

二维圆盘颗粒体系声学行为的数值研究

刘晓宇 张国华 孙其诚 赵雪丹 刘尚

Numerical study on acoustic behavior of two-dimensional granular system

Liu Xiao-Yu Zhang Guo-Hua Sun Qi-Cheng Zhao Xue-Dan Liu Shang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 234501 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.234501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.234501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I23>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一维颗粒声子晶体的拓扑相变及可调界面态

[The topological phase transition and the tunable interface states in granular crystal](#)

物理学报.2017, 66(22): 224502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.224502>

二维颗粒堆积中压力问题的格点系统模型

[Lattice model for pressure problems in two-dimensional granular columns](#)

物理学报.2017, 66(20): 204501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.204501>

颗粒样品形变对声波传播影响的实验探究

[Experimental study on the influence of granular shear deformation on sound propagation](#)

物理学报.2017, 66(15): 154502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.154502>

倾斜沙漏流与颗粒休止角研究

[Inclined glass-sand flow and the angle of repose](#)

物理学报.2016, 65(8): 084502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.084502>

振动颗粒混合物中的周期性分聚现象与能量耗散

[Energy dissipation and periodic segregation of vibrated binary granular mixtures](#)

物理学报.2015, 64(13): 134503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.134503>

二维圆盘颗粒体系声学行为的数值研究*

刘晓宇¹⁾ 张国华^{1)†} 孙其诚^{2)‡} 赵雪丹¹⁾ 刘尚¹⁾

1)(北京大学物理系, 北京 100083)

2)(清华大学, 水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

(2017年5月15日收到; 2017年7月17日收到修改稿)

数值测量了卸载过程中二维单分散圆盘颗粒系统的横波、纵波声速、声衰减系数、非线性系数随压强的变化以及声衰减系数随频率的变化。结果表明, 二维(2D)圆盘颗粒体系的横波、纵波声速均随压强呈分段幂律标度: 当压强 $P < 10^{-4}$ 时, 横波、纵波声速随压强的增大而减小; 当 $P > 10^{-4}$ 时, 有 $v_t \sim P^{0.202}$, $v_l \sim P^{0.338}$ 。进一步得到其剪切模量和体积模量的比值 G/B 也随压强呈幂律标度, $G/B \sim P^{-0.502}$, 暗示在低压强下, 与三维(3D)球形颗粒体系类似, 2D圆盘颗粒体系也处于L玻璃态。水平激励和垂直激励下2D圆盘颗粒系统的衰减系数随频率变化也呈现分段行为: 当频率 $f < 0.05$ 时, 衰减系数不随 f 变化; 当 $f > 0.05$ 时, 横波纵波的衰减系数 $\alpha \sim f$; 当 $f > 0.35$ 时, 横波衰减系数 $\alpha_T \sim f^2$, 纵波衰减系数 $\alpha_L \sim f^{1.5}$ 。此外, 竖直水平激励下的2D圆盘颗粒系统的非线性系数和衰减系数随压强也呈现与声速类似的分段规律: 当 $P < 10^{-4}$ 时, 横波非线性系数 $\beta_T \sim P^{-0.230}$, 其余都不随压强变化。当 $P > 10^{-4}$ 时, 两者均随压强增大呈幂律减小: $\beta_T \sim P^{-0.703}$, $\beta_L \sim P^{-0.684}$, $\alpha_T \sim P^{-0.099}$, $\alpha_L \sim P^{-0.105}$ 。进而得到2D圆盘颗粒系统中散射相关的特征长度 ℓ^* 随压强呈幂律标度, 当 $P < 10^{-4}$ 时, $\ell^* \sim P^{-0.595}$; 当 $P > 10^{-4}$ 时, $\ell^* \sim P^{0.236}$ 。

关键词: 颗粒物质, 声速, 非线性, 声衰减

PACS: 45.70.-n, 46.40.Cd, 43.40.+s

DOI: 10.7498/aps.66.234501

1 引言

在非热条件下压缩颗粒系统可使系统经历堵塞(jamming)转变^[1-3]。根据O'Hern的分析, 在jamming点(J点)附近, 剪切模量 G 、体积模量 B 及剪切模量与体积模量的比值 G/B 均随压强 P 呈幂律标度^[3-5]: $P \sim (\Delta\phi)^{a-1}$, $B \sim (\Delta\phi)^{a-2}$, $G \sim (\Delta\phi)^{a-3/2}$, $Z - Z_c \sim (\Delta\phi)^{1/2}$ (Z 为配位数, Z_c 为J点配位数), $G/B \sim P^{1/(2a-2)}$, 其中, $a = 2$ 对应线弹性接触, $a = 5/2$ 对应赫兹接触。因此, 在J点附近剪切和体积模量比值 G/B 随压强 P 的标度是验证jamming临界性的重要标记^[6]。最近, Wang等^[7]发现当 $P > P_j$ (P_j 为类jamming转变点)时, 双分散的赫兹接触颗粒体系中 $G/B \sim P^{1/3}$, 体

系处于TL玻璃态(横模纵模都存在的状态); 当 $P < P_j$ 时, $G/B \sim (P/T)^{-1/2}$, 体系处于只能承载有效纵向声子的L玻璃态; 当 $P = 0$ 时, 体系处于无刚性的未堵塞态。但是, 在2D线弹性接触的颗粒体系中是否也存在处于TL玻璃态和未堵塞态之间的L玻璃态仍然是一个未解决的问题。另外, 由于L玻璃态不能严格定义横波声子, L玻璃态表现出与TL玻璃态非常不同的力学特性, 目前关于L玻璃态力学特性的研究已经成为一个新的热点。

颗粒物质是典型的无序系统, 内部本征的不均匀性使得颗粒体系的力学和输运特性与晶体的情况存在明显不同^[8]。比如, 颗粒材料中的振动自由度不是总能用普通的平面波表征, 而是存在一个在基本成分(颗粒)的微观尺寸和宏观样品

* 国家自然科学基金(批准号: 11272048, 11572178, 91634202)资助的课题。

† 通信作者。E-mail: zhguohua@sas.ustb.edu.cn

‡ 通信作者。E-mail: qcsun@tsinghua.edu.cn

尺寸之间的特征介观长度尺度 l^* , 低于 l^* 的系统不再支持波长 λ 小于 l^* 的声学平面波, 连续体弹性理论失效^[9]. 但是, $\lambda \gg l^*$ 的长波长声子仍然能在无序固体中存在, 在这个长度尺度上体系能被看作连续弹性介质. 从这个角度讲, 颗粒材料等无序固体可以看作一系列由特征尺寸 l^* 量级的区域结构单元组成^[10]. 近年来, 关于颗粒材料中介观长度尺度随体积分数的变化的研究已经取得了很大的进展. 例如: 文献^[11—13]通过研究振动态密度曲线发现颗粒体系中存在区分德拜标度和态密度平台的过渡频率 ω^* ^[5], 与 ω^* 对应的纵波特征波长 $\lambda_L^* (=2\pi v_l/\omega^*, v_l$ 为纵波声速) 及横波特征波长 $\lambda_T^* (=2\pi v_t/\omega^*, v_t$ 为横波声速) 均随到 J 点的距离 $(\phi - \phi_c)$ 发散: $\lambda_L^* \sim (\phi - \phi_c)^{-1/2}$, $\lambda_T^* \sim (\phi - \phi_c)^{-1/4}$. Vitelli^[14] 数值研究了通过排斥弹簧互相作用的无摩擦软球 jammed 体系剪切声波的长波衰减, 发现特征长度 $l^* \sim (\phi - \phi_c)^{-1/2}$. Mizuno 等^[15] 数值研究发现 3D 无序体系偏离宏观弹性性质的特征尺度 $\xi_G \sim (\phi - \phi_c)^{-0.16}$. Wang 等^[7] 数值确定颗粒材料等无序固体的特征长度 $l^* \sim P^{-2/9}$. 同时 Ikeda 和 Berthier^[6] 的研究给出了不同的结论, 即纵向和横向振动都在硬球区域中存在, 且相关的长度尺度和时间尺度均随着密度减少远离 J 点而变微观. 由于对无序材料中的特征尺度的研究还存在争议, 值得进一步研究.

声学测量是一种探测颗粒系统内部结构和力学特性的有效手段^[16—19]. 目前, 人们已经利用声学手段对 3 维 (3D) 颗粒体系低压下声学特性进行了大量研究, 但是关于 2D 圆盘颗粒体系低压强下是否也存在 L 玻璃态以及其低压强下的声学衰减、声学非线性等行为的研究还较少. 本文利用数值模拟手段对卸载过程中 2D 颗粒圆盘体系在低压强下的声学行为展开了系统研究. 首先, 利用飞行时间法数值测量了卸载过程中不同压强下二维单分散颗粒体系中的横波声速 v_t 和纵波声速 v_l , 进一步研究了剪切模量 G 与体积模量 B 的比值 G/B 随压强的变化规律, 结果表明, 在低压强区域 2D 单分散圆盘颗粒体系处于 L 玻璃态. 其次, 利用傅里叶变换研究了非线性系数、声学衰减系数随压强 P 的变化以及衰减系数 α 随频率 f 的变化规律, 并且进一步研究了 2D 圆盘颗粒系统中散射相关的特征长度 l^* 随压强的变化规律. 本文的结果对于进一步理解 2D 颗粒体系中是否存在 L 玻璃态以及 L 玻璃态的

声学衰减及非线性行为的规律有所帮助.

2 数值模拟

研究的颗粒体系由 2048 个质量相同的无摩擦单分散圆盘颗粒组成, 它们被随机放置在边长为 L 的正方形盒子中, 采用周期性边界, 且不考虑重力的影响. 颗粒与颗粒间的相互作用为单边线性弹簧, 即当颗粒 i 和 j 间距 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 小于它们的半径之和时存在相互作用, 其中 $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ 分别为颗粒 i 和 j 的位置矢量. 接触力的法向分量由 $\mathbf{F}_{ij}^n = k_n \mathbf{n}_{ij} + 2\zeta \sqrt{\frac{m_i m_j}{m_i + m_j}} k_n \mathbf{n}_{ij}$ 给出, 其中, k_n 是法向接触刚度, ζ 为阻尼比, $\mathbf{n}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}/|\mathbf{r}_{ij}|$ 是颗粒 i 中心指向颗粒 j 中心的单位矢量, m_i 和 m_j 是颗粒 i 和颗粒 j 的质量. 在本文的模拟中, 颗粒法向刚度系数为 1.0×10^6 N/m, 切向刚度系数为 0.

非热 ($T = 0$) 颗粒体系的具体制备过程如下: 首先, 在边长为 L 的正方形盒子中随机生成 2048 个半径很小的单分散光滑圆盘颗粒. 接着, 一步增大颗粒半径使体系的体积分数达到某一固定值 ($P/T = \infty$). 然后, 采用共轭梯度使得体积能量趋于能量极小的亚稳态, 可认为体系为非热体系 ($T = 0$). 最后, 通过逐渐减小颗粒半径的方法对体系进行卸载, 生成一系列压强的稳定颗粒构形. 本文分别取 $\sigma, m, \varepsilon/\sigma^2$ 和 $\sqrt{\varepsilon/(m\sigma^2)}$ (其中, $\sigma = R_i + R_j$ 为颗粒的平均直径, m 为颗粒的质量, $\varepsilon = \frac{1}{2} k_n (R_i + R_j)^2$ 为体系特征能量, R_i 与 R_j 分别为体系中颗粒 i 与颗粒 j 的半径) 为长度、质量、压强和频率的单位.

采用飞行时间 (TOF) 法测量颗粒体系的声速, 测量过程中分别使用单个颗粒作为激励源和接收器. 具体的测量过程如下: 用单个正弦脉冲信号驱动激励源颗粒, 使它从初速度为零开始在水平 (或垂直) 方向上做一个完整的正弦振动 ($v = 0.0001\omega \sin(\omega t)$, 时间步长 $t_0 = T_{\text{period}}/1000$, T_{period} 为周期, 反比于圆频率 ω), 同时记录激励和接收颗粒的 $v-t$ 曲线. 测量发射端信号、接收端信号第一个波峰的时间差 $t_{\text{TOF}} = t_2 - t_1$ (其中, t_1 和 t_2 分别是激励脉冲和接收脉冲的第一个波峰对应的时间). 进而可以得到声速 $v_{\text{TOF}} = l/t_{\text{TOF}}$ (l 为激励源和接收器颗粒间的距离).

采用傅里叶变换法来研究颗粒物质中的声学衰减和非线性现象. 实验过程中, 用连续的正弦信

号激励颗粒,并同时记录激励颗粒和接受颗粒的振动速度随时间的变化,如图1所示.通过对接收和发射信号的傅里叶变换分析,从中提取出接收信号和发射信号的基频、二倍频幅值.可进一步得到声衰减系数 $\alpha = -\frac{1}{l} \ln \frac{I(l)}{I_0}$ (其中, l 为接收颗粒与激励颗粒之间的距离, I_0 为激励颗粒的振动强度即初始强度, $I(l)$ 为接收颗粒的振动强度即通过介质颗粒衰减后的强度),及接收信号二倍频幅值与接收信号基频幅值平方的比值,进而研究颗粒物质的非线性特性.

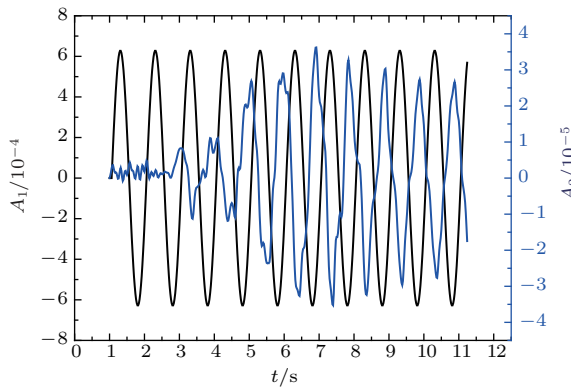


图1 激励波形速度幅 A_1 (黑线) 和接收波形的速度振幅 A_2 (蓝线) 随时间 t 的变化
 Fig. 1. Time t dependence of velocity amplitude of exciting waveform A_1 (black line) and velocity amplitude of receiving waveform A_2 (blue line).

3 结果与讨论

3.1 横波、纵波声速及材料剪切模量与体积模量比值 G/B 随压强的变化

图2(a)和图2(b)分别显示了用飞行时间法测得的2D圆盘颗粒体系的横波声速 v_t 和纵波声速 v_l 随压强的变化曲线.由图2可知, $v_t(P)$ 和 $v_l(P)$ 曲线均呈现分段行为:当 $P < 10^{-4}$ 时,横纵波声速均随压强的增加幂律减小, $v_t \sim P^{-0.446}$, $v_l \sim P^{-0.232}$;当 $P > 10^{-4}$ 时,横波、纵波声速均随压强增加幂律增大, $v_t \sim P^{0.202}$, $v_l \sim P^{0.338}$,与线弹性接触理论^[5,20]预言 $v_t \sim P^{1/4}$ 一致.应该指出的是,关于3D球形颗粒体系 v_t-P 和 v_l-P 曲线的分段行为在Somfai等^[21]的数值模拟、Jia等^[22]及张攀等^[23]的实验中也有报道,Lherminier等^[24]在研究声波通过受压的二维颗粒介质时也发现了类似现象.值得一提的是,图2给出的 $v_t(P)$ 和 $v_l(P)$ 曲线的分段行为与理论的预言并不一致,即在本文

的体系中 $v_t(P)$ 和 $v_l(P)$ 曲线呈现先幂律减小再幂律增大的规律.这可能对应着卸载过程中在振动源颗粒和接收颗粒之间形成了一个强力链,导致测得的横波和纵波声速都按幂律增加. $v_t(P)$ 和 $v_l(P)$ 曲线的拐点实际上对应着在振动源颗粒和接收颗粒之间强力链的形成点.关于整体压强降低过程中,在体系局部形成强力链的过程的物理机制值得进一步研究.

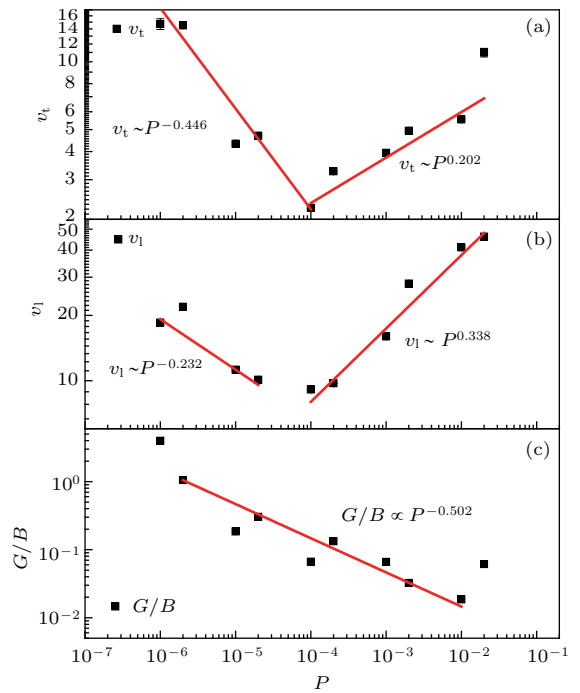


图2 声波在光滑颗粒物质中的传播速度与压强的依赖关系,实线为拟合曲线 (a)横波速度与压强的幂律关系;(b)纵波速度与压强的幂律关系;(c)剪切模量与体积模量的比值 G/B 与压强 P 的变化关系
 Fig. 2. Pressure dependence of velocity of acoustic wave propagating through frictionless granular matter, the solid line are the fitted line: (a) The velocity of transversal wave versus pressure exhibits piecewise power law scaling behaviors; (b) the velocity of longitudinal wave versus pressure shows similar piecewise power law as that of transversal wave; (c) the ratio of shear modulus and bulk modulus G/B versus pressure P .

材料剪切模量与体积模量的比值 G/B 是反映材料塑性的重要物理量,例如:对于液体, $G/B = 0$;对于赫兹接触固体, $G/B \sim P^{1/3}$.为了探究卸载过程中2D颗粒体系塑性转变,根据 $v_t = \sqrt{G/\rho}$, $v_l = \sqrt{[B + (4/3)G]/\rho}$,进一步得到2D颗粒体系的 $G/B = (v_l^2/v_t^2 - 4/3)^{-1}$.图2(c)显示了2D颗粒体系剪切模量与体积模量比值 G/B 随压强 P 的变化规律.由图2(c)可知,在本文研

究的低压强范围内, 2D 颗粒体系的 G/B 随 P 的变化也出现了类似于在 3D 颗粒体系中 [7,23] 发现的随压强 P 增加 G/B 减小的现象, $G/B \sim P^{-0.502}$, 而与线弹性接触理论 [5,20] 预言的在 $P > P_j$ 情况下 $G/B \sim P^{1/2}$ 不同. 有趣的是, Wang 等 [7] 的数值研究发现在卸载过程中硬球胶体玻璃分别经历高压强的 TL 玻璃态到低压强的 L 玻璃态及从 L 玻璃态到未堵塞态的两次转变, 并且发现当系统处在硬球玻璃的等效区域 L 玻璃区域, 即 $P_g < P < P_j$ (P_g 是玻璃化转变点) 时, 赫兹接触颗粒体系 $G/B \sim P^{-1/2}$, 与张攀等 [23] 的实验结果及本文在 2D 颗粒体系的低压强范围内中发现的 $G/B \sim P^{-0.502}$ 接近, 暗示在低压强范围内 2D 颗粒体系也处于 L 玻璃态. 值得一提的是, 2D 颗粒体系和 3D 颗粒体系在 L 玻璃态的中 G/B 随压强的标度指数与颗粒作用势无关, 具体原因有待进一步研究.

3.2 衰减系数随频率的变化

通常, 非均匀介质的声学衰减分为吸收衰减 $\alpha_a(\omega) = A\omega$ 和由于声阻抗不连续发生在颗粒边界和缺位的弹性散射 $\alpha_s(\omega)$. 其中 $\alpha_s(\omega)$ 随频率的幂律关系由散射机制决定 [25], 例如: 对于瑞利散射, 即入射波长频率 λ 远大于散射体的平均尺寸 D ($\lambda \gg D$), $\alpha_s(f) = S_1 D^3 \omega^4$; 对于随机散射 ($\lambda \leq D$), $\alpha_s(f) = S_2 D \omega^2$; 对于几何散射 ($\lambda \ll D$), $\alpha_s(f) = S_3/D$. 为了研究 2D 颗粒体系的声学衰减机制, 数值测量了压强 $P = 0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.002, 0.001, 0.0002, 0.0001$ 时 2D 颗粒体系的横波和纵波衰减系数随频率的变化, 如图 3(a) 和图 3(b) 所示. 为了避开系统共振的影响, 本文对远离共振峰的实验数据进行了拟合, 如图 3 中的实线所示. 由图 3(a) 和图 3(b) 可知, 2D 颗粒物质的横波、纵波衰减系数均随频率呈分段规律: 当 $f < 0.05$ 时, 横波、纵波的衰减系数均不随频率的增加而变化; 当 $0.05 < f < 0.35$ 时, 横纵波衰减系数与频率成正比 $\alpha_T \sim f, \alpha_L \sim f$, 意味着在 0.05—0.35 频率范围 (在 $P = 0.02$ 压强下, 对应横波波长 2.11—15.464, 纵波波长 9.726—64.895) 内, 2D 颗粒物质中的衰减的主要机制为吸收衰减; 当 $f > 0.35$ 时, $\alpha_T \sim f^2, \alpha_L \sim f^{1.5}$, 此时衰减机制中除了吸收衰减还有瑞利散射衰减 [25]. 值得一提的是, 在 $f > 0.35$ 范围内, 横波和纵波衰减随频率的

变化不同 ($\alpha_T \sim f^2, \alpha_L \sim f^{1.5}$), 可能与横波和纵波波波长不同导致散射衰减占总衰减的比例不同有关 [26].

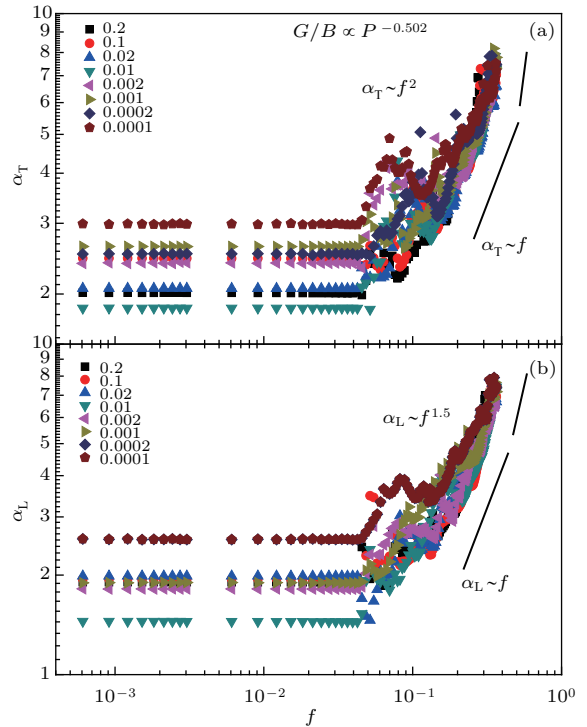


图 3 压强 $P = 0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.002, 0.001, 0.0002, 0.0001$ 时, 衰减系数 α 与频率 f 的变化 (a) 横波的衰减系数 α_T 随频率 f 的变化; (b) 纵波的衰减系数 α_L 随频率 f 的变化; 图中用实线显示不同压强范围内衰减系数随频率的幂律关系

Fig. 3. The attenuation coefficient α versus frequency f at $P = 0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.002, 0.001, 0.0002, 0.0001$: (a) The attenuation coefficient of transversal acoustic α_T versus frequency f ; (b) the attenuation coefficient of longitudinal acoustic α_L versus frequency f . The solid line in the figure shows the piecewise power law frequency dependence of attenuation coefficient.

3.3 衰减系数随压强的变化

衰减系数的标度分析能够提供对 jammed 固体结构的洞察力. 为了研究 2D 颗粒体系中散射特征长度随压强的演化, 本文测量了卸载过程 2D 颗粒物质横波、纵波波长衰减系数随压强的变化, 如图 4(a) 和图 4(b) 所示. 由图 4(a) 和图 4(b) 可知, 2D 颗粒物质的横波、纵波衰减系数均随压强也呈分段现象. 当 $P < 10^{-4}$ 时, 横纵波的衰减系数 α_T, α_L 几乎不随压强变化; 而当 $P > 10^{-4}$ 时, 横纵波的衰减系数 α_T, α_L 均随压强的增大而呈幂律减小, $\alpha_T \sim P^{-0.099}, \alpha_L \sim P^{-0.105}$. 2D 颗粒系统中声衰减系数 α_T, α_L 随压强的变化与系统内部结构随压

强调整有关. 即随着压强的增大, 颗粒的平均接触数增加, 颗粒体系内部结构更不容易发生调整, 使得横波和纵波的声学耗散相应减小. 这一点与 Hong [27] 对一维水平干颗粒能量衰减的研究及 Liu 等 [28,29]、张攀等 [23] 对颗粒 3D 体系衰减耗散的研究定性一致. 注意到弹性散射对衰减系数的贡献与散射平均自由程 $l_s(\omega)$ 成反比, $\alpha(\omega) \sim 1/l_s$, 在颗粒介质中, 观察到声音衰减由横向波支配. 根据瑞利定律, $l_s(\omega) \sim (v_t/\omega)^4(1/D)^3$ (其中, D 是表征对散射负责的无序结构的长度尺度), 可以得到 $\alpha(\omega) \sim (\omega/v_t)^4 D^3$. $P < 10^{-4}$ 时, $v_t \propto P^{-0.446}$, $P > 10^{-4}$ 时, $v_t \sim P^{0.202}$, $\alpha_T \sim P^{-0.099}$, 将测得的 2D 颗粒体系的横波声速, 代入 $\alpha(\omega) \sim (\omega/v_t)^4 D^3$ 式, 可进一步得到与散射相关特征长度随压强的标度: $P < 10^{-4}$ 时, $\ell^* \sim D \sim P^{-0.595}$; $P > 10^{-4}$ 时, $\ell^* \sim D \sim P^{0.236}$. 在低压强下的结果与文献 [5, 14] 中长波长的剪切波在 J 点附近存在 $\ell^* \sim P^{-1/2}$ 并

在 J 点处发散的结果一致. 综合考虑图 2 中 $v_t(P)$ 和 $v_l(P)$ 曲线的分段行为 ($P = 10^{-4}$ 为拐点), 我们认为这里发现的与散射相关特征长度随压强的分段标度可能与 $v_t(P)$ 和 $v_l(P)$ 曲线的分段行为具有相同的结构起源, 即在卸载 (整体压强下降) 过程中在振动源颗粒和接收颗粒之间形成了一个强力链有关. 对比图 4(a) 和图 4(b) 可知, 横波衰减随压强变化的幂指数与纵波衰减随压强的变化的幂指数基本一致, 说明纵波与横波的衰减行为并无太大不同.

3.4 非线性系数随压强的变化

颗粒材料是典型的非均匀系统, 体系内部的弱接触使得体系表现出强烈的非线性. 由于系统非线性的影响, 当用正弦信号激励颗粒介质时, 颗粒介质中声波除了一阶声波外, 还会出现二阶甚至更高阶的谐波. 非线性系数 $\beta \sim \frac{\alpha v^2}{\omega^2} \left| \frac{A_2}{A_1^2} \right|$ (其中, A_1 是接收基频振幅 A_2 是接收二倍频的振幅, v 代表声速, ω 代表频率) 是一个表征非线性大小的重要参数, 非线性系数越大, 二次谐波成分越大, 波形畸变越严重. 为了研究压强变化对系统非线性的影响, 本文数值测量了 2D 颗粒体系横波、纵波非线性系数随压强的变化, 如图 5(a) 和图 5(b) 所示. 由图 5(a) 和图 5(b) 可知, 2D 颗粒体系横波、纵波二倍频振幅与基频振幅平方的比值均随压强呈分段关系: 当 $P < 10^{-5}$ 时, 横纵波的 $\left| \frac{A_2}{A_1^2} \right|$ 不随压强变化; 当 $P > 10^{-5}$ 时, 横波、纵波二倍频振幅与基频振幅平方的比值均随压强增大幂律减小: $\left| \frac{A_2}{A_1^2} \right|_T \sim P^{-1.251}$, $\left| \frac{A_2}{A_1^2} \right|_L \sim P^{-1.007}$. 利用本文测得的 α , v , $\left| \frac{A_2}{A_1^2} \right|$, 可进一步得到横波、纵波非线性系数随压强的幂律标度: 当 $P < 10^{-4}$ 时, 横波非线性系数 $\beta_T \propto P^{-0.230}$, 纵波则与压强无明显的依赖关系. 当 $P > 10^{-4}$ 时, 两者均随压强增大呈幂律减小 $\beta_T \sim P^{-0.703}$, $\beta_L \sim P^{-0.684}$. 颗粒体系非线性系数随压强增加而减小可能与体系结构随压强调整有关, 即随着压强的增加, 颗粒间的接触紧密, 随着接触网络的变化, 非线性系数减小. 值得注意的是, 2D 颗粒体系表现出与 3D 赫兹接触颗粒体系 [30] 类似的非线性随压强的幂律衰减. 但是, 当 $P > 10^{-4}$ 时, 2D 体系的非线性系数随压强变化的幂指数的绝对值略大于 3D 体系 $\beta \sim P^{-0.51}$ 的幂指数.

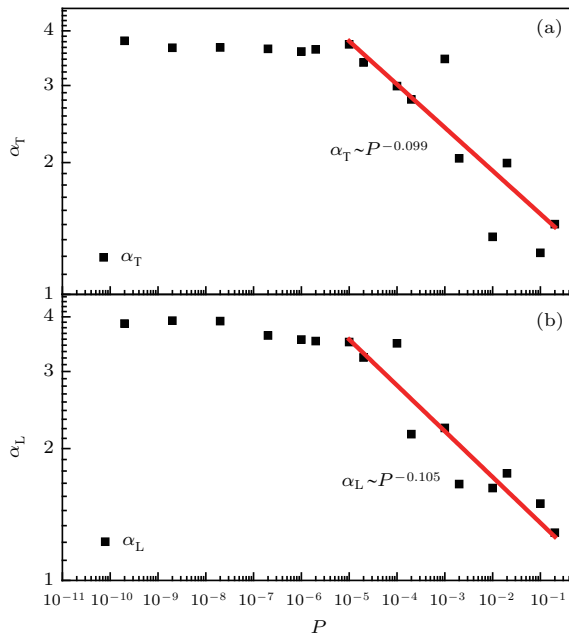


图 4 衰减系数随压强的依赖关系 (a) 在 1×10^{-4} — 0.2 的压强范围内, 横波衰减系数随压强幂律减小 $\alpha_T \sim P^{-0.099}$, 实线为幂律拟合曲线; (b) 在 1×10^{-4} — 0.2 的压强范围内, 纵波衰减系数随压强的幂律依赖 $\alpha_L \sim P^{-0.105}$, 实线为幂律拟合曲线

Fig. 4. The pressure dependence of attenuation coefficient, the line is a power law fit: (a) The power law decrease of attenuation coefficient of transversal acoustic α_T with the pressure P increasing from 1×10^{-4} to 0.2 , $\alpha_T \sim P^{-0.099}$; (b) the power law decrease of attenuation coefficient of longitudinal acoustic α_L with pressure P increasing from 1×10^{-4} to 0.2 , $\alpha_L \sim P^{-0.105}$.

需要强调的是, 以单一颗粒激励作为声源可能会测量到力链效应. 本文中测量到的 $v_t(P)$ 和 $v_l(P)$ 曲线以及与散射相关特征长度随压强变化曲线的分段标度很可能与卸载(整体压强下降)过程

中在振动源颗粒和接收颗粒之间形成了一个强力链有关. 另外, 由单粒子源辐射引起的扩散衰减的削减可能与在源颗粒和接收颗粒之间存在的多个衰减通路的统计平均有关.

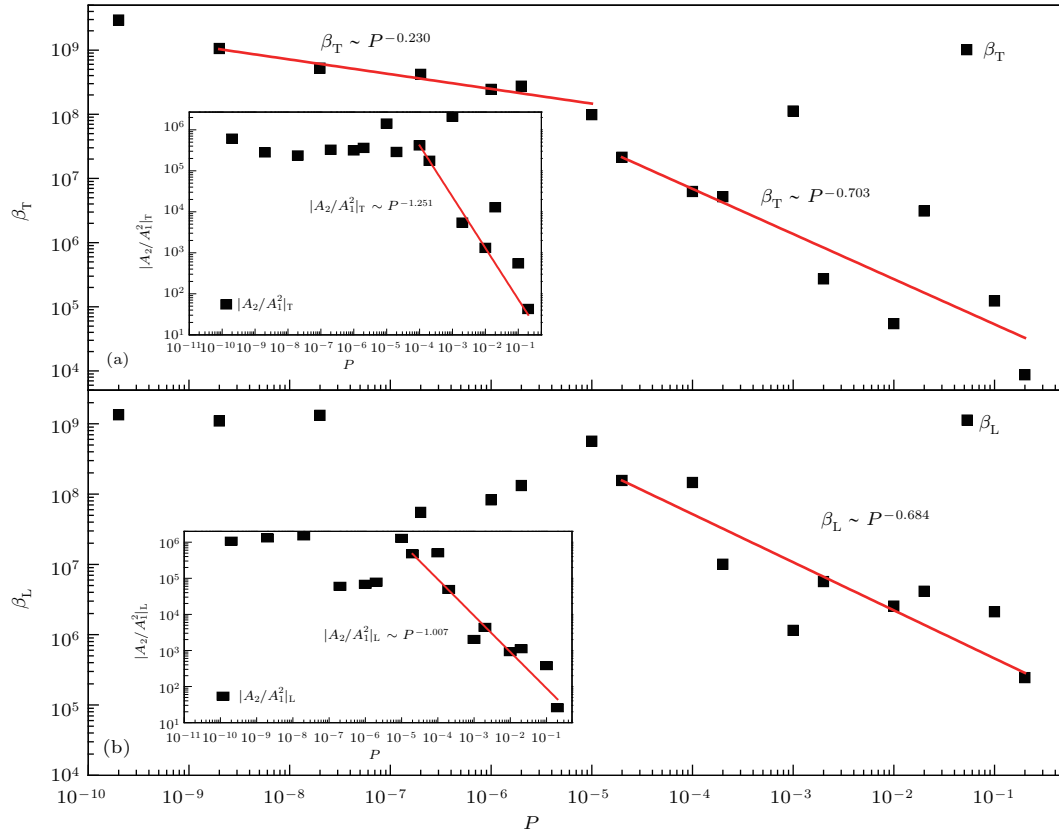


图5 (a) 横波非线性系数随压强的变化, 在低压强下 $\beta_T \sim P^{-0.230}$, 在高压强下 $\beta_T \sim P^{-0.703}$, 实线为拟合曲线; (b) 纵波非线性系数随压强的变化, 在高压强下 $\beta_L \sim P^{-0.684}$; 插图为横纵波的二倍频振幅与基频振幅平方的比值 $\left| \frac{A_2}{A_1^2} \right|$ 随压强 P 的变化关系, $\left| \frac{A_2}{A_1^2} \right|_T \sim P^{-1.251}$, $\left| \frac{A_2}{A_1^2} \right|_L \sim P^{-1.007}$, 实线为拟合曲线

Fig. 5. (a) The pressure dependence of the nonlinear coefficient of transverse wave, $\beta_T \sim P^{-0.230}$, at lower pressure, $\beta_T \sim P^{-0.703}$, at higher pressure, and the solid line is a power law fit; (b) the pressure dependence of the nonlinear coefficient of longitudinal wave, $\beta_L \sim P^{-0.684}$, at higher pressure. The inset is the ratio of the second harmonic amplitude of the transverse and longitudinal wave to the square of the fundamental frequency amplitude $\left| \frac{A_2}{A_1^2} \right|$ with pressure P , $\left| \frac{A_2}{A_1^2} \right|_T \sim P^{-1.251}$, $\left| \frac{A_2}{A_1^2} \right|_L \sim P^{-1.007}$, and the line is a power law fit.

4 结 论

数值研究了在二维光滑圆盘颗粒体系中传播过程的横波、纵波的声速、剪切模量与体积模量的比值 G/B 、声衰减及非线性效应随压强的变化规律, 得到如下结论.

1) 2D 颗粒体系中, 横波和纵波声速随压强的变化均出现了分段现象, 当 $P < 10^{-4}$ 时, 横纵波声速均随压强的增大而减小, $v_t \sim P^{-0.446}$,

$v_l \sim P^{-0.232}$; 而当 $P > 10^{-4}$ 时, 横波、纵波声速均随压强呈现幂律关系为 $v_t \sim P^{0.202}$, $v_l \sim P^{0.338}$. 由此可以得到2D圆盘颗粒体的 G/B 随压强 P 的变化关系 $G/B \sim P^{-0.502}$ 对应着 L 玻璃态.

2) 2D 颗粒体系中横波和纵波衰减随频率的变化规律不同: 对于横纵波, 在低频率下, 有 $\alpha \sim f$, 暗示2D颗粒体系的横纵向衰减主要是起因于阻尼导致的吸收衰减及少部分散射衰减. 而在高频率下, 横波经历了 $\alpha_T \sim f$ 到 $\alpha_T \sim f^2$ 的转变, 纵波经历了 $\alpha_L \sim f$ 到 $\alpha_L \sim f^{1.5}$ 的转变. 表明随频率的增

加, 横纵波衰减中的散射衰减成分增加.

3) 2D 颗粒体系的声衰减系数随压强也呈分段规律: 当 $P < 10^{-4}$ 时, 横波、纵波声衰减系数 α_T 和 α_L 几乎都不随压强变化; 当 $P > 10^{-4}$ 时, 横波、纵波声衰减系数与压强呈现幂律规律, $\alpha_T \sim P^{-0.099}$, $\alpha_L \sim P^{-0.105}$, 进而得到 2D 颗粒体系散射相关的特征长度 ℓ^* 随压强 P 的幂律关系: 当 $P < 10^{-4}$ 时 $\ell^* \sim P^{-0.595}$; 当 $P > 10^{-4}$ 时 $\ell^* \sim P^{0.236}$.

4) 2D 颗粒体系的横波的非线性响应要略大于纵波, 且横波、纵波非线性系数随压强的变化也呈分段现象: 当 $P < 10^{-4}$ 时, 横波非线性系数 $\beta_T \sim P^{-0.230}$, β_L 不随压强变化; 而当 $P > 10^{-4}$ 时, 横波、纵波非线性系数均随压强 P 的增加呈幂律减小, $\beta_T \sim P^{-0.703}$, $\beta_L \sim P^{-0.684}$. 在高压强下非线性系数的减小暗示高压强下颗粒间的接触紧密, 沿强力链传播的声波产生了更少的非线性响应.

参考文献

- [1] Liu A J, Nagel S R 1998 *Nature* **396** 21
- [2] Henkes S, Chakraborty B 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 198002
- [3] O'Hern C S, Silbert L E, Nagel S R 2003 *Phys. Rev. E* **68** 011306
- [4] O'Hern C, Langer S, Liu A, Nagel S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 075507
- [5] Xu N 2011 *Front. Phys.* **6** 109
- [6] Ikeda A, Berthier L 2015 *Phys. Rev. E* **92** 012309
- [7] Wang X, Zheng W, Wang L, Xu N 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 035502
- [8] Coulais C, Behringer R P, Dauchot O 2014 *Soft Matter* **10** 1519
- [9] Karimi K, Maloney C E 2015 *Phys. Rev. E* **92** 022208
- [10] Sussman D M, Goodrich C P, Liu A J, Nagel S R 2015 *Soft Matter* **11** 2745
- [11] Wyart M, Nagel S R, Witten T A 2005 *Europhys. Lett.* **72** 486
- [12] Wyart M, Silbert L, Nagel S 2005 *Phys. Rev. E* **72** 051306
- [13] Silbert L, Liu A, Nagel S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 098301
- [14] Vitelli V 2010 *Soft Matter* **6** 3007
- [15] Mizuno H, Silbert L E, Sperl M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 068302
- [16] Merkel A, Tournat V, Gusev V 2014 *Phys. Rev. E* **90** 023206
- [17] Zhang Q, Li Y, Hou M, Jiang Y, Liu M 2012 *Phys. Rev. E* **85** 031306
- [18] Zhang Q, Li Y C, Liu R, Jiang Y M, Hou M Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 234501 (in Chinese) [张祺, 李寅闻, 刘锐, 蒋亦民, 厚美瑛 2012 物理学报 **61** 234501]
- [19] Zheng H P 2014 *Chin. Phys. B* **23** 054503
- [20] Vitelli V, Xu N, Wyart M, Liu A J, Nagel S R 2010 *Phys. Rev. E* **81** 021301
- [21] Somfai E, Roux J N, Snoeijer J, van Hecke M, van Saarloos W 2005 *Phys. Rev. E* **72** 021301
- [22] Jia X, Caroli C, Velicky B 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1863
- [23] Zhang P, Zhao X D, Zhang G H, Zhang Q, Sun Q C, Hou Z J, Dong J J 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 024501 (in Chinese) [张攀, 赵雪丹, 张国华, 张祺, 孙其诚, 侯志坚, 董军军 2016 物理学报 **65** 024501]
- [24] Lherminier S, Planet R, Simon G, Vanel L, Ramos O 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 098001
- [25] West B J, Shlesinger M F 1984 *J. Stat. Phys.* **36** 779
- [26] Langlois V, Jia X 2015 *Phys. Rev. E* **91** 022205
- [27] Hong J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 108001
- [28] Wang P J, Li Y D, Xia J H, Liu C S 2008 *Phys. Rev. E* **77** 060301
- [29] Wang P J, Xia J H, Li Y D, Liu C S 2007 *Phys. Rev. E* **76** 041305
- [30] Brunet T, Jia X, Johnson P A 2008 *Geophys. Res. Lett.* **35** L19308

Numerical study on acoustic behavior of two-dimensional granular system*

Liu Xiao-Yu¹⁾ Zhang Guo-Hua^{1)†} Sun Qi-Cheng^{2)‡} Zhao Xue-Dan¹⁾ Liu Shang¹⁾

1) (Department of Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

2) (State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(Received 15 May 2017; revised manuscript received 17 July 2017)

Abstract

The transversal and longitudinal wave velocities, the acoustic attenuation coefficients, the nonlinear coefficients at different pressures and the acoustic attenuation coefficient as a function of frequency in a two-dimensional (2D) monodisperse disc system are numerically calculated. The results show that the transversal and longitudinal wave velocities both exhibit a piecewise power law with pressure P . When $P < 10^{-4}$, the velocity decreases with the increase of pressure in the 2D disc granular system, and when $P > 10^{-4}$, the transversal wave velocity V_t and longitudinal wave velocity V_l show the scaling power laws, i.e., $v_t \sim P^{0.202}$ and $v_l \sim P^{0.338}$, respectively. The ratio of the shear modulus to the bulk modulus G/B shows a power law scaling with the pressure, $G/B \sim P^{-0.502}$, implying that the system lies in an L glass state at low pressure, similar to that of a three-dimensional (3D) spherical granular system. The attenuation coefficients (α_T, α_L) of the horizontal excitation and vertical excitation also show the piecewise behaviors with the change of frequency f . When $f < 0.05$, neither of the two attenuation coefficients changes with frequency f . When $f > 0.05$, $\alpha \propto f_T^\alpha, \alpha_L \propto f$. And when $f > 0.35$, $\alpha_T \propto f^2$ and $\alpha_L \propto f^{1.5}$. In addition, the nonlinear coefficient and the attenuation coefficient of the 2D disc granular system under the vertical and horizontal excitation both also show a piecewise law behavior with pressure, similar to that of the acoustic velocity. When $P < 10^{-4}$, only the transversal nonlinear coefficient changes according to $\beta_T \propto P^{-0.230}$, while the other coefficient has no change. When $P > 10^{-4}$, the attenuation coefficients and nonlinear coefficients decrease according to their power law with the increase of pressure, i.e., $\beta_T \propto P^{-0.703}$, $\beta_L \propto P^{-0.684}$, $\alpha_T \propto P^{-0.099}$, $\alpha_L \propto P^{-0.105}$. The characteristic length ℓ^* , which characterizes the disordered structure responsible for the scattering, also decreases according to power law with the increase of pressure, when $P < 10^{-4}$, $\ell^* \propto P^{-0.595}$; when $P > 10^{-4}$, $\ell^* \propto P^{0.236}$.

Keywords: granular matter, acoustic velocity, nonlinear, acoustic attenuation

PACS: 45.70.-n, 46.40.Cd, 43.40.+s

DOI: 10.7498/aps.66.234501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11272048, 11572178, 91634202).

† Corresponding author. E-mail: zhguohua@sas.ustb.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: qcsun@tsinghua.edu.cn