

流体黏性及表面张力对气泡运动特性的影响

艾旭鹏 倪宝玉

Influence of viscosity and surface tension of fluid on the motion of bubbles

Ai Xu-Peng Ni Bao-Yu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 234702 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.234702

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.234702>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I23>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

微结构阵列对近壁面层液体运动规律的影响

Effect of micro-structure array on the liquid flow behaviors of near-surface layer

物理学报.2017, 66(4): 044703 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.044703>

中空液滴碰撞水平壁面数值分析

Numerical analysis of hollow droplet impact on a flat surface

物理学报.2017, 66(1): 014704 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.014704>

液滴碰撞液膜润湿壁面空气夹带数值分析

Numerical analysis on air entrapment during droplet impacting on a wetted surface

物理学报.2015, 64(22): 224704 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.224704>

爆炸气泡与自由水面相互作用动力学研究

Dynamics of the interaction between explosion bubble and free surface

物理学报.2014, 63(19): 194703 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.194703>

气泡在自由液面破碎后的射流断裂现象研究

Jet splitting after bubble breakup at the free surface

物理学报.2013, 62(12): 124704 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.124704>

# 流体黏性及表面张力对气泡运动特性的影响\*

艾旭鹏 倪宝玉†

(哈尔滨工程大学船舶工程学院, 哈尔滨 150001)

(2017年7月18日收到; 2017年8月12日收到修改稿)

基于气泡边界层理论, 引入黏性修正, 采用边界积分法, 考虑黏性效应和表面张力在单气泡以及双气泡耦合作用过程中的影响. 首先将建立的数值模型与 Rayleigh-Plesset 的解析解进行对比, 发现二者符合良好, 验证了数值模型的有效性; 在此基础上, 建立考虑流体弱黏性效应的双气泡耦合模型, 研究流体黏性和表面张力作用下, 气泡表面变形、射流速度、流场能量转换等物理量的变化规律; 最后研究雷诺数和韦伯数对于气泡脉动特性的影响规律. 结果表明, 流体黏性会抑制气泡脉动和气泡射流发展, 降低气泡半径和射流速度; 表面张力不改变气泡脉动幅值, 但缩短了脉动周期, 提升气泡势能.

**关键词:** 气泡, 边界层, 黏性, 表面张力

**PACS:** 47.55.db, 47.55.dr, 47.55.df, 47.11.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.66.234702

## 1 引言

黏性流体中多气泡的运动和耦合作用在生物、化学、海洋工程中应用十分广泛, 比如组织和细胞损伤<sup>[1]</sup>、水下爆炸气泡<sup>[2]</sup>、微气泡减阻<sup>[3]</sup>等. 从数学模型和数值模拟角度而言, 这一问题主要涉及两大有趣但又具有挑战性的难题, 一是气泡与气泡间的强非线性耦合效应, 二是流体黏性效应对气泡耦合效应的影响. 对于第一个问题, 目前较常用的有效解决方法之一是采用完全非线性边界元(BEM)方法. 文献<sup>[4—8]</sup>针对这一问题进行了大量的研究, 取得了较大的进展. 对于第二个问题, 一方面可以采用计算流体力学(CFD)方法近似求解 Navier-Stokes (N-S) 方程<sup>[9,10]</sup>, 但是计算量和计算精度都有待进一步优化; 另一方面, 采用“边界层”理论, 将黏性效应限制于很薄的流体层内, 而层外则依然可以采用势流理论进行计算. 边界层理论的思想最早源于普朗特的平板阻力, 在船舶领域应用广泛. 但是有关气泡边界层理论, 发展和研究都相对较晚.

Miksis 等最早在气泡动力学中引入边界层理论的思想<sup>[11]</sup>. Miksis 等认为气泡周围存在一薄边界层, 边界层外流体满足无黏不可压缩势流理论, 边界层内考虑流体黏性效应, 边界层两侧满足法向应力连续, 但不满足切向应力连续. 由于此边界层很薄, 忽略边界层内外速度的变化, 这样便可采用边界积分法数值模拟计及弱黏性效应的气泡动态变化. 此后, 研究人员从不同角度改进 Miksis 等的气泡边界层理论. Lundgren 和 Mansour<sup>[12]</sup>进一步分析了边界层方程, 获得了边界层两侧压力差和法向速度差的表达式. Boulton-Stone 和 Blake<sup>[1,13]</sup>又进一步扩展了 Lundgren 和 Mansour 的方法, 使得边界层两侧速度的切向分量也连续, 在此基础上首次成功地数值模拟了单个轴对称气泡在自由面处的破裂现象. Georgescu 等<sup>[14]</sup>也采用 Miksis 的气泡边界层理论模拟气泡在自由面处的破裂现象, 在边界积分和时间步进上均采用二阶单元, 以获得更好的精度. Klaseboer 等<sup>[15]</sup>采用 Joseph 和 Wang<sup>[16]</sup>的思想修正边界层理论, 同时考虑了法向和切向应力的连续, 应用边界积分法数值模拟了

\* 国家自然科学基金(批准号: 51639004, 51579054, 11472088)、中央高校基本科研业务基金(批准号: HEUCFM170110, HEUCFP201701, HEUCFP201777)和哈尔滨工程大学学科创新引智计划资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [nibaoyu@hrbeu.edu.cn](mailto:nibaoyu@hrbeu.edu.cn)

高雷诺数下轴对称气泡在流体中的脉动上浮现象. Lind 和 Phillips<sup>[17,18]</sup> 分别研究了考虑法向应力连续的轴对称气泡在固壁面和自由液面附近的脉动. 倪宝玉等<sup>[19]</sup> 联合模型实验和数值模拟研究了常压小气泡在自由表面的破裂, 数值模拟中考虑了法向应力连续的轴对称模型, 主要分析了射流断裂后的水滴形态以及水滴撕裂现象. Zhang 和 Ni<sup>[20]</sup> 研究了轴对称和三维气泡在法向和切向应力同时连续的情况下在无界重力场中的脉动, 得到气泡射流速度随流体黏性增加而衰减的结论. Li 和 Ni<sup>[21]</sup> 在此基础上又进一步研究了气泡与自由面相互作用过程中流体黏性效应的影响.

以上所述的数值研究中对于黏性效应的处理大部分侧重于法向应力连续, 对于切向应力连续的考虑较少; 数值模型中以轴对称为主, 三维模型则十分少见; 而对于考虑黏性效应和表面张力下多气泡耦合作用的三维模型公开发表的文献还很少. 鉴于此, 本文在前人基础之上, 首先将建立的数值模型与 Rayleigh-Plesset 的解析解进行对比, 验证数值模型的有效性; 其次研究不同雷诺数下双气泡耦合过程中出现的各类物理现象及变化规律; 最后研究雷诺数和韦伯数对于单个球状脉动气泡的影响规律.

## 2 理论与方法

图 1 给出了双气泡耦合作用的示意图, 这里假定初始位置较低的气泡为“气泡 1”, 位置较高的为“气泡 2”. 定义笛卡尔坐标  $O-xyz$ , 坐标系的原点处于气泡 1 的初始中心处,  $z$  轴竖直向上. 气泡 1 与气泡 2 的初始中心距离为  $h$ .

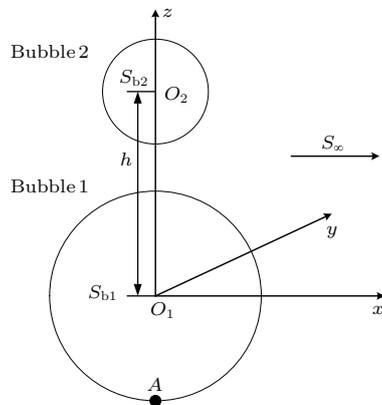


图 1 双气泡耦合作用示意图

Fig. 1. Sketch of interaction between two bubbles.

### 2.1 控制方程

本文主要考虑不可压缩、动力黏性系数恒定的牛顿流体, 根据亥姆霍兹速度分解定理<sup>[22]</sup>, 流场中任意一点速度  $\mathbf{U}$  均可以分解为无旋的速度  $\mathbf{u} = \nabla\varphi$  和有旋的速度  $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{a}$ . 对于不可压缩流体的质量守恒方程则为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= \nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla^2\varphi + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) \\ &= \nabla^2\varphi = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $\nabla$  是哈密顿算子,  $\varphi$  是速度势,  $\mathbf{a}$  是一个非零矢量势. 对于不可压缩流体的动量守恒方程为 N-S 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times [\nabla \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})] \\ + \frac{1}{2}\nabla |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 \\ = \mathbf{g} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu\nabla^2(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $t$  是时间,  $g$  是重力加速度,  $P$  是压力,  $\rho$  是流体密度,  $\nu$  是流体的运动黏性系数. 将  $\mathbf{u} = \nabla\varphi$  代入到方程 (2) 并考虑到无旋运动的特点, 方程 (2) 可简化为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi + \frac{P - P_{vc}}{\rho} + gz = \frac{P_\infty}{\rho}, \quad (3)$$

式中  $P_\infty$  是无穷远处参考压力, 模型中不考虑背景声压, 气泡的背景压力只有静水压力.  $P_{vc}$  为黏性压力, 满足

$$-\nabla P_{vc} = \rho \left[ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \nu\nabla^2\mathbf{v} \right], \quad (4)$$

用 (4) 式直接求解  $P_{vc}$  十分困难, 本文采用间接求解方法.

### 2.2 边界层理论

对于法向应力, 在第  $i$  个气泡的界面处, 根据杨氏-拉普拉斯方程, 可知法向应力平衡条件为

$$P_{l_i} = P_{b_i} + \tau_{n_i} - \sigma\kappa_i, \quad (5)$$

式中下标  $i$  表示第  $i$  个气泡,  $i$  可取 1 或者 2;  $P_l$  是界面处液体压力,  $P_b$  是界面处气体压力, 对于气泡有  $P_b = P_c + P_0(V_0/V)^\iota$ , 其中  $P_c$  是饱和蒸汽压,  $P_0$  和  $V_0$  分别是气泡初始形成时的压力和体积,  $V$  是气泡体积,  $\iota$  是气泡内气体的比热比;  $\tau_n$  是法向黏性应力;  $\sigma$  是表面张力系数;  $\kappa$  是界面的局部曲率. 当流场的无旋速度  $\nabla\varphi$  在总速度中占主导地位时, 在气

泡附近很薄的边界层内法向黏性应力可近似表达为满足

$$\tau_n = 2\rho\nu(\partial U_n/\partial n) = 2\rho\nu[(\partial u_n/\partial n) + (\partial v_n/\partial n)] \approx 2\rho\nu(\partial^2\varphi/\partial n^2).$$

对于切向应力, 由于气泡内气体的动力黏性系数相对于流体十分小, 故可认为在气泡表面切向黏性应力为0. 但是, 无旋速度  $\nabla\varphi$  在界面处诱导的切向应力却不为零, 即  $\tau_s = 2\rho\nu(\partial\varphi_\tau/\partial n) \neq 0$ . 如果直接采用切向应力为零的切向应力连续条件, 则无旋速度诱导的切向应力在边界处的做功则被人为忽略了. 为了弥补这一非零的切向应力的贡献, 根据 Joseph 和 Wang<sup>[16]</sup> 的推导, 假设在气泡附近很薄的边界层内, 切向应力  $\tau_s$  的切向做功与黏性压力的法向做功相等:

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}\tau_s dS = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(-P_{vc}) dS, \quad (6)$$

式中  $\mathbf{t}$  和  $\mathbf{n}$  分别是边界的切向单位矢量和法向单位矢量,  $S$  是流域的所有边界, 包含气泡1和气泡2的边界  $S_{b1}$  和  $S_{b2}$ .

如前所述, 采用(4)式直接求解黏性压力  $P_{vc}$  在数值上具有极大困难, 这使得我们不得不寻找求解  $P_{vc}$  的其他方法. 这里引用 Joseph 和 Wang<sup>[16]</sup> 的一个经验性假设条件, 认为黏性压力与无旋速度诱导的法向应力成正比, 即

$$-P_{vc} = C\tau_n = 2\rho\nu C(\partial^2\varphi/\partial n^2), \quad (7)$$

其中  $C$  是未知的比例系数, 考虑到(6)式中的  $\tau_s$  在三维问题中难以直接求解, 这里采用能量守恒法进行求解. 对于三维工况, 首先需要将  $\partial^2\varphi/\partial n^2$  转化到笛卡尔坐标系中, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} &= \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}(\varphi_x n_x + \varphi_y n_y + \varphi_z n_z) \\ &= \frac{\partial\varphi_x}{\partial n} n_x + \frac{\partial\varphi_y}{\partial n} n_y + \frac{\partial\varphi_z}{\partial n} n_z, \end{aligned} \quad (8)$$

式中  $\varphi_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ,  $\varphi_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ,  $\varphi_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ ,  $(n_x, n_y, n_z)$  是单位法向量  $\mathbf{n}$  在笛卡尔坐标系中的三个分量.

根据 Lamb<sup>[22]</sup> 的公式, 对于无旋流场, 黏性能量耗散率  $D$  可表达为

$$\begin{aligned} D &= \rho\nu \int_S \frac{\partial}{\partial n}(u^2 + v^2 + w^2) dS \\ &= 2\rho\nu \int_S \varphi_x \frac{\partial\varphi_x}{\partial n} + \varphi_y \frac{\partial\varphi_y}{\partial n} + \varphi_z \frac{\partial\varphi_z}{\partial n} dS, \end{aligned} \quad (9)$$

式中  $(u, v, w)$  是速度矢量  $\mathbf{u}$  在笛卡尔坐标系中的三个分量. 另一方面, 通过功能关系, 黏性能量耗散

率  $D$  与单位时间黏性应力做功  $W$  相等:

$$D = W = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\tau_n dS + \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}\tau_s dS. \quad (10)$$

将方程(6), (7), (8)代入方程(10), 再与方程(9)联立, 最终可获得未知系数  $C$  的表达式为

$$C = \frac{\int_S \varphi_x \frac{\partial\varphi_x}{\partial n} + \varphi_y \frac{\partial\varphi_y}{\partial n} + \varphi_z \frac{\partial\varphi_z}{\partial n} dS}{\int_S \varphi_n \left( \frac{\partial\varphi_x}{\partial n} n_x + \frac{\partial\varphi_y}{\partial n} n_y + \frac{\partial\varphi_z}{\partial n} n_z \right) dS} - 1. \quad (11)$$

### 2.3 边界条件

将方程(5)和(7)代入方程(3)中, 并考虑到物质导数与局部导数间的关系  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\nabla\varphi + \mathbf{v}) \cdot \nabla$ , 则可以获得在第  $i$  个气泡表面的全非线性动力学边界条件:

$$\begin{aligned} \frac{D\varphi_{-i}}{Dt} &= \frac{1}{2} |\nabla\varphi_{-i}|^2 - 2v(1+C) \frac{\partial^2\varphi_{-i}}{\partial n^2} \\ &\quad + \frac{\sigma\kappa_{-i}}{\rho} - gz_{-i} \\ &\quad - \frac{P_c + P_{0-i}(V_{0-i}/V_{-i})^t - P_\infty}{\rho}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $\frac{\partial^2\varphi_{-i}}{\partial n^2}$  和  $C$  的具体求解方法见2.2节.

拉格朗日系统中第  $i$  个气泡的全非线性运动学边界条件为

$$\frac{D\mathbf{x}_{-i}}{Dt} = \nabla\varphi_{-i}, \quad (13)$$

式中  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  是气泡上任一个质点的矢量坐标. 最后, 在无穷远处扰动为零, 则无穷远边界条件为

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty \right). \quad (14)$$

### 2.4 三维边界元方法和无量纲化

采用格林第三公式和格林函数  $G$ , 方程(1)可转化为如下的边界积分方程:

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi(\mathbf{p}) &= \iint_S \left( \frac{\partial\varphi(\mathbf{q})}{\partial n_q} G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial n_q} G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right) dS, \end{aligned} \quad (15)$$

式中  $S$  是包含气泡表面  $S_{b1}$  和  $S_{b2}$  以及无穷远边界  $S_\infty$  在内的所有边界;  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{q}$  分别是场点和源点,  $\varepsilon(\mathbf{p})$  是在  $\mathbf{p}$  点处观察流场的立体角; 三维格林函数  $G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1/|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$ , 其中  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{r}$  分别是  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{q}$  的位置矢量.

为了求解方程(8)和(11)中的二阶偏导数  $\frac{\partial \varphi_x}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial \varphi_y}{\partial n}$  和  $\frac{\partial \varphi_z}{\partial n}$ , 根据 Wu<sup>[23]</sup> 的推导以及格林函数的性质, 有

$$\varepsilon(\mathbf{p})\varphi_x(\mathbf{p}) = \iint_S \left( \frac{\partial[\varphi_x(\mathbf{q})]}{\partial n_q} G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \varphi_x(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial n_q} G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right) dS, \quad (16)$$

对于  $y$  和  $z$  方向有类似的公式. 对于偏微分方程(16)可以参照方程(15)的方法进行求解, 将求解的结果代入方程(8)和(11), 即可得到  $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial n^2}$  和  $C$ .

采用  $R_{\max}$ ,  $P_\infty$ ,  $R_{\max} \sqrt{\rho/P_\infty}$  和  $\sqrt{P_\infty/\rho}$  分别作为长度、压力、时间和速度的特征量, 定义强度参数、雷诺数、韦伯数、傅汝德数和距离参数分别如下:

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \frac{P_0}{P_\infty}, & Re &= \frac{R_{\max} \sqrt{P_\infty/\rho}}{v}, \\ We &= \frac{P_\infty R_{\max}}{\sigma}, & Fr &= \sqrt{\frac{P_\infty}{\rho g R_{\max}}}, \\ \lambda &= \frac{h}{R_{\max}}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\zeta_i$  是第  $i$  个气泡的强度参数, 不同气泡的强度参数可以一样也可以不一样;  $R_{\max}$  为所有气泡在无界自由场中球状运动时能达到的最大半径, 初始强度参数越大的气泡  $R_{\max}$  也越大. 后文中无量纲量均用“一拔”表示.

### 3 结果与讨论

#### 3.1 有效性验证

为了校核本文数值模型的有效性, 这里采用单个球状气泡为对象, 忽略重力的影响 ( $Fr \rightarrow \infty$ ), 分别采用解析解和数值模型求解单个球状气泡在黏性流体中的脉动. 当气泡是球状时, 气泡半径的脉动方程可由 Rayleigh-Plesset 方程<sup>[24]</sup> 求解:

$$\ddot{\bar{R}}\bar{R} + \frac{3}{2}\dot{\bar{R}}^2 = \zeta \left( \frac{\bar{R}_0}{\bar{R}} \right)^{3\zeta} - \frac{4}{Re} \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}} - \frac{2}{We\bar{R}} - 1, \quad (18)$$

式中  $\ddot{\bar{R}}$  和  $\dot{\bar{R}}$  分别是气泡无量纲半径对无量纲时间的二阶和一阶导数. 根据方程(18)经过进一步推导可以获得气泡无量纲初始半径  $\bar{R}_0$  与强度参数  $\zeta$  和韦伯数  $We$  的关系:

$$\frac{\zeta}{3-3\zeta} (\bar{R}_0^{3\zeta} - \bar{R}_0^3) + \frac{1}{3} (\bar{R}_0^3 - 1)$$

$$+ \frac{1}{We} (\bar{R}_0^2 - 1) = 0. \quad (19)$$

另一方面, 可采用本文建立的边界元模型进行求解, 且考虑到球状气泡为轴对称模型, 可分别采用轴对称边界元和三维边界元获得数值结果. 将数值结果与解析解进行对比分析, 验证数值程序.

选取初始无量纲参数为  $\zeta = 100$ ,  $We = 1.37 \times 10^6$ ,  $Re = 100$  和  $\bar{R}(0) = 0$ . 通过初始条件(19)式可以计算得到无量纲初始半径  $\bar{R}_0 = 0.1485$ . 对应的轴对称模型母线离散为 33 个节点, 32 个线性单元; 三维模型表面离散为 362 个节点, 720 个三角形单元. 图 2 给出了球状气泡半径随时间变化的轴对称、三维数值结果与精确解的对比曲线. 图中图标  $Re(\infty)$  表示雷诺数趋于无穷大, 即不考虑黏性效应的工况;  $Re(10^2)$  表示采用 Rayleigh-Plesset 方程(18)直接求解的精确解; axi 表示对应的轴对称边界元模型的结果; 3d 表示对应的三维边界元模型的结果. 由图 2 可见, 不考虑黏性效应的情况下, 气泡在每次膨胀到最大时刻均可精确达到无量纲最大半径 1, 且无量纲运动周期维持在 1.99 不变. 此时可将气泡视为一个无能量损耗的弹簧振子, 在内外压力差和惯性作用下不断往复地在平衡位置振动. 然而, 在考虑了黏性效应之后, 气泡每次膨胀到最大的半径将无法达到 1, 且随着脉动而逐渐减小, 前三周期最大半径依次为 0.966, 0.914, 0.873; 相应地, 收缩到最小的半径也大于初始半径  $\bar{R}_0 = 0.1485$ , 且随脉动而逐渐增大. 同时, 气泡脉动的周期逐渐减小, 首次和二次依次为 1.95 和 1.89.

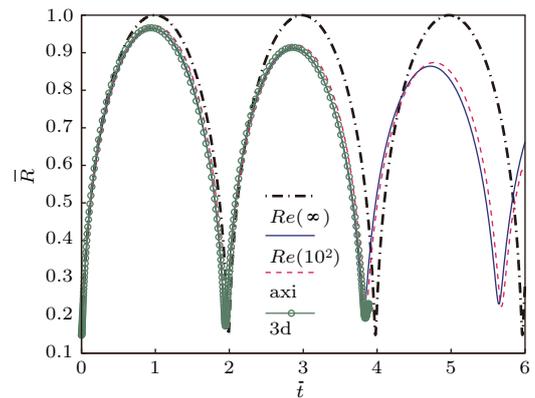


图 2 (网刊彩色) 黏性球状气泡半径时历曲线  
Fig. 2. (color online) Time histories of bubble radius with viscous effect of fluid.

对于轴对称边界元模型, 在前三周期气泡半径最大时刻与精确解的相对误差分别为 0.76%,

1.01%和1.13%，对于三维边界元模型，在前两周周期气泡最大半径时的相对误差分别为0.19%和0.36%。可见轴对称和三维模型的数值解与Rayleigh-Plesset方程精确解符合度很高，证明了本文建立的边界元模型是有效可行的。由于轴对称模型与三维模型的网格构造方法不同：对于轴对称模型，只需在母线上划分若干段线段网格；对于三维模型，需要在整个球面上划分若干个三角形网格。数值计算中网格划分方法会对计算结果有一定影响，所以在数值积分时，二者结果会有一定差异。从图中可见两种模型的差异十分微小，在数值计算中是可以理解和接受的。此时气泡可视为计入结构内黏性的弹簧振子模型，在往复振动中不断有黏性能量消耗。Zhang等<sup>[25]</sup>给出了考虑流场可压缩性后气泡半径脉动曲线，也观察到了类似的半径衰减的现象，然而二者产生的原因是截然不同的，计及黏性效应时初始气泡内能不断被黏性耗散，而可压缩性是将初始内能不断传递并储存到流场中。

图3和图4分别给出了球状气泡径向速度 $\bar{u}_n$ 即 $\dot{\bar{R}}$ 和气泡内气体压力 $\bar{P}_b$ 随时间的变化规律，图标含义同上。从图3可见，无黏气泡无量纲最大膨胀和收缩速度均为4.631，保持不变，发生在内外气压平衡时刻。而黏性气泡的最大膨胀和坍塌速度逐渐降低。类似地，对于气泡内压也有一样的规律，考虑了黏性耗散能量之后，气泡的内压无法达到初始强度100，且衰减的速度很快，二次和三次峰值分别为55.93和36.34。同样地，无论对于轴对称模型还是三维模型，数值结果均于解析解符合度十分高。

图5给出了球状气泡无量纲黏性耗散率的变化曲线。

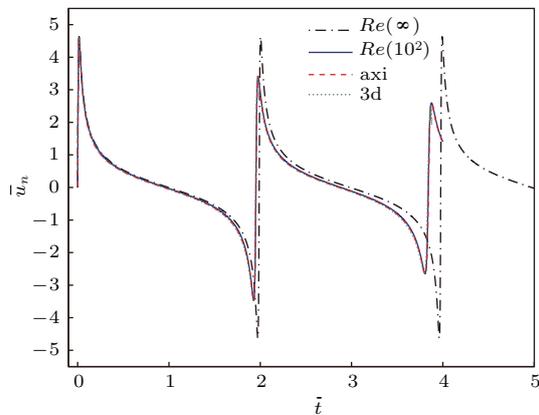


图3 (网刊彩色) 黏性球状气泡径向速度时历曲线  
Fig. 3. (color online) Time histories of radial velocity of the bubble with viscous effect of fluid.

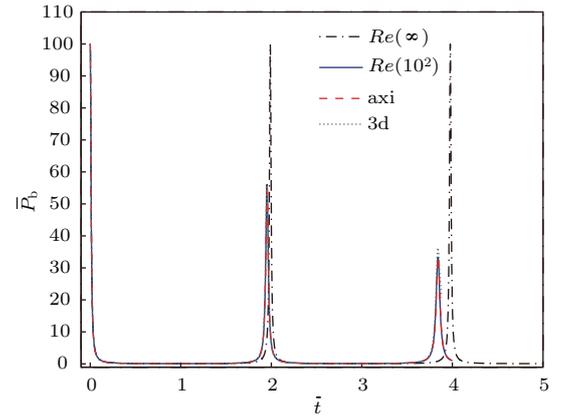


图4 (网刊彩色) 黏性球状气泡内压时历曲线  
Fig. 4. (color online) Time histories of inner pressure of the bubble with viscous effect of fluid.

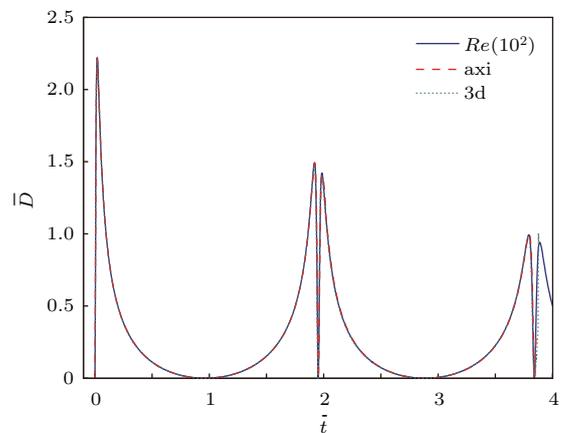


图5 (网刊彩色) 球状气泡黏性耗散率时历曲线  
Fig. 5. (color online) Time histories of viscous dissipation rate of the bubble

对于球状脉动气泡，可根据(9)或(10)式有 $\bar{D} = 16\pi\bar{R}\dot{\bar{R}}^2/Re$ 。结合图2半径 $\bar{R}$ 和图3径向速度 $\dot{\bar{R}}$ 的变化曲线，就不难理解在一个周期内黏性耗散率分别在最大体积和最小体积时刻达到零点，在法向速度最大时刻出现两次峰值，且峰值逐渐衰减的现象了。图中轴对称和三维模型应用(9)式计算的 $\bar{D}$ 与Rayleigh-Plesset方程计算的精确解符合得很好，再次验证数值的有效性。

### 3.2 典型结果分析

在验证数值模型有效性的基础上，研究两个串列的气泡的相互作用。假定两个气泡初始均静止且二者内压相同，即强度参数一致。这里给定初始参数分别为 $\zeta_1 = \zeta_2 = 100$ ,  $We = 1.37 \times 10^6$ ,  $Re = 100$ ,  $Fr = 5$ 和 $\lambda = 2.5$ 。零时刻气泡表面的初值条件为 $\dot{\bar{R}}(0) = 0$ 和 $\bar{\varphi} = 0$ 。

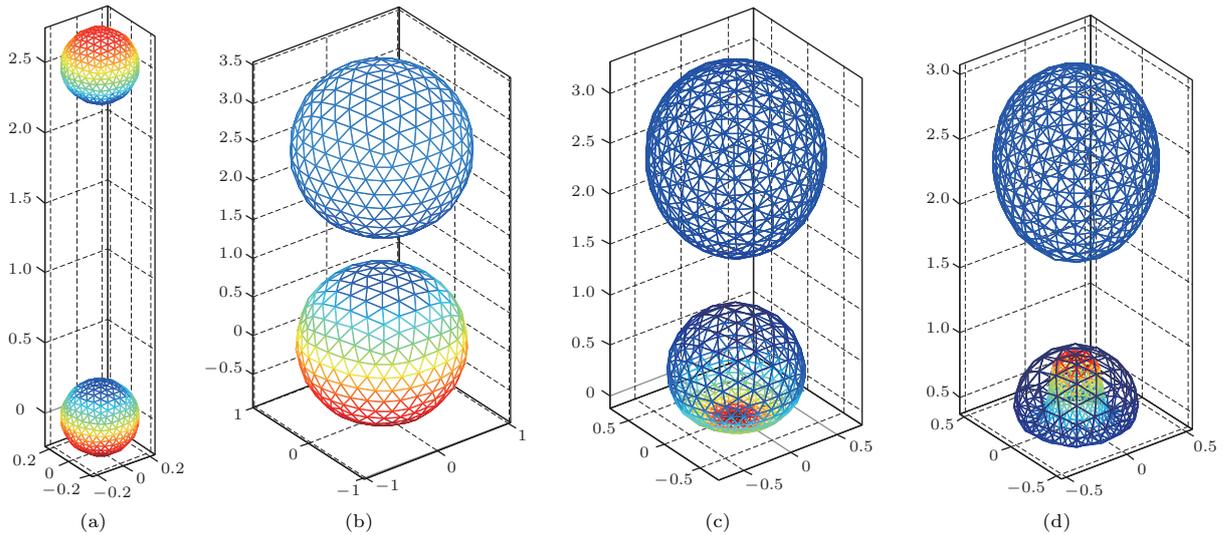


图6 (网刊彩色)重力场中考虑流体黏性效应的两气泡演化过程 (a)  $\bar{t} \approx 0.0241$ ; (b)  $\bar{t} \approx 1.2336$ ; (c)  $\bar{t} \approx 1.9911$ ; (d)  $\bar{t} \approx 2.2025$

Fig. 6. (color online) The evolution of the bubbles with viscous effect of fluid under gravity: (a)  $\bar{t} \approx 0.0241$ ; (b)  $\bar{t} \approx 1.2336$ ; (c)  $\bar{t} \approx 1.9911$ ; (d)  $\bar{t} \approx 2.2025$ .

图6给出了考虑流体黏性效应的两个气泡耦合作用的演化过程,其中云图表示速度势大小(红色表示高、蓝色表示低).图6(a)对应气泡初始状态,两个球状气泡在各自高压的作用下向外膨胀,由于气泡间的耦合作用,相互临近的表面的速度势和速度较低,而相互远离的表面的速度势和速度较高.图6(b)对应上气泡体积达到最大的时刻,此时下气泡的下表面在浮力的作用下已经开始进入收缩阶段.从图6(c)中可清晰地观察到下气泡的下表面已经变得平坦,而上气泡在下气泡的吸引作用下呈现“鸭蛋状”.图6(d)对应下气泡坍塌结束时刻,此时可见在浮力、流体黏性、气泡之间的吸引力(又称为Bjerknes力)等多种耦合作用的影响下,下气泡的下表面内卷形成典型的气泡射流,射流即将穿透下气泡而形成环状射流.同时上气泡在多种力的作用下,仍然以“鸭蛋状”较慢慢地收缩.

由于缺乏可对比的实验数据,这里分别采用轴对称边界元模型和三维边界元模型计算图6的工况,并将计算得到的射流速度曲线进行对比,如图7所示,其中viscous axi和viscous 3d分别是考虑黏性作用的轴对称模型和三维模型.本文将射流速度定义为气泡下表面内凹最高点处流体质点的法向速度.从图7的对比可见二者计算的结果精确符合,再度验证了数值模型的有效性.此外,为了突出流体黏性效应的作用,再采用三维边界元模型计算不考虑黏性作用的图6工况,即令 $Re$ 无穷大,而保持其他参数不变.不考虑黏性效应的计算结果

与考虑黏性效应的计算结果对比显示,考虑黏性作用后,射流尖端的速度降低,射流撞击气泡表面的时间推迟.表明流体的黏性效应将抑制气泡射流的发展,降低气泡射流的速度和能量.

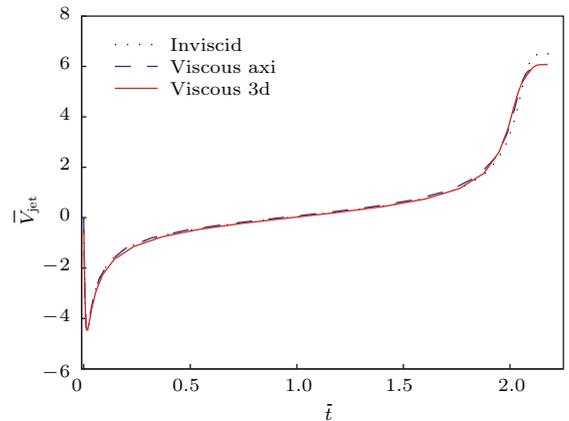


图7 (网刊彩色)两个气泡耦合作用中下气泡射流速度曲线对比图

Fig. 7. (color online) Variation of jet velocity of the lower bubble during interaction of two bubbles.

在进一步讨论黏性效应对能量的影响之前,这里给出流场动能、势能和黏性耗散能及总能量的定义.首先,整个流场的无量纲动能如下:

$$\bar{E}_k = \frac{1}{2} \iiint_v \nabla \bar{\varphi} \nabla \bar{\varphi} dv = \frac{1}{2} \iint_S \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} dS, \quad (20)$$

式中 $v$ 为流场的体积, $S$ 为包含气泡表面在内的流

域所有界面. 气泡的无量纲势能<sup>[26]</sup>定义如下:

$$\bar{E}_p = \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{\zeta \bar{V}_{-i}}{l-1} \left( \frac{V_{0-i}}{V_{-i}} \right)^l + \bar{V}_{-i} \left( 1 - \frac{\bar{z}_{c-i}}{Fr^2} \right) + \frac{\bar{S}_{B-i}}{We} \right], \quad (21)$$

式中  $\bar{z}_{c-i}$  为第  $i$  个气泡中心的  $z$  方向坐标, 其余变量含义同前. 因考虑黏性效应而引入的黏性耗散能可通过对黏性耗散率积分得到:

$$\bar{E}_d = \int_0^{\bar{t}} \bar{D} d\bar{t}, \quad (22)$$

式中无量纲黏性耗散率  $\bar{D}$  可通过 (9) 或 (10) 式数值求得.

气泡在脉动过程中, 守恒的总能量  $E_{total}$  除了动能、势能相互转化的机械能  $E_m$  外, 还将存在一部分黏性耗散能  $E_d$ , 即

$$\bar{E}_{total} = \bar{E}_m + \bar{E}_d = \bar{E}_k + \bar{E}_p + \bar{E}_d = \bar{E}_{p0}, \quad (23)$$

(23) 式的最后一个等号是因为初始时刻流场动能和黏性耗散能均为 0.

图 8 给出了图 6 对应的工况中两个气泡相互作用过程中, 流场中能量相互转换的曲线. 从图中可见, 随着两个气泡的运动, 流场能量由最开始的气泡势能转换为两个气泡的动能以及流场的黏性耗散能. 对于动能, 明显地随着气泡的膨胀、坍塌等阶段呈现波峰波谷的特性; 黏性耗散能则不同, 它随着气泡的运动而不断上升, 尤其在气泡射流坍塌即将发生阶段, 上升得更快, 说明黏性摩擦的作用在气泡射流速度高的时候表现得更为明显. 总体而言, 总能量在整个变化过程中数值误差允许范围内是守恒的. 可见黏性效应在气泡射流速度、流场能量的转化中是很重要的.

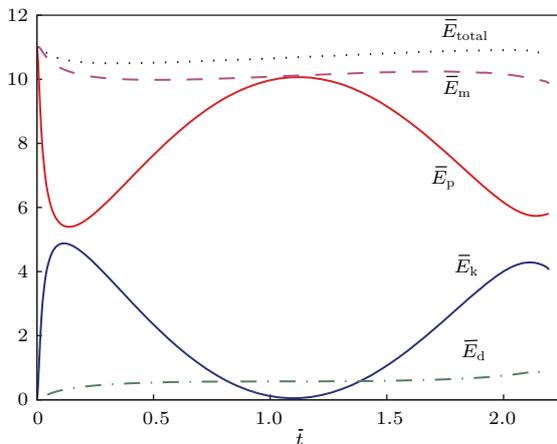


图 8 (网刊彩色) 两个气泡耦合作用中流场无量纲能量的转化过程

Fig. 8. (color online) Variation of dimensionless energy during interaction of two bubbles.

### 3.3 影响因素分析

本节分析雷诺数和韦伯数对于气泡运动过程的影响规律. 为了清晰地观察二者的影响, 忽略重力影响 ( $Fr \rightarrow \infty$ ), 采用简单的球状气泡为例, 计算不同雷诺数和韦伯数下气泡脉动特性, 同时在考虑其中任一参数 (称为主要参数) 时, 令另外一参数 (称为次要参数) 足够大, 以降低次要参数对主要参数的影响, 从而突出考察黏性效应和表面张力效应.

保持  $\zeta = 100$ ,  $We = 1.37 \times 10^6$  和  $\bar{R}(0) = 0$  不变, 令雷诺数从  $10^7$  依次变为  $10^2$ , 选取三维边界元模型计算气泡相关参数的变化.

图 9 给出了不同雷诺数下气泡半径变化曲线, 其中  $Re(\infty)$  仍表示对应不考虑黏性效应的工况. 从图中可见, 气泡半径在高雷诺数下变化很不敏感, 雷诺数  $Re$  在  $10^4$  时, 气泡半径基本与不考虑黏性效应是重合的;  $Re$  在  $10^4$ — $10^3$  之间变化时, 气泡半径损失十分微弱, 在前两个周期内, 可以忽略黏性效应; 仅当  $Re$  在  $10^2$  以下时, 气泡半径损失明显, 黏性效应必须考虑.

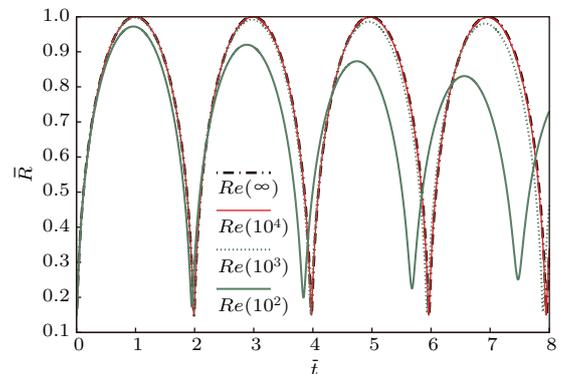


图 9 (网刊彩色) 不同雷诺数下球状气泡半径的变化  
Fig. 9. (color online) Time histories of spherical bubble radius at different  $Re$  number.

图 10 给出了当雷诺数  $Re$  分别取  $10^2$ — $10^3$  间某几个典型数值时黏性耗散率的变化曲线. 从图中可见随着  $Re$  减小, 黏性耗散率逐渐增大, 且随着时间推进, 峰值衰减更快. 数值计算表明, 当  $Re$  大于  $10^3$  之后, 黏性耗散率的数值已经很小, 故没有在图中绘制.

其次, 保持  $\zeta = 10$ ,  $Re = 10^{10}$  和  $\bar{R}(0) = 0$  不变, 令韦伯数  $We$  从  $1.37 \times 10^6$  依次变为  $1.37 \times 10^1$ , 选取三维边界元模型计算气泡相关参数的变化.

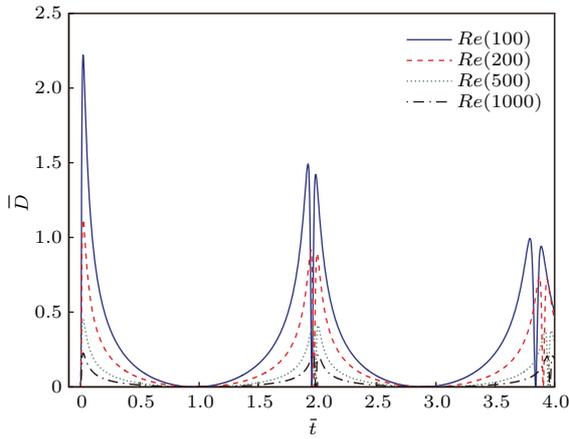


图 10 (网刊彩色) 不同雷诺数下球状气泡黏性耗散率的变化

Fig. 10. (color online) Time histories of spherical bubble radius at different Reynolds number.

图 11 给出了不同韦伯数  $We$  下气泡半径变化曲线。从图中可见, 无论  $We$  如何变化, 气泡的无量纲最大半径一直是 1, 即韦伯数不会影响气泡脉动的幅值, 但是会影响脉动的周期。而且当  $We$  在高于  $10^6$  量级时, 气泡的半径几乎重合, 可以忽略表面张力效应; 当  $We$  处于  $10^6-10^2$  之间时, 气泡半径和周期变化不敏感; 当  $We$  取  $10^1$  量级及以下时, 表面张力效应显著, 气泡脉动周期显著减小, 即气泡振动更快。

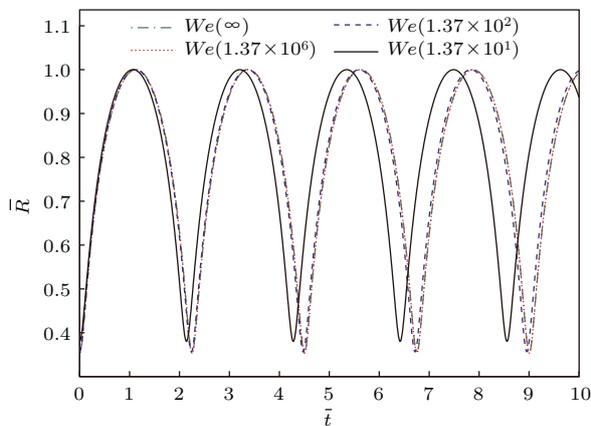


图 11 (网刊彩色) 不同韦伯数下球状气泡半径的变化

Fig. 11. (color online) Time histories of spherical bubble radius at different Weber number.

图 12 给出了韦伯数分别取 137 和 13.7 两种工况下流场动能和势能以及总能量的变化曲线。由于此时雷诺数  $Re = 10^{10}$ , 黏性耗散能已经十分微小, 可忽略不计。从图中的对比曲线可见, 韦伯数的增加对动能影响较小, 对势能影响很大, 这是因为势能中含有表面张力效应项  $\bar{S}_B/We$ 。

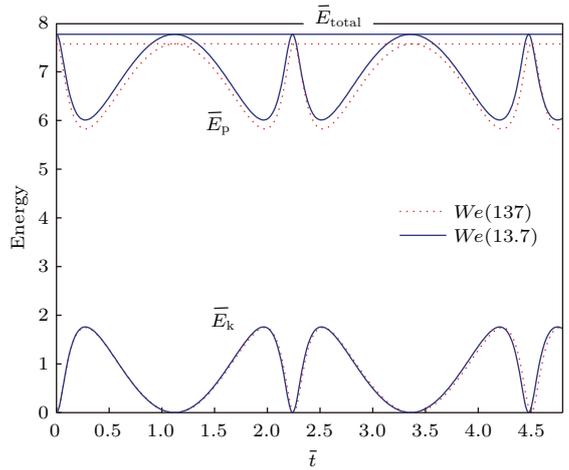


图 12 (网刊彩色) 不同韦伯数下球状气泡能量的变化

Fig. 12. (color online) Time histories of energy of spherical bubble at different Weber number.

总体而言, 黏性效应会使得气泡振动幅值衰减, 同时气泡周期缩短; 而表面张力会使得气泡周期缩短但幅值不变, 同时势能增加。然而, 气泡半径对高雷诺数和高韦伯数变化均不敏感, 此时基本可以忽略黏性效应和表面张力效应。

## 4 结 论

基于气泡边界层理论, 修正现有的势流理论, 建立考虑流体弱黏性效应的三维边界元模型, 研究考虑流体黏性效应和表面张力效应下气泡的脉动和气泡间的耦合作用。首先, 采用 Rayleigh-Plesset 方程求解球状气泡, 将边界元模型的计算结果与解析解进行对比, 验证数值模型的有效性。在此基础上, 选择两个气泡相互耦合作为典型算例, 分析考虑黏性作用下气泡耦合、气泡射流和流场能量等的变化。最后研究雷诺数和韦伯数两个参数对气泡脉动的影响规律。得到以下主要结论:

- 1) 采用黏性压力法向做功与切向应力切向做功等效的方法, 可巧妙地解决无旋速度  $\nabla\varphi$  在界面处诱导的切向应力不为零, 但势流理论中选取切向应力为零作为边界条件的矛盾, 从而弥补了经典势流理论中忽略了切向应力在边界处做功的缺失;
- 2) 就非球状气泡而言, 当考虑气/液交界面处法向和切向黏性效应后, 气泡射流在黏性流体中速度减慢, 气泡射流能量降低, 流场损失的动能和势能逐渐转化为黏性耗散能, 且在射流速度较大的坍塌后期, 黏性耗散能增长得越快;
- 3) 就球状气泡而言, 黏性效应会使得气泡振动幅值衰减, 同时气泡周期缩短, 黏性耗散能不断

增加; 表面张力会使得气泡周期缩短但脉动幅值不变, 同时气泡整体势能增加; 当雷诺数和韦伯数较大后, 可忽略黏性和表面张力的影响.

### 参考文献

- [1] Boulton-Stone J M, Blake J R 1993 *J. Fluid Mech.* **254** 437
- [2] Cui P, Zhang A M, Wang S P 2016 *Phys. Fluids* **28** 117103
- [3] Xue Y Z, Cui B, Ni B Y 2016 *Ocean Eng.* **118** 58
- [4] Sato K, Tomita Y, Shima A 1994 *J. Acoust. Soc. Am.* **95** 2416
- [5] Rungsiyaphornrat S, Klaseboer E, Khoo B C, Yeo K S 2003 *Comput. Fluids* **32** 1049
- [6] Chew L W, Klaseboer E, Ohl S W, Khoo B C 2011 *Phys. Rev. E* **84** 0663078
- [7] Han R, Li S, Zhang A M, Wang Q X 2016 *Phys. Fluids* **28** 062104
- [8] Guo X, Cai C, Xu G, Yang Y, Tu J, Huang P, Zhang D 2017 *Ultrason. Sonoche.* **39** 863
- [9] Zhang Y, Zhang Y, Li S 2017 *Ultrason. Sonoche.* **35** 431
- [10] Liu L T, Yao X L, Zhang A M, Chen Y Y 2017 *Phys. Fluids* **29** 012105
- [11] Miksis M J, Vanden-Broeck J M, Keller J B 1982 *J. Fluid Mech.* **123** 31
- [12] Lundgren S, Mansour N 1988 *J. Fluid Mech.* **194** 479
- [13] Boulton-Stone J M 1995 *J. Fluid Mech.* **302** 231
- [14] Georgescu S C, Achard J L, Canot E 2002 *Euro. J. Mech. B-Fluids* **21** 265
- [15] Klaseboer E, Manica R, Chan D Y C, Khoo B C 2011 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **35** 489
- [16] Joseph D D, Wang J 2004 *J. Fluid Mech.* **505** 365
- [17] Lind S J, Phillips T N 2012 *Theor. Comp. Fluid Dyn.* **26** 245
- [18] Lind S J, Phillips T N 2013 *Phys. Fluids* **25** 022014
- [19] Ni B Y, Li S, Zhang A M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 124704 (in Chinese) [倪宝玉, 李帅, 张阿漫 2013 物理学报 **62** 124704]
- [20] Zhang A M, Ni B Y 2014 *Comput. Fluids* **92** 22
- [21] Li S, Ni B Y 2016 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **68** 63
- [22] Lamb H 1932 *Hydrodynamics* (sixth Ed.) (Cambridge: Cambridge University Press) pp580–581
- [23] Wu G X 1991 *Appl. Ocean Res.* **13** 317
- [24] Rayleigh J W 1917 *Philos. Mag.* **34** 94
- [25] Zhang A M, Wang S P, Wu G X 2013 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **37** 1179
- [26] Best J P 1993 *J. Fluid Mech.* **251** 79

# Influence of viscosity and surface tension of fluid on the motion of bubbles\*

Ai Xu-Peng Ni Bao-Yu<sup>†</sup>

(College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

( Received 18 July 2017; revised manuscript received 12 August 2017 )

## Abstract

Boundary integral simulation has been conducted to study the motion and deformation of bubbles with weak viscous and surface tension effects in fluid. Both normal and tangential stress boundary conditions are satisfied and the weak viscous effects are confined to the thin boundary layers around bubble surfaces, which is also known as boundary layer theory of bubble. By using this method, the influence of viscosity and surface tension of fluid on the motion of bubbles has been studied. Both axisymmetric and three-dimensional numerical results are compared with analytical results of Rayleigh-Plesset equation. Good agreement between them is achieved, which validates the numerical model. On this basis, interaction model between two vertically placed bubbles is established, by taking the surface tension, gravity, and viscous effects into consideration. Variations of physical quantities including bubble deformation, jet velocity, and energy of fluid are studied. Last but not least, the influence of viscosity and surface tension on the motion of a spherical bubble is investigated. It is found that viscous effects of fluid depress the pulsation of bubble and part of fluid energy is transformed into viscous dissipation energy. As a result, the development of bubble jet, the radius of the bubble, and the jet velocity are reduced gradually. On the other hand, the surface tension of fluid does not change the range of the bubble pulsation but reduces the period of the bubble pulsation and enhances the potential energy of the bubble. This model and numerical results aim to provide some references for bubble dynamics in bioengineering, chemical engineering, naval architecture, and ocean engineering, etc.

**Keywords:** bubble, boundary layer, viscosity, surface tension

**PACS:** 47.55.db, 47.55.dr, 47.55.df, 47.11.Hj

**DOI:** [10.7498/aps.66.234702](https://doi.org/10.7498/aps.66.234702)

---

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51639004, 51579054, 11472088), the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant Nos. HEUCFM170110, HEUCFP201701, HEUCFP201777), and the 111 Project of Harbin Engineering University, China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [nibaoyu@hrbeu.edu.cn](mailto:nibaoyu@hrbeu.edu.cn)