统, 实验结果与数值仿真结果完全一致. 该研究成果对进一步完善 Chua 系统, 推动 Chua 系统在混沌中的应用具有参考价值.

关键词: 分数阶, Chua 系统, 负参数空间, 混沌电路

PACS: 05.45.Vx, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.66.230502

1 引言

分数阶微积分理论和整数阶微积分理论都起源于17世纪, 但由于分数阶微积分理论缺乏充分的几何解释和实际应用背景, 发展缓慢. 自1960年以来, 随着计算机技术的快速发展和实际物理系统表现出分数阶动态特性, 分数阶微积分逐渐成为国际范围内的研究热点, 并在一些领域得到了广泛的应用^[1-4].

近年来, 混沌系统的动力学分析、硬件实现及其在混沌保密通信中的应用已成为非线性科学研究领域的热点问题^[5], 分数阶混沌系统也得到了广泛的研究, 相继证明了一些经典混沌系统的分数阶系统同样能展现混沌行为, 如 Chua 系统、Chen 系统、Lorenz 系统、Duffing 系统、Sport 系统、Lu 系统^[6-8]. 这些研究促进了分数阶微积分的发展和混沌理论体系的进步, 其中 Chua 系统由于具有简单的电路结构, 能展现丰富的动力学行为, 自提出

以来得到了许多研究者的关注^[9,10]. 然而, 现有针对 Chua 系统整数阶和分数阶的研究大都局限于正参数空间, 即系统的控制参数全部大于0. 文献^[11]研究了正参数空间下 Chua 系统的功能全同电路与拓扑等效电路; 文献^[12]利用基于符号函数的注入反馈式方法研究了正参数空间下 Chua 系统的同步控制问题; 文献^[13]提出并研究了正参数空间下的一种新的无感电路实现 Chua 系统; 文献^[14, 15]分别用 Adomian 分解法和离散化法研究了正参数空间下的分数阶 Chua 系统的分叉和混沌特性; 文献^[16]对正参数空间下的分数阶 Chua 系统的可控性进行了研究; 文献^[17, 18]研究了正参数空间下分数阶 Chua 系统的同步问题. 由于负参数 Chua 电路的实现需要一个负电容或者负电感, 物理上存在不可实现性, 因而负参数空间下 Chua 系统缺乏理论依据且不利于实验观察, 导致人们忽略了对负参数空间下 Chua 系统的研究. 文献^[19]提出了一种电子模拟方法, 使研究负参数空间 Chua 系统成为可能. 在文献^[19]的基础上, 文献^[20]对负参

* 国家自然科学基金(批准号: 61176032, 61471310)和湖南省自然科学基金(批准号: 2015JJ2142, 2015JJ2140)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: lizhijun@xtu.edu.cn

数空间下的整数阶 Chua 系统进行了详细的研究, 表明整数阶 Chua 系统在负参数空间下的 Shilnikov 条件不成立, 能展现与正参数空间下 Chua 系统完全不同的动力学行为. 然而到目前为止, 对负参数空间下分数阶 Chua 系统的动力学行为研究鲜有报道.

基于此, 本文利用分数阶时域求解法对负参数空间下 Chua 系统的动力学行为进行研究. 首先导出负参数空间下分数阶 Chua 系统的动力学方程, 其次对系统平衡点的稳定性进行分析. 随后采用分岔图、最大李雅普诺夫指数研究系统控制参数和阶次变化时系统的动力学行为, 结果发现负参数空间下分数阶 Chua 系统依然具有较丰富的动力学行为. 最后基于文献 [19,20] 的设计方法, 用模拟运放电路实现了负参数空间下的分数阶 Chua 系统, 通过实验观察并验证了系统的动力学行为.

2 负参数分数阶 Chua 系统

2.1 负参数分数阶 Chua 系统

分数阶 Chua 系统由 Hartley 等 [21] 建立于 1995 年, 其数学表达式为

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = a[-x(t) + y(t) - f(x)], \\ \frac{d^\beta y(t)}{dt^\beta} = x(t) - y(t) + z(t), \\ \frac{d^\gamma z(t)}{dt^\gamma} = -by(t), \end{cases} \quad (1)$$

式中 α, β, γ 代表系统中微分方程分数阶的阶数, a, b 为系统控制参数, $f(x)$ 为系统的非线性函数. $f(x)$ 可表示为

$$f(x) = m_0 x + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|x + 1| - |x - 1|), \quad (2)$$

式中 m_0, m_1 均为非线性函数的斜率.

显然, 当 a 和 b 取正数时, 系统 ((1) 式) 对应正参数空间下的分数阶 Chua 系统; 当 a 和 b 取负数, 且 (2) 式中非线性函数的斜率 m_0, m_1 均为负值时, 系统 ((1) 式) 中所有参数均为负值, 即系统对应负参数空间下的分数阶 Chua 系统.

2.2 负参数分数阶 Chua 系统求解

分数阶微积分是整数阶微积分的推广, 整数阶微积分是分数阶微积分的一种特殊情况. 分

数阶微积分在其发展过程中有若干种形式的定义, 理论分析中最常用的有 Riemann-Liouville 定义、Grünwald-Letnikov 定义和 Caputo 定义. 本文采用 Grünwald-Letnikov 定义对系统进行分析.

定义 1 Grünwald-Letnikov(G-L) 定义的分数阶微积分为

$${}_c D_t^q f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-q} \sum_{j=0}^{\lceil \frac{t-c}{h} \rceil} (-1)^j \binom{q}{j} f(t - jh), \quad (3)$$

式中 h 为积分时间步长, q 为阶数, $[\cdot]$ 表示取整, c 为微分下限, t 为微分上限. 对定义 1 进行简化可得时域求解算法为

$$\begin{aligned} {}_0 D_{t_k}^q f(t) &\approx h^{-q} \sum_{j=0}^k -1^j \binom{q}{j} f(t_{k-j}) \\ &= h^{-q} \sum_{j=0}^k c_j^{(q)} f(t_{k-j}), \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $k = 1, 2, \dots, N$, 此时 $N = [T_s/h]$, T_s 为仿真时间, t_k 为计算步长, $c_j^{(q)}$ 为二项式系数, 可以表示为

$$c_0^{(q)} = 1, \quad c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)}. \quad (5)$$

根据 (4) 式和 (5) 式可得负参数分数阶 Chua 系统的求解公式为

$$\begin{cases} x(t_k) = a \{ -x(t_k) + y(t_k) - f[x(t_k)] \} h^\alpha \\ \quad - \sum_{j=0}^k c_j^{(\alpha)} x(t_{k-j}), \\ y(t_k) = [x(t_k) - y(t_k) + z(t_k)] h^\beta \\ \quad - \sum_{j=0}^k c_j^{(\beta)} y(t_{k-j}), \\ z(t_k) = [-by(t_k)] h^\gamma - \sum_{j=0}^k c_j^{(\gamma)} z(t_{k-j}). \end{cases} \quad (6)$$

目前, 分数阶微积分的求解方法还有很多, 但绝大多数方法是将分数阶近似成整数阶的形式, 通过整数阶的方法来求解. 工程上最常用的方法是时频域转换法, 如牛顿近似法、分数阶系统的波德图形逼近法、Laplace 变换法. 本文采用的时域求解法可以将误差控制到最小的范围内, 同时不损失分数阶的固有特性, 是最为准确的 [22].

3 负参数空间分数阶 Chua 系统动力学特性分析

3.1 平衡点稳定性分析

(1) 式的非线性项是一个分段线性函数, 所以可以将相空间划分为三个线性区域来分析. 三个区域分别为

$$\begin{cases} D_1 = \{(x, y, z) | x > 1\}, \\ D_0 = \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 1\}, \\ D_{-1} = \{(x, y, z) | x < -1\}. \end{cases} \quad (7)$$

令 (1) 式等号右边表达式为 0, 可得

$$\begin{cases} a[-x(t) + y(t) - f(x)] = 0, \\ x(t) - y(t) + z(t) = 0, \\ -by(t) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

由 (8) 式可求得系统的平衡点为

$$\begin{cases} P \left(\frac{m_0 - m_1}{m_0 + 1}, 0, -\frac{m_0 - m_1}{m_0 + 1} \right) \in D_1, \\ O(0, 0, 0) \in D_0, \\ Q \left(-\frac{m_0 - m_1}{m_0 + 1}, 0, \frac{m_0 - m_1}{m_0 + 1} \right) \in D_{-1}, \end{cases} \quad (9)$$

则 O, P, Q 三个平衡点对应的雅可比矩阵为

$$J(O) = \begin{bmatrix} a(-1 - m_1) & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$J(P) = J(Q) = \begin{bmatrix} a(-1 - m_0) & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

当 $a = -5.5, b = -1.5, m_0 = -8/7, m_1 = -5/7$ 时, 平衡点 O 的特征值为 $\lambda_{O1} = 0.228, \lambda_{O2, O3} = -1.007 \pm 2.052i$. 平衡点 P, Q 的特征值为 $\lambda_1 = -0.762, \lambda_{2,3} = 0.644 \pm 1.708i$. 根据分数阶稳定性理论 [23] 可知, 对于分数阶混沌系统, 如果系统雅可

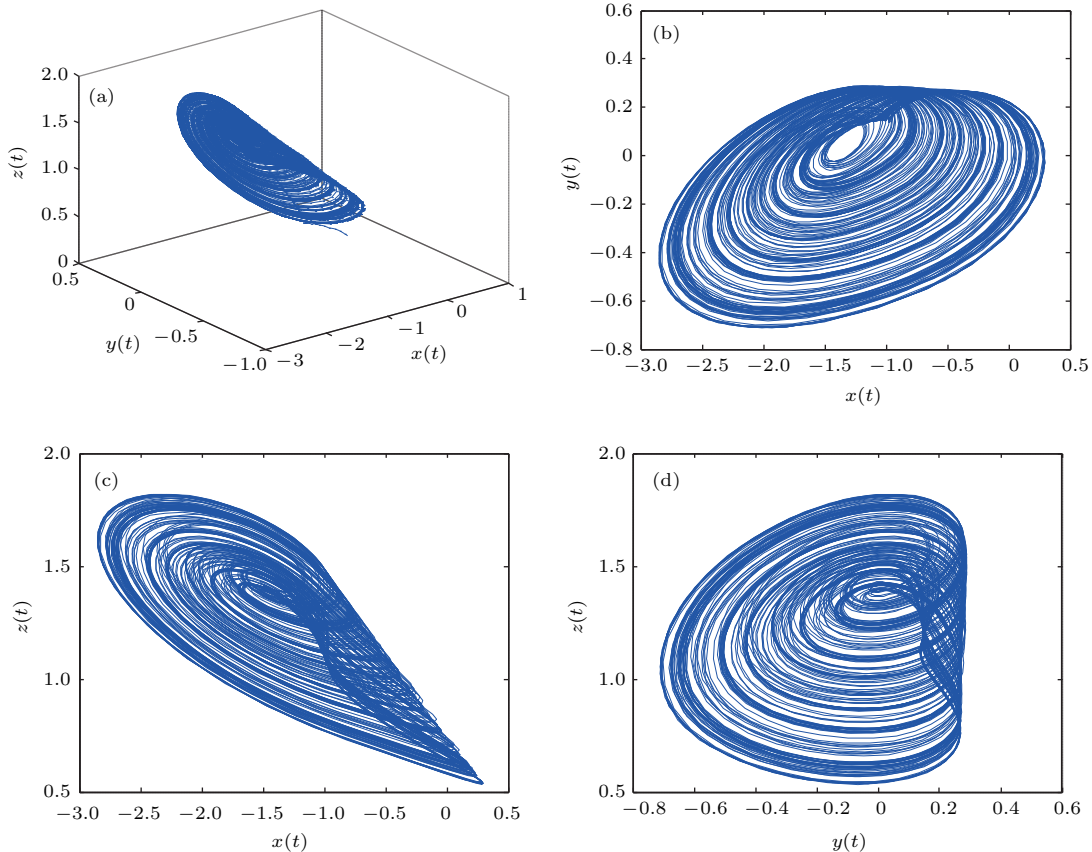


图1 负参数空间分数阶 Chua 系统数值仿真结果 (a) 混沌吸引子; (b) x - y 相图; (c) x - z 相图; (d) y - z 相图
 Fig. 1. Numerical simulation results of fractional-order Chua system in negative parameter space: (a) Chaotic attractor; (b) x - y phase portrait; (c) x - z phase portrait; (d) y - z phase portrait.

比矩阵任意特值满足 $|\arg(\lambda)| > q\pi/2$, 则系统渐近稳定. 显然, 当 $q = 0.98$ 时, 特征根 $\lambda_{2,3} = 0.644 \pm 1.708i$ 不满足此条件, 因此系统 ((1) 式) 处于不稳定状态. 根据 (6) 式, 采用上述系统参数, 并取系统初值为 $(0.2 \ -0.1 \ 0.1)$, 利用 MATLAB 仿真分析得到图 1 所示混沌吸引子, 其中图 1(b)—图 1(d) 分别为该吸引子在 x - y , x - z 和 y - z 平面的投影.

3.2 与阶次相关的动力学行为分析

为了进一步研究分数阶 Chua 系统在负参数空间下的动力学行为, 分析了不同分数阶阶次对系统的影响. 设 $\alpha = \beta = \gamma = q$, 其他参数保持为 $a = -5.5, b = -1.5, m_0 = -8/7, m_1 = -5/7$, 当 q 由小到大变化时, 系统的分岔图如图 2 所示. 从图 2(a) 可以看出, 在负参数空间下分数阶 Chua 系

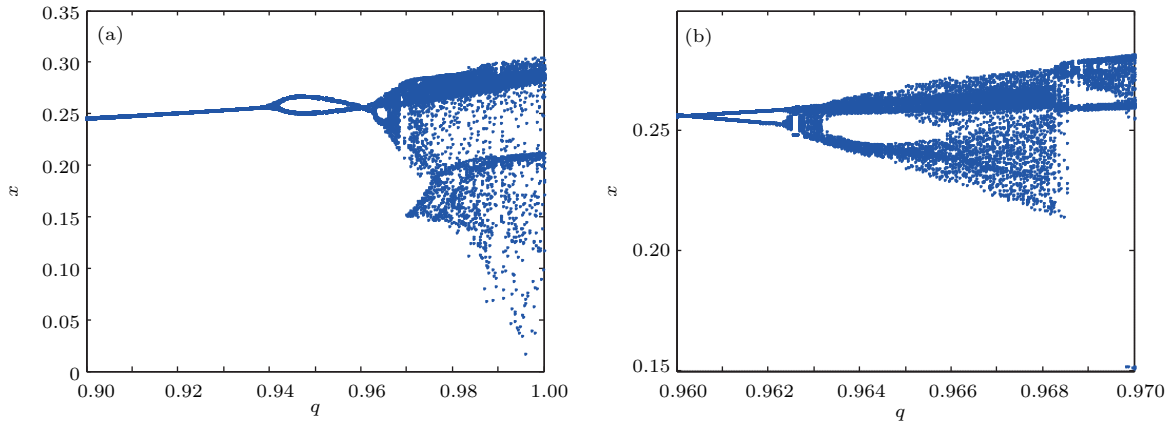


图 2 分数阶阶数变化时系统的分岔图 (a) $q \in [0.9, 1]$; (b) $q \in [0.96, 0.97]$

Fig. 2. Bifurcation diagram of system depending on q : (a) $q \in [0.9, 1]$; (b) $q \in [0.96, 0.97]$.

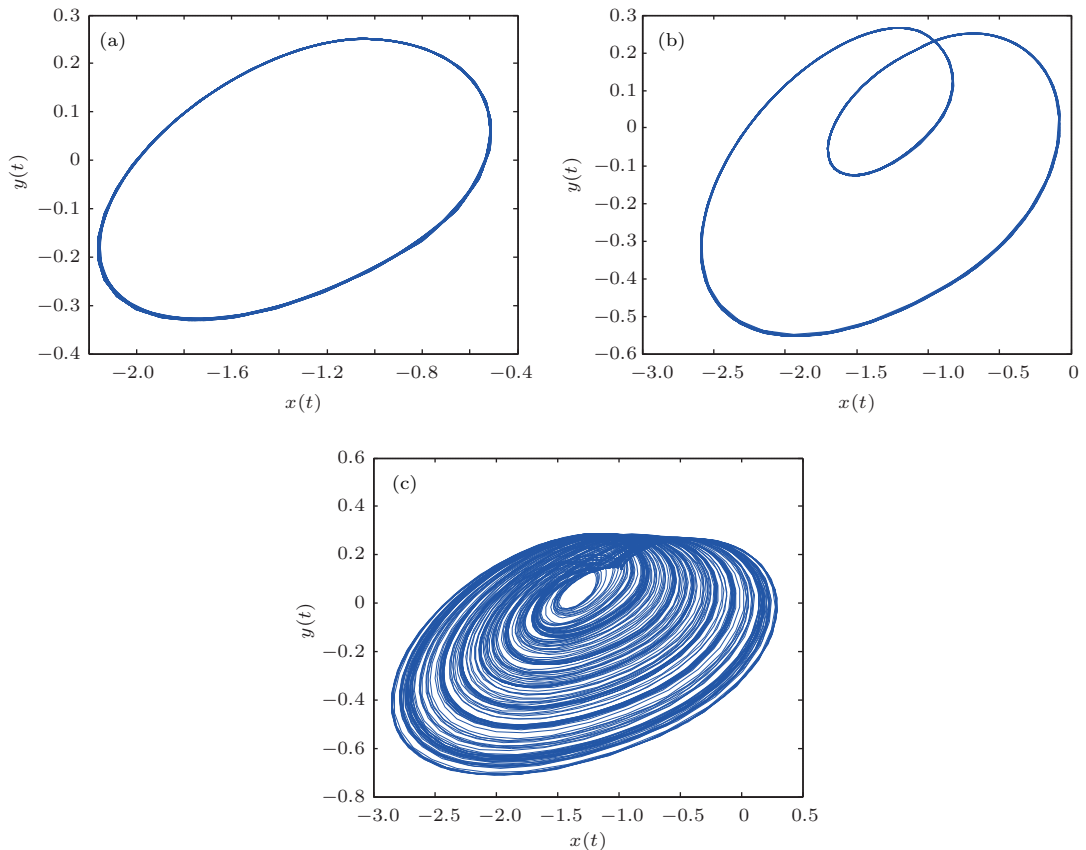


图 3 与阶次 q 相关的相图 (a) $q = 0.92$; (b) $q = 0.95$; (c) $q = 0.98$

Fig. 3. Phase diagrams depending on q : (a) $q = 0.92$; (b) $q = 0.95$; (c) $q = 0.98$.

统由倍周期分叉进入混沌. 为了更好地观察系统混沌的最小阶数, 在此对 q 为 0.96—0.97 的窗口进行扩展, 如图 2(b) 所示. 从图 2(b) 可以看出, 负参数空间下系统产生混沌的最小阶数为 2.889, 即 $\alpha = \beta = \gamma = 0.963$. 当 q 分别为 0.92, 0.95, 0.98 时, 数值仿真得到的相图如图 3 所示. 从上述结果可以看出, 在负参数空间下系统随 q 的增加由倍周期分岔进入混沌态.

3.3 与控制参数相关的动力学行为分析

通过最大李雅普诺夫指数和分岔图对系统随控制参数 b 变化的动力学行为进行研究, 其中分数阶最大李雅普诺夫指数是利用分数阶时域求解法得到系统方程解的时间序列, 然后通过时间序列的李雅普诺夫指数定义法求解方法计算求解得到. 取 $\alpha = \beta = \gamma = 0.98$, $a = -5.5$, $m_0 = -8/7$, $m_1 = -5/7$, 参数 b 作为系统的控制参数. 当 b 在

$[-2, -1.25]$ 范围内变化时, 系统的最大李雅普诺夫指数和分岔图分别如图 4(a) 和图 4(b) 所示. 由图 4 可知, 随着 b 在 $[-2, -1.25]$ 区间内变化, 系统出现了前倍周期分叉、后倍周期分叉、混沌态、周期态等多种动力学现象. 当 $b = -2$ 时, 系统最大李雅普诺夫指数等于 0, 展现出图 5(a) 所示周期 1 吸引子. b 继续增大到 -1.96 时, 系统突然展现出单环面混沌吸引子, 其相图如图 5(b) 所示. 随后系统进入一个狭窄的周期窗. 当 $b = -1.85$ 时, 系统产生了图 5(c) 所示的周期 3 吸引子. 当 $b \in [-1.84, -1.42]$ 时, 系统对应的最大李雅普诺夫指数一直大于 0, 即系统一直处于混沌状态. 当 $b = -1.52$ 时系统产生的一个单螺旋混沌吸引子如图 5(d) 所示. 当控制参数 $b > -1.42$ 时, 系统突然由混沌状态经逆倍周期分叉进入周期态, 对应的多周期、周期 2 和周期 1 吸引子分别如图 5(e)—图 5(g) 所示.

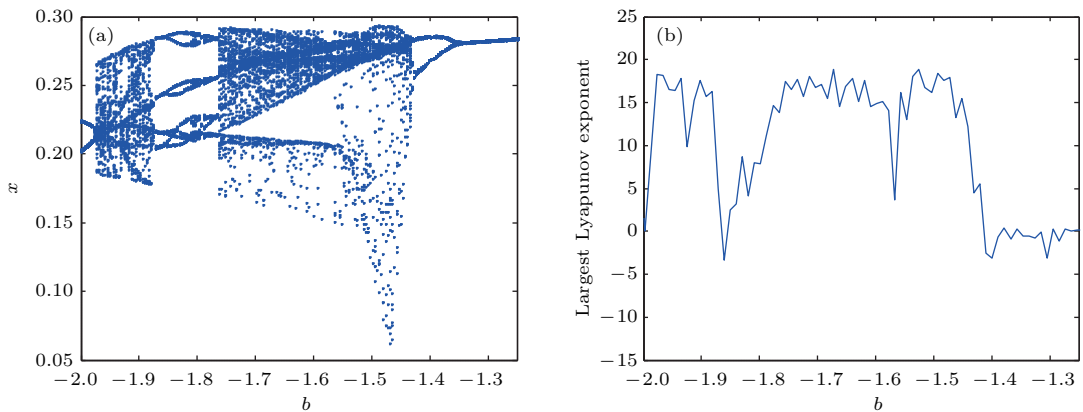


图 4 (a) 分岔图; (b) 最大李雅普诺夫指数

Fig. 4. (a) Bifurcation diagram; (b) diagram of largest Lyapunov exponent.

4 硬件实验测试

4.1 分数阶积分电路单元

分数阶电路是在整数阶电路的基础上, 用分数阶积分电路单元等效替换整数阶的积分电容. 设 $\alpha = \beta = \gamma = 0.98$, 则阶数为 0.98、逼近误差为 1 dB 的积分算子的传递函数表达式为^[6].

$$H(s) = \frac{1}{s^{0.98}} = \frac{1.2974(s + 1125)}{(s + 1423)(s + 0.01125)}, \quad (12)$$

式中 s 代表复频域, 同时表示积分算子的自变量. 相应的分数阶等效积分单元电路如图 6 所示, 其传递函数可表示为

$$H(s) = \frac{R_a}{sR_aC_b + 1} + \frac{R_b}{sR_aC_b + 1}. \quad (13)$$

对比 (12) 式和 (13) 式可以确定电路参数 $R_a = 91.19 \text{ M}\Omega$, $R_b = 190.93 \text{ }\Omega$, $C_a = 0.9753 \text{ }\mu\text{F}$, $C_b = 3.68 \text{ }\mu\text{F}$. 根据文献[24]可知, 为了能在普通的示波器中观察到吸引子相图, 需要提高信号频率, 故将电容减小为 $C_a = 0.9753 \text{ nF}$, $C_b = 3.68 \text{ nF}$.

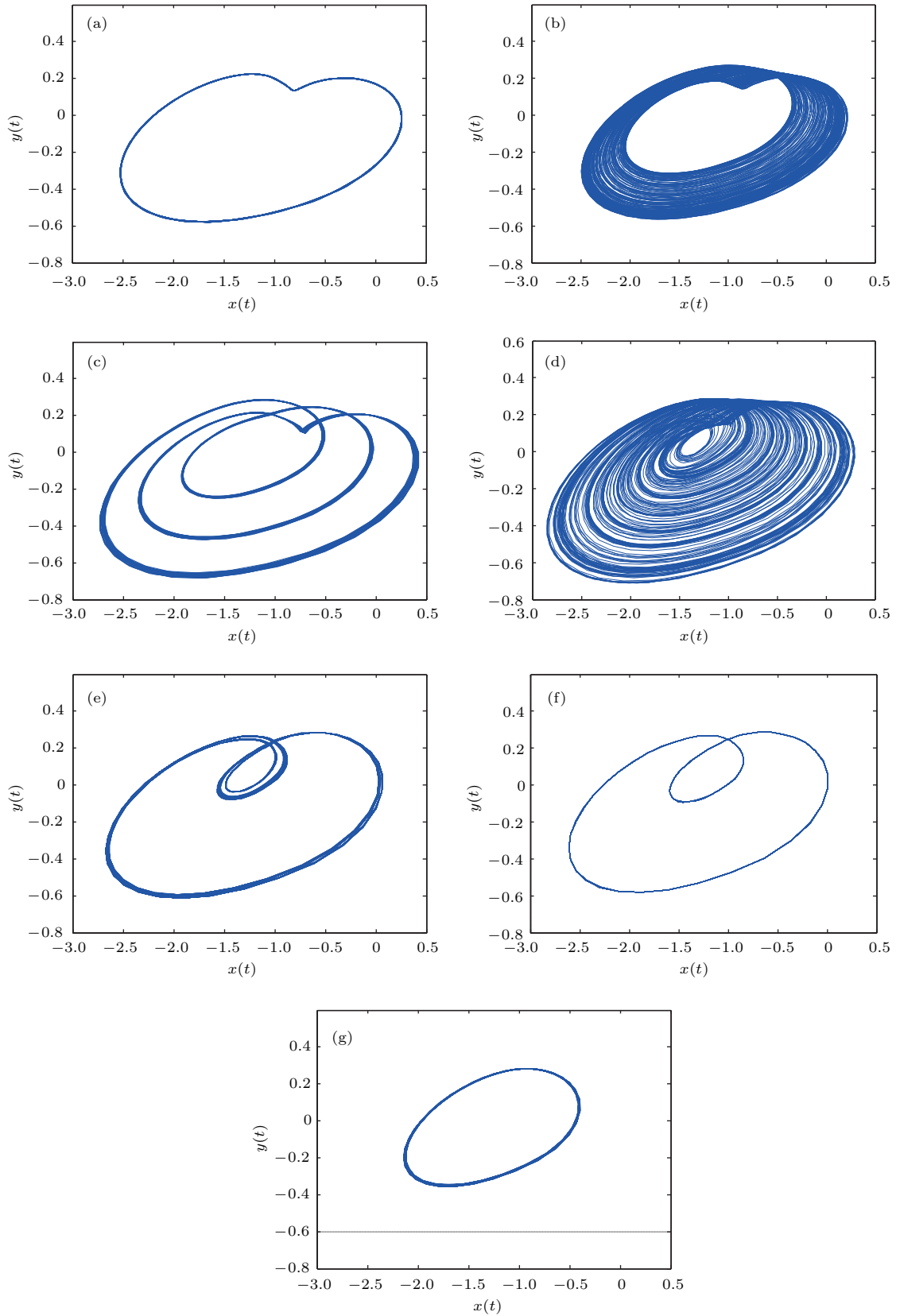


图5 与控制参数 b 相关的相图 (a) $b = -2$; (b) $b = -1.96$; (c) $b = -1.85$; (d) $b = -1.52$; (e) $b = -1.43$; (f) $b = -1.4$; (g) $b = -1.3$

Fig. 5. Phase portraits dependent on system control parameter b : (a) $b = -2$; (b) $b = -1.96$; (c) $b = -1.85$; (d) $b = -1.52$; (e) $b = -1.43$; (f) $b = -1.4$; (g) $b = -1.3$.

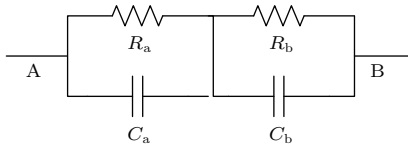


图6 实现 $1/s^q$ 的单元电路 ($q = 0.98$)

Fig. 6. Realization of $1/s^q$ unit circuit ($q = 0.98$).

4.2 负参数空间分数阶 Chua 电路

为了验证负参数空间下分数阶 Chua 系统的动力学行为, 采用集成运放 (TL074)、精密电阻、瓷片电容实现了 0.98 阶次的负参数分数阶 Chua 系统, 整体电路如图 7 所示, 其对应电路状态方程为

$$\begin{cases} \frac{d^{0.98}V_1}{dt^{0.98}} = -\frac{R_{10}}{R_9} \frac{1}{C} \left[-\frac{V_1}{R_{11}} + \frac{V_2}{R_8} - \frac{f(V_1)}{R_{12}} \right], \\ \frac{d^{0.98}V_2}{dt^{0.98}} = \frac{1}{C} \left(\frac{V_1}{R_7} - \frac{V_2}{R_{22}} + \frac{V_3}{R_6} \right), \\ \frac{d^{0.98}V_3}{dt^{0.98}} = -\frac{R_2}{R_3} \frac{1}{C} \left(-\frac{R_4}{R_5} \frac{V_2}{R_1} \right), \\ f(V_1) = -\frac{R_{14}}{R_{13}} V_1 + \frac{1}{2} \left[-\frac{R_{14}R_{15}}{R_{13}(R_{14} + R_{15})} \right. \\ \left. + \frac{R_{14}}{R_{13}} \right] (|V_1 - B_p| - |V_1 + B_p|). \end{cases} \quad (14)$$

图 7 中非线性函数 $f(V_1)$ 电路由电阻 R_{13}, R_{14}, R_{15} 和蓝色发光二极管 LED1, LED2 构成, 其斜率可以分别表示为 $m_0 = -R_{14}/R_{13}$ 和 $m_1 = -R_{14}R_{15}/(R_{13}R_{14} + R_{13}R_{15})$. 电阻取值为 $R_{13} = 10 \text{ k}\Omega, R_{14} = 11.3 \text{ k}\Omega, R_{15} = 18.7 \text{ k}\Omega$ 时, 可以计算出 $m_0 = -8/7, m_1 = -5/7$. B_p 为蓝色发光二极管压降, 通常为 2.2 V. 三个分数阶电容分别由 $R_{16}, R_{17}, C_1, C_2, R_{18}, R_{19}, C_3, C_4$ 和 R_{20}, R_{21}, C_5, C_6 实现, (14) 式中用 C 表示. 通过电路分析可以得出系统控制参数 a, b 与电路参数的关系为 $a = -35R_{10}/R_9, b = -35R_2/R_3$. 当 R_9 和 R_3 固定, 则调节电阻值 R_{10} 和 R_2 可以分别实现系统参数 a 和 b 的调节. 经计算, 当其他电路参数为 $R_1 = 8.93 \text{ k}\Omega, R_4 = R_5 = 10 \text{ k}\Omega, R_6 = 3.92 \text{ k}\Omega, R_7 = 6.17 \text{ k}\Omega, R_8 = 5.68 \text{ k}\Omega, R_{22} = 34.48 \text{ k}\Omega, R_{11}=R_{12} = 1 \text{ k}\Omega, R_3 = R_9 = 10 \text{ k}\Omega$ 时, (14) 式所描述的电路方程可以正确模拟负参数空间 Chua 系统, 即 (1) 式表示的系统.

为了验证图 7 所示电路的动力学行为, 采用泰克 MSO3032 混合示波器和双路直流稳压电源对设计的电路进行硬件测试. 实验过程中, 首先调节 $R_{10} = 1.57 \text{ k}\Omega$, 对应系统参数 $a = -5.5$, 其他电路

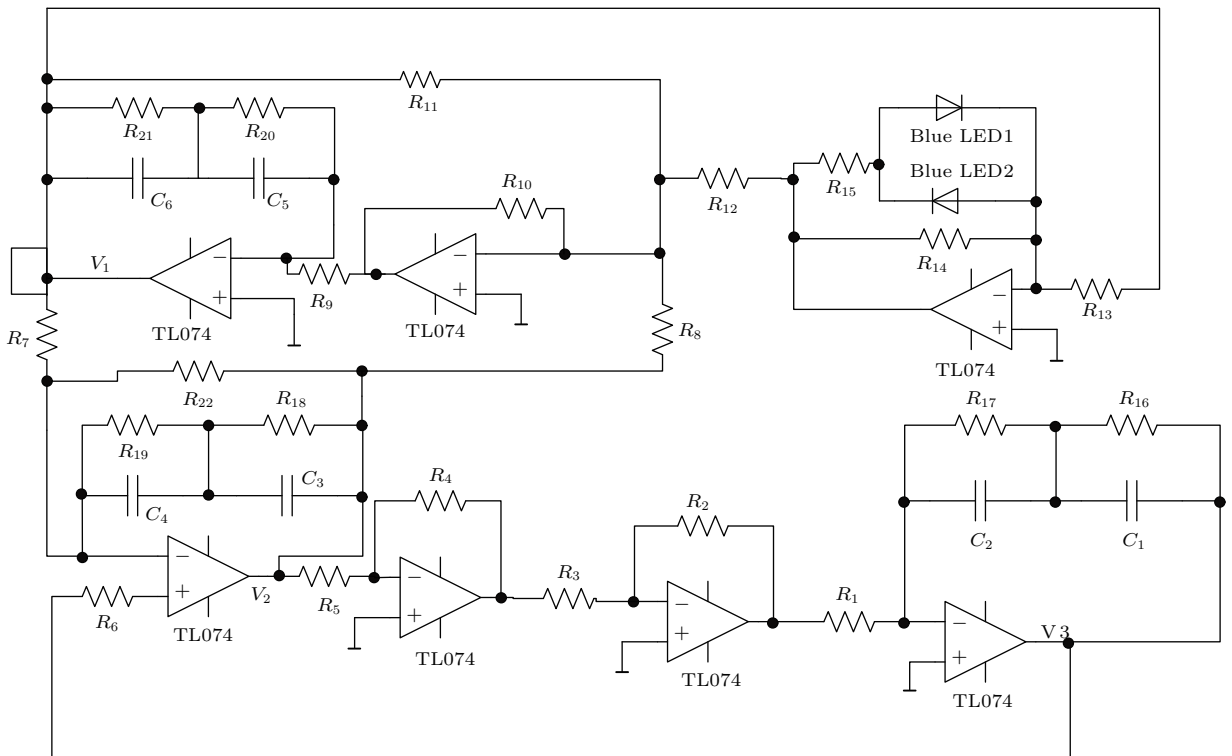


图7 分数阶负参数 Chua 系统模拟电路

Fig. 7. Complete simulation circuit of fractional-order Chua's system with negative parameters.

参数保持不变, 通过调节精密可调电阻的值 R_2 (对应系统控制参数 b) 来观察系统的动力学行为. 当 $R_2 = 370 \Omega$ 时, 电路产生单周期振荡, 示波器俘获的相图如图 8(a) 所示. 当 R_2 进一步增加到 390Ω 时, 电路突然从单周期转变到周期 2, 随后电路展现了多周期态 ($R_2 = 410 \Omega$). 进一步增加

R_2 到 430Ω 时, 电路产生了单螺旋混沌行为. 将图 8(a)—图 8(d) 分别与图 5(g)、图 5(f)、图 5(e)、图 5(d) 相比, 可以发现电路实验测试结果与数值仿真结果完全一致, 从物理实验角度证明了分数阶 Chua 系统在负参数空间下同样能展现丰富的动力学行为.

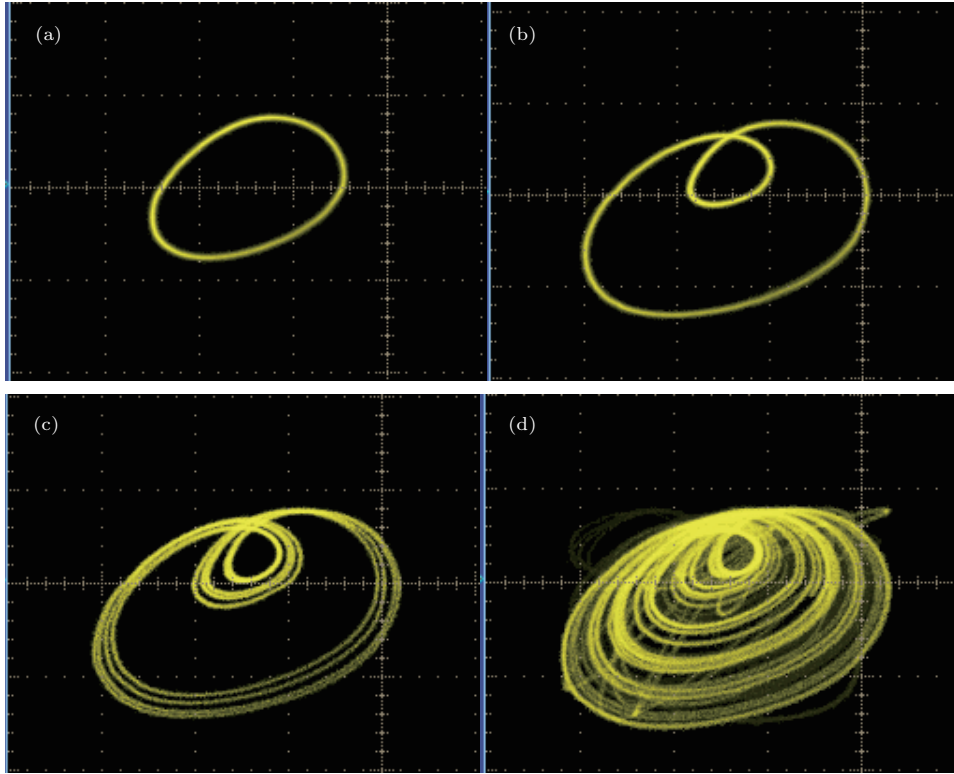


图 8 实验测试结果 (a) 单周期吸引子; (b) 周期 2 吸引子; (c) 多周期吸引子; (d) 混沌吸引子

Fig. 8. Experimental results: (a) Period-1 attractor; (b) period-2 attractor; (c) multiple-period attractor; (d) chaotic attractor.

5 结 论

作为一个经典的混沌系统, Chua 系统得到了广泛而深入的研究, 然而现有针对 Chua 系统的研究大都局限于正参数空间 (包括整数阶和分数阶). 本文采用常规的动力学分析方法, 如平衡点稳定性、相图、分岔图和最大李雅普诺夫指数, 对负参数空间下分数阶 Chua 系统的动力学行为进行了数值仿真. 仿真发现在负参数空间下分数阶 Chua 系统展现出前倍周期分叉、后倍周期分叉、单螺旋状吸引子、周期态等复杂动力学现象. 值得注意的是, 在负参数空间下分数阶 Chua 系统并没有展现出典型的 Chua 双涡卷混沌吸引子. 本文采用 Grünwald-Letnikov 定义对负参数空间分数阶 Chua 系统的动

力学进行分析, 对于其他分数阶定义同样可以获得类似的动力学行为. 这是由于对于相当广的一类实际函数而言, 三种分数阶定义可以看作是近似等效的, 本文系统方程 ((1) 式) 就是这样一类实际函数. 为了用实验验证系统的动力学行为, 本文基于模块化设计电路模拟实现了负参数空间分数阶 Chua 系统. 实验测试结果与数值仿真结果完全一致, 从物理实验角度验证了分数阶 Chua 系统在负参数空间中的动力学行为. 将 Chua 系统的控制参数延拓到负参数空间, 通过数值仿真和硬件实验观察了分数阶 Chua 系统在负参数空间下的一系列动力学现象. 研究成果进一步丰富了 Chua 系统的动力学行为, 为研究分数阶混沌系统的控制, 同步提供新的模型, 推动 Chua 系统在实际工程中的应用将起到积极的作用. 本文仅探讨了负参数空间分数

阶 Chua 系统的动力学行为, 其混沌产生机理、系统参数识别及工程应用有待进一步深入研究.

参考文献

- [1] He S B, Sun K H, Banerjee S 2016 *Eur. Phys. J. Plus.* **131** 254
- [2] Liu X J, Hong L, Jiang J 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 180502 (in Chinese) [刘晓君, 洪灵, 江俊 2016 物理学报 **65** 180502]
- [3] Li C L, Zhang J 2016 *Int. J. Syst. Sci.* **47** 2440
- [4] Lin F F, Zeng Z Z 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 090504 (in Chinese) [林飞飞, 曾喆昭 2017 物理学报 **66** 090504]
- [5] Li Z J, Zeng Y C, Li Z B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 010502 (in Chinese) [李志军, 曾以成, 李志斌 2014 物理学报 **63** 010502]
- [6] Shao S Y, Min F H, Ma M L, Wang E R 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 130504 (in Chinese) [邵书义, 闵富红, 马美玲, 王恩荣 2013 物理学报 **62** 130504]
- [7] Xi H L, Yu S M, Zhang R X, Xu L 2014 *Optik* **125** 2036
- [8] He S B, Sun K H, Wang H H 2016 *Math. Meth. Appl. Sci.* **39** 2965
- [9] Bao B C, Wang N, Chen M, Xu Q, Wang J 2016 *Non-linear Dyn.* **84** 511
- [10] Li Z J, Ma M L, Wang M J, Zeng Y C 2017 *Int. J. Electron. Commun.* **71** 21
- [11] Zhang X G, Sun H T, Zhao J L, Liu J Z, Ma Y D, Han T W 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 200503 (in Chinese) [张新国, 孙洪涛, 赵金兰, 刘冀钊, 马义德, 韩廷武 2014 物理学报 **63** 200503]
- [12] Ma M L, Min F H, Shao S Y, Huang M Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 010507 (in Chinese) [马美玲, 闵富红, 邵书义, 黄苗玉 2014 物理学报 **63** 010507]
- [13] Banerjee T 2012 *Nonlinear Dyn.* **68** 565
- [14] Cafagna D, Grassi G 2008 *Int. J. Bifurcation Chaos* **18** 615
- [15] Agarwal R P, El-Sayed A M A, Salman S M 2013 *Adv. Differ. Equ-NY* **1** 320
- [16] Zhang H, Chen D Y, Zhou K, Wang Y C 2015 *Chin. Phys. B* **24** 030203
- [17] Zhu H, Zhou S, Zhang J 2009 *Chaos Solitons Fract.* **39** 1595
- [18] Li C P, Deng W H, Xu D 2006 *Physica A* **36** 171
- [19] Rocha R, Medrano T R O 2009 *Nonlinear Dyn.* **56** 389
- [20] Medrano T R O, Rocha R 2014 *Int. J. Bifurcation Chaos* **24** 1430025
- [21] Hartly T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans. CAS I* **42** 485
- [22] Zhu H 2007 *M. S. Dissertation* (Chongqing: Chongqing University) (in Chinese) [朱浩 2007 硕士学位论文 (重庆: 重庆大学)]
- [23] Hu J B, Zhao L D 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 240504 (in Chinese) [胡建兵, 赵灵冬 2013 物理学报 **62** 240504]
- [24] Sun K H, Yang J L, Ding J F, Sheng L Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8385 (in Chinese) [孙克辉, 杨静利, 丁家峰, 盛利元 2010 物理学报 **59** 8385]

Dynamics analysis and circuit implementation of fractional-order Chua's system with negative parameters*

Hu Chuan Li Zhi-Jun[†] Chen Xi-Xi

(College of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

(Received 20 July 2017; revised manuscript received 14 August 2017)

Abstract

Because of simple schematic structure and complex dynamical behaviors, the Chua's system is considered as a paradigm for chaos research. Despite a great many of studies relating to the Chua's system, most of them focus on its positive parameter space. This is explained by the fact that the implementation of the Chua's circuit with negative parameters needs resistors, inductances and/or capacitors with negative values, and thus leads to physical impossibility. In order to extend the parameter space of the Chua's system to its negative side, where all system parameters are negative, an equivalent realization of the Chua's circuit is developed with off-the-shelf electronic components by an electronic analogy method. Recently, the research of fractional-order chaotic systems has received considerable interest. However, the theoretical and experimental studies of the fractional-order Chua's system with negative parameters are still lacking. In this study, we set up a model of the fractional-order Chua's system in negative parameter space. The stability of all equilibrium points is investigated with the fractional-order stability theory. Based on the Grünwald-Letnikov derivative, the dynamical behaviors dependent on the control parameter and the fractional orders are investigated by standard nonlinear analysis techniques including phase portraits, the largest Lyapunov exponents, and bifurcation diagrams. In order to further verify the dynamic behaviors of the fractional-order Chua's system with negative parameters, an experimental implementation of the Chua's circuit with negative parameters based on an electronic analogy is performed with off-the-shelf electronic components such as operational amplifiers, resistors and capacitors. The experimental tests are conducted on the resulting circuit. A period-doubling bifurcation route to chaos is successfully observed and some typical phase diagrams are captured by an oscilloscope, which are well consistent with theoretical analyses and numerical simulations. The numerical simulations and the experimental results show that the fractional-order Chua's system in negative parameter space can still exhibit rich dynamical behaviors. But it is worth noting that the classical double-scroll chaotic attractor emerging in a conventional Chua's system cannot be found in this system. This work focuses mainly on the dynamical behaviors of the fractional-order Chua's system with negative parameters, which was not reported previously. Thus the research results of this study will further enrich the dynamical behaviors of the Chua's system, and play a positive role in promoting the chaos-based applications of the Chua's system. Meanwhile, the results obtained in this work lead to the conjecture that there remain some unknown and striking behaviors in the Chua's system with negative parameters, which need further revealing.

Keywords: fractional order, Chua's system, negative parameter space, chaotic circuit

PACS: 05.45.Vx, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.66.230502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61176032, 61471310) and the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant Nos. 2015JJ2142, 2015JJ2140).

[†] Corresponding author. E-mail: lizhijun@xtu.edu.cn