

Non-Kolmogorov 湍流大气中小尺度热晕效应线性理论

张鹏飞 乔春红 冯晓星 黄童 李南 范承玉 王英俭

Linearization theory of small scale thermal blooming effect in non-Kolmogorov turbulent atmosphere

Zhang Peng-Fei Qiao Chun-Hong Feng Xiao-Xing Huang Tong Li Nan Fan Cheng-Yu Wang Ying-Jian

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **66**, 244210 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.244210

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.244210>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I24>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于同步探测的脉冲钠导星聚焦非等晕性实验研究

Experimental research on focusing anisoplanatism of sodium guide star via synchronous pulse detection

物理学报.2015, 64(13): 134207 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.134207>

球差光束在大气湍流中传输特性的实验研究

Experimental study on propagation properties of spherically aberrated beams through atmospheric turbulence

物理学报.2014, 63(13): 134209 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.134209>

非Kolmogorov 大气湍流对高斯列阵光束扩展的影响

Influence of non-Kolmogorov turbulence on the spreading of Gaussian array beams

物理学报.2014, 63(1): 014207 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.014207>

多色部分相干偏心光束在 non-Kolmogorov 湍流中的传输

Propagation of polychromatic partially coherent decentred laser beams propagating in non-Kolmogorov turbulence

物理学报.2013, 62(14): 144211 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.144211>

倾斜离轴高斯-谢尔模型光束在大气湍流中通过猫眼光学镜头反射光的光强特性

Average intensity of tilted and off-axis Gaussian Schell-model beams propagating through a cat-eye optical lens in atmospheric turbulence

物理学报.2013, 62(9): 094214 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.094214>

# Non-Kolmogorov 湍流大气中小尺度热晕效应 线性理论\*

张鹏飞 乔春红<sup>†</sup> 冯晓星 黄童 李南 范承玉 王英俭

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 大气成分与光学重点实验室, 合肥 230031)

(2017年5月16日收到; 2017年7月24日收到修改稿)

从小尺度热晕线性理论出发, 在 non-Kolmogorov 谱的基础上, 得到了 non-Kolmogorov 谱湍流下热晕相位补偿的 Strehl 比表达式, 分析了湍流谱对高能激光的相位补偿的影响. 研究表明湍流谱对湍流热晕效应的相位补偿有重要的影响. 在相同的湍流菲涅耳数下, 当谱指数越接近于 3 时补偿效果越差, 谱指数接近于 4 时补偿效果越好. 在相同大气相干长度条件下或在相同湍流折射率常量条件下, 当谱指数接近于 3 时, Strehl 比随热晕效应的增强而下降变快, 当湍流谱指数逐渐接近于 4 时, Strehl 比下降速度变慢. 其原因是随着湍流谱指数的增大, 湍流热晕相互作用引起的对数振幅起伏增长变慢.

**关键词:** 高能激光, 热晕效应, 相位补偿, 不稳定性**PACS:** 42.68.Bz, 42.25.Bs, 44.25.+f, 44.05.+e**DOI:** 10.7498/aps.66.244210

## 1 引言

高能激光在大气中传输, 受到湍流效应及非线性热晕效应的影响, 严重限制了激光的传输质量. 对于大气湍流效应引起的光束抖动、漂移与扩展, 使用自适应光学系统的实时补偿可以明显改善光束质量. 然而对于非线性热晕效应的相位补偿, 由于存在相位补偿的正反馈机制<sup>[1,2]</sup>, 在一定条件下会严重限制自适应光学系统对热晕效应的补偿能力.

当光束直径较小时, 整束热晕成为限制非线性热晕效应相位补偿的主要因素; 但对于大口径准直光束, 当热晕主要集中于近口径位置时, 整束热晕效应变得不再明显, 媒质中不均匀源造成的光束振幅起伏和相位扰动成为影响高能激光湍流热晕传输的主要因素. 扰动在非线性热晕效应的作用下逐渐放大, 这种现象称为受激热瑞利散射

(STRS)<sup>[1,2]</sup>, 在湍流介质中的放大现象也可以称为湍流热晕相互作用 (TTBI)<sup>[3]</sup>. 当存在自适应光学系统补偿时, 由于自适应光学系统与主激光之间的正反馈作用, 使得这些扰动增长速率高于 TTBI 或 STRS 的增长速率, 这种现象称为热晕补偿不稳定性 (PCI)<sup>[4]</sup>, 这些小尺度扰动的发展程度最终确定了高能激光在大气中的传输效率.

小尺度热晕的研究主要集中于 20 世纪 90 年代, 小尺度热晕线性理论主要建立于 90 年代末期, Briggs<sup>[5]</sup>, Karr<sup>[3,4,6-8]</sup>, Chambers<sup>[1,2]</sup> 和 Viccelli<sup>[1,2]</sup> 等是主要贡献者. 他们进行了大量的数值模拟及对比实验<sup>[5,8-11]</sup>, 验证了小尺度热晕线性理论的正确性, 但是这些研究主要针对 Kolmogorov 谱大气湍流. 实际的大气湍流不总是符合 Kolmogorov 谱的<sup>[12-15]</sup>, 大量的实验报道了湍流的 non-Kolmogorov 谱特征. 激光在 non-Kolmogorov 湍流大气中传输特性<sup>[16-19]</sup> 的研究也已有较多的进展, 但对于 non-Kolmogorov 湍流与热晕效应相

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61405205) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: [chqiao@aiofm.ac.cn](mailto:chqiao@aiofm.ac.cn)

互作用的研究相对较少. 本文对小尺度热晕理论进行了推广, 使其能够应用于 non-Kolmogorov 湍流大气中.

## 2 理论

在傍轴近似下, 高能激光在大气中的传输方程<sup>[1-3]</sup>可以表示为

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\phi}{\partial z} &= \frac{1}{2k}\Delta_{\perp}\phi + k(n-1)\phi, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)n &= -\Gamma_1 I, \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $\phi$  为光场函数,  $\mathbf{k}$  为波矢,  $z$  为纵向坐标,  $n$  为折射率,  $\Delta_{\perp}$  为横向拉普拉斯算符,  $t$  为时间变量,  $I$

为路径上光强分布,  $\mathbf{V}$  为大气风速,  $\nabla$  为梯度算符;  $\Gamma_1 = \alpha|n_T|/\rho C_P$ ,  $\alpha$  为吸收系数,  $\rho$  为空气密度,  $C_P$  空气的定压比热容,  $n_T$  为折射率随温度变化率. 对方程 (1) 在拉氏、傅氏域求解可以得到

$$\begin{aligned} \psi_{\chi,\phi}(\mathbf{x}, z) &= \int dz' \iint d\boldsymbol{\kappa} \delta n_{\boldsymbol{\kappa}}^0(\boldsymbol{\kappa}, z') G_{\chi,\phi}(\boldsymbol{\kappa}, z, z', t) \\ &\quad \times \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $\mathbf{x}$  为二维空域坐标,  $\boldsymbol{\kappa}$  为二维频域坐标,  $\boldsymbol{\kappa} = \sqrt{(\kappa_x^2 + \kappa_y^2)}$ ,  $\delta n_{\boldsymbol{\kappa}}^0$  表示传输路径上折射率扰动的初始分布, 角标  $\chi, \phi$  分别对应于对数振幅及相位. 对应的时域中对数振幅及相位扰动的格林函数可以表示为<sup>[3,4,20-25]</sup>

$$\begin{aligned} G_{\chi}(\boldsymbol{\kappa}, z, z', t) &= k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\tau\right)^n}{(n!)^2} \left[\frac{\kappa^2(z-z')}{2k}\right]^{n+1} j_n\left(\frac{\kappa^2(z-z')}{2k}\right), \\ G_{\phi}(\boldsymbol{\kappa}, z, z', t) &= k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\tau\right)^n}{(n!)^2} \left[\frac{\kappa^2(z-z')}{2k}\right]^{n+1} j_{n-1}\left(\frac{\kappa^2(z-z')}{2k}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

式中,  $\tau = 4k^2\Gamma_1 I_0 t/\kappa^2$ ,  $j_n$  为  $n$  阶球贝塞尔函数.

在自适应光学系统闭环条件下, 时域中对数振幅及相位扰动的格林函数<sup>[20-25]</sup>可以写为

$$\begin{aligned} G_{\chi}(\boldsymbol{\kappa}, z, z', t) &= k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{(n!)^2} \cdot \frac{d^n}{d\varepsilon^n} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{(1-H(\kappa)) \sin\left(\frac{\sigma\kappa^2(z-z')}{2k}\right) - H(\kappa)/\sigma \cos\left(\frac{\kappa^2 z}{2k}\right) \sin\left(\frac{\sigma\kappa^2 z'}{2k}\right)}{\Delta} \right) \Bigg|_{\varepsilon=0}, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} G_{\phi}(\boldsymbol{\kappa}, z, z', t) &= k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{(n!)^2} \cdot \frac{d^n}{d\varepsilon^n} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{(1-H(\kappa)) \cos\left(\frac{\sigma\kappa^2(z-z')}{2k}\right) + g/\sigma \sin\left(\frac{\kappa^2 z}{2k}\right) \sin\left(\frac{\sigma\kappa^2 z'}{2k}\right)}{\Delta} \right) \Bigg|_{\varepsilon=0}, \end{aligned} \quad (4b)$$

式中  $\frac{d^n}{d\varepsilon^n}$  为函数的  $n$  阶微分,  $\sigma = \sqrt{1+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon = \frac{4k^2\Gamma_1 I_0}{\kappa^2 v}$ ,  $H(\kappa)$  为变形镜的传递函数,

$$\Delta(v, \kappa) = 1 - H(\kappa) + H(\kappa) \left( \cos\left(\frac{\sigma\kappa^2 z}{2k}\right) \cos\left(\frac{\kappa^2 z}{2k}\right) + 1/\sigma \sin\left(\frac{\sigma\kappa^2 z}{2k}\right) \sin\left(\frac{\kappa^2 z}{2k}\right) \right).$$

对非均匀路径上 TTBI 开闭环的格林函数可以通过 Wentzel-Kramers-Brillouin<sup>[4]</sup> 近似进行推广. 利用自适应光学系统开环及闭环条件下的格林函数, 对数振幅起伏及相位起伏的相关函数可以表示为

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\chi,\phi}(\mathbf{x}_1, z) \psi_{\chi,\phi}(\mathbf{x}_2, z) \rangle &= \iiint dz' dz'' \iiint d\boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\kappa}' \langle \delta n_{\boldsymbol{\kappa}}^0(\boldsymbol{\kappa}, z') \delta n_{\boldsymbol{\kappa}'}^0(\boldsymbol{\kappa}', z'') \rangle \\ &\quad \times G_{\chi,\phi}(\boldsymbol{\kappa}, z, z', N_w) G_{\chi,\phi}(\boldsymbol{\kappa}', z, z'', N_w) (\exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}_1 - i\boldsymbol{\kappa}' \cdot \mathbf{x}_2)), \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $N_w = \Gamma_1 I k z t$  为热晕半径, 表征一定时间内热晕引起的相位畸变的程度, 单位为 rad. 对于平台光束, 稳态时热晕半径  $N_w$  与热畸变参数  $N_D$  的关系为  $N_D = \sqrt{2\pi} N_w$ . 湍流折射率的相关函数可以表示为 [26,27]

$$\begin{aligned} & \langle \delta n_{\kappa}^0(\boldsymbol{\kappa}, z') \delta n_{\kappa}^0(\boldsymbol{\kappa}', z'') \rangle \\ &= 2\pi \Phi_n(\boldsymbol{\kappa}, z) \delta(z', z'') \delta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}'), \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\Phi_n$  为湍流折射率谱函数. 将方程 (6) 代入方程 (5), 方程 (5) 可以简化为

$$\begin{aligned} & \langle \psi_{\chi, \phi}(\mathbf{x}_1, z) \psi_{\chi, \phi}(\mathbf{x}_2, z) \rangle \\ &= 2\pi \int dz' \iint \Phi_n(\boldsymbol{\kappa}, z) G_{\chi, \phi}^2(\boldsymbol{\kappa}, z, z', N_w) \\ & \quad \times \exp(i\boldsymbol{\kappa}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|). \end{aligned} \quad (7)$$

对于 non-Kolmogorov 湍流, 谱函数 [28-32] 可以推广为一般的形式:

$$\begin{aligned} & \Phi_n(\boldsymbol{\kappa}, \alpha, z) \\ &= A(\alpha) \beta(z) (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-\alpha/2} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2), \\ & \quad 3 < \alpha < 4, \end{aligned} \quad (8)$$

式中  $A(\alpha) = \Gamma(\alpha - 1) \cos(\alpha\pi/2)/(4\pi^2)$ ;  $\beta(z)$  为湍流的广义折射率结构常量, 单位为  $m^{(3-\alpha)}$ ;  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ ,  $\kappa_m = 2\pi/l_0$ ,  $L_0$  为湍流的外尺度,  $l_0$  为湍流的内尺度, 单位为 m;  $\alpha$  为湍流谱指数, 当谱指数为 11/3 时对应于 Kolmogorov 湍流. 为计算简便, 一般忽略湍流的内外尺度影响.

平面波广义大气相干长度可以表示为 [31,32]

$$\rho_0 = \left( A(\alpha) B(\alpha) k^2 L^{2-\alpha} \int \beta(z') z'^{\alpha-2} dz' \right)^{-\frac{1}{\alpha-2}}, \quad (9)$$

式中

$$B(\alpha) = \frac{-(2)^{4-\alpha} \pi^2 \Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)}{2 \left(\frac{8}{\alpha-2} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha-2}\right)\right)^{\frac{\alpha-2}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (10)$$

因此在忽略湍流内外尺度的条件下, 对数振幅及相位起伏的结构函数可以表示为

$$\begin{aligned} & D_{\chi, \phi}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, z) \\ &= 2(2\pi)^2 A(\alpha) \int dz' \beta(z') \\ & \quad \times \int d\boldsymbol{\kappa} \{ \kappa^{-\alpha+1} G_{\chi, \phi}^2(\boldsymbol{\kappa}, z, z', N_w) \end{aligned}$$

$$\times (1 - J_0(\boldsymbol{\kappa}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)) \}. \quad (11)$$

光场的结构函数可以表示为

$$\begin{aligned} & D(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, z) \\ &= D_{\chi}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, z) + D_{\phi}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, z). \end{aligned} \quad (12)$$

方程 (12) 是普遍适用的, 只要确定了格林函数, 那么光场的结构函数便确定了. 下面对其分类讨论.

### 1) 纯湍流效应下的结构函数

在仅考虑湍流效应的情况下, 方程 (3) 和 (4) 可以得到简化, 在自适应光学系统开环条件下,

$$\begin{aligned} G_{\chi}(\boldsymbol{\kappa}, z, z') &= k \sin\left(\frac{\kappa^2(z-z')}{2k}\right), \\ G_{\phi}(\boldsymbol{\kappa}, z, z') &= k \cos\left(\frac{\kappa^2(z-z')}{2k}\right); \end{aligned} \quad (13)$$

而在自适应光学系统闭环条件下

$$\begin{aligned} G_{\chi}(\boldsymbol{\kappa}, z, z') &= k \left( \sin\left(\frac{\kappa^2(z-z')}{2k}\right) - H(\boldsymbol{\kappa}) \right. \\ & \quad \left. \times \sin\left(\frac{\kappa^2 z}{2k}\right) \cos\left(\frac{\kappa^2 z'}{2k}\right) \right), \\ G_{\phi}(\boldsymbol{\kappa}, z, z') &= k \left( \cos\left(\frac{\kappa^2(z-z')}{2k}\right) - H(\boldsymbol{\kappa}) \right. \\ & \quad \left. \times \cos\left(\frac{\kappa^2 z}{2k}\right) \cos\left(\frac{\kappa^2 z'}{2k}\right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

当自适应光学系统开环时, 将自适应光学系统开环时的结构函数 (13) 代入方程 (12), 对应的结构函数可以表示为

$$\begin{aligned} D(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) &= 2 \left( \frac{8}{\alpha-2} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha-2}\right) \right)^{\frac{\alpha-2}{2}} \\ & \quad \times \left( \frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}{\rho_0} \right)^{\alpha-2}, \end{aligned} \quad (15)$$

这与文献 [31, 32] 中结构函数计算结果是一致的.

自适应光学系统闭环条件下, 对方程 (12) 做坐标变换,  $\rho = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|/D_0$ ,  $N_F = D_0^2/\lambda z$ ,  $N_T = \rho_0^2/\lambda z$ ,  $x = \kappa^2 L/2k$ ,  $l = z/L$ ,  $\Lambda = \kappa_{DM}^2 L/2k$ , 其中  $D_0$  为发射系统孔径,  $\lambda$  为激光波长,  $N_F$  为光束菲涅耳数,  $L$  为传输路径长度,  $N_T$  为湍流菲涅耳数,  $\kappa_{DM}$  为变形镜的截止频率. 一般认为变形镜的截止频率  $\kappa_{DM}$  与驱动器间距  $d$  之间满足  $\kappa_{DM} = 2\pi/2d$  [33,34]. 通常使用驱动器菲涅耳数来表征小尺度热晕中自适应光学系统扰动源的尺度, 其定义为  $N_d = d^2/(\lambda L)$  [33].

在均匀路径上将(14)式代入(12)式经坐标变换得

$$\begin{aligned}
 & D(\rho D_0, L) \\
 &= C(\alpha) N_T^{-\frac{\alpha-2}{2}} \int_A^\infty dx x^{-\frac{\alpha}{2}} (1 - J_0(\sqrt{4\pi N_F x \rho})) \\
 &\quad - C1(\alpha) L^{\frac{\alpha+2}{2}} k^{-\frac{\alpha+6}{2}} \int_0^1 \beta(Ll) dl \\
 &\quad \times \int_0^A dx x^{-\frac{\alpha}{2}} \sin^2(xl) \\
 &\quad \times (1 - J_0(\sqrt{4\pi N_F x \rho})), \tag{16}
 \end{aligned}$$

式中  $C(\alpha) = 2^{-\frac{\alpha-2}{2}} (2\pi)^{\frac{6-\alpha}{2}} / B(\alpha)$ ,  $C1(\alpha) = 2^{-\frac{\alpha-2}{2}} (2\pi)^2 A(\alpha)$ ,  $J_0(x)$  为贝塞尔函数. 忽略衍射效应, 即  $\sin(xl) \rightarrow 0$ , (16) 式可以简化为

$$D(\rho D_0, L) = C2(\alpha) \left(\frac{d}{\rho_0}\right)^{\alpha-2}, \tag{17}$$

式中,  $C2(\alpha) = C(\alpha) \frac{2}{\alpha-2} \left(\frac{1}{4}\pi\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$ . Strehl 比定义为实际光束轴上远场光强与理想光束轴上光强之比, 通常用于评价光学系统的性能. 对于平面波或大口径光束 Strehl 比可以近似表示为

$$S_{\text{Tur}} = \exp\left(-\frac{C2(\alpha)}{2} \left(\frac{d}{\rho_0}\right)^{\alpha-2}\right). \tag{18}$$

### 2) 湍流热晕效应下的结构函数

同时考虑湍流、热晕效应, 在开环条件下, 对于大菲涅耳数光束而言, Strehl 比会很快趋于 0, 因此不予考虑. 湍流热晕效应闭环时, 对数振幅起伏及相位起伏的结构函数可以将补偿的格林函数(4)式代入(12)式进行求解, 然而对补偿后结构函数的积分进行数值计算时具有较强的奇异性, 数值积分是

比较复杂的. Enguehard 和 Hatfield [23,24] 指出在驱动器菲涅耳数较大且热晕半径较低时, PCI 对光束质量的影响变得不明显, 闭环的结构函数可以用开环的格林函数在频率域滤波来实现. 此方法容易得到解析的结果, 因此, 闭环的结构函数可以表示为

$$\begin{aligned}
 & D_{\text{PC}} = D_\chi + D_{\phi\text{PC}}, \\
 & D_{\chi,\phi}(\rho D_0, L) \\
 &= C(\alpha) N_T^{-\frac{\alpha-2}{2}} \int_0^\infty dx x^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^x G_{\chi,\phi}^2(\boldsymbol{\kappa}, z, z', N_w) \\
 &\quad \times (1 - J_0(\sqrt{4\pi N_F x \rho})), \\
 & D_{\phi\text{PC}}(\rho D_0, L) \\
 &= C(\alpha) N_T^{-\frac{\alpha-2}{2}} \int_0^\infty dx x^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^x H(\boldsymbol{\kappa}) G_\phi^2(\boldsymbol{\kappa}, z, z', N_w) \\
 &\quad \times (1 - J_0(\sqrt{4\pi N_F x \rho})). \tag{19}
 \end{aligned}$$

将方程(19)以  $\varepsilon$  进行 Taylor 展开, Strehl 比可以表示为

$$\begin{aligned}
 & S_r = \exp\left(-\frac{1}{2} D_{\text{PC}}\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{C(\alpha)}{4} N_T^{-\frac{\alpha-2}{2}} \sum_{n,m=0}^\infty A_{nm}(\alpha, \Lambda) N_w^{n+m}\right), \tag{20}
 \end{aligned}$$

式中  $\Lambda = \kappa_m^2 L / 2k = \pi / 4N_d$ ;

$$\begin{aligned}
 & A_{00} = 2 \int_A^\infty dx x^{-\frac{\alpha}{2}} + \int_0^A dx x^{-\frac{\alpha}{2}-1} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x)\right); \\
 & A_{01} = A_{10} = - \int_0^\infty dx x^{-\frac{\alpha}{2}-2} \left(\frac{1}{2} \sin(2x) - x\right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^A dx x^{-\frac{\alpha}{2}-2} \left(x \cos(2x) - \frac{1}{2} \sin(2x)\right);
 \end{aligned}$$

当  $n + m > 1$  时,

$$\begin{aligned}
 & A_{mn}(\alpha, \Lambda) = \frac{\pi(-1)^{n+m}}{(n!)^2(m!)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{2}\right) 2^{-\frac{1}{2}\alpha+1}}{\Gamma\left(\frac{n-m+\frac{1}{2}\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-n+\frac{1}{2}\alpha}{2}\right) \left(m+n+\frac{\alpha}{2}\right)} \\
 &\quad \times \left( \frac{\Gamma\left(\frac{-\frac{\alpha-2}{2}+m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+\frac{\alpha-2}{2}}{2}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{-\frac{\alpha-6}{2}+m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+\frac{\alpha+2}{2}}{2}\right)} \right) \\
 &\quad - \frac{2(-1)^{n+m}}{(n!)^2(m!)^2} \int_0^\Lambda dx x^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 dz' x^2 z'^{n+m+2} j_{n-1}(xz) j_{m-1}(xz). \tag{21}
 \end{aligned}$$

至此, 我们得到了平面波 non-Kolmogorov 湍流下补偿后 Strehl 比的解析表达式.



Karr<sup>[4]</sup>指出,小尺度热晕线性理论是可以认为是光在湍流热晕中传输的Rotov近似.因此,与湍流中对数振幅起伏方差做类比,定义湍流热晕中的对数振幅方差为

$$\sigma_\chi^2 = \frac{C(\alpha)}{4} N_T^{\frac{2-\alpha}{2}} \sum_{n,m} \frac{\pi(-1)^{n+m}}{(n!)^2(m!)^2} \times \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{2}\right) 2^{-\frac{1}{2}\alpha+1} \Gamma\left(\frac{-\frac{\alpha-6}{2}+m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+\frac{\alpha+2}{2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m+\frac{1}{2}\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-n+\frac{1}{2}\alpha}{2}\right) \left(m+n+\frac{\alpha}{2}\right)} N_w^{n+m}. \quad (22)$$

(22)式在忽略热晕效应的影响时,令 $n=0, m=0$ ,得到

$$\sigma_\chi^2 = \frac{C(\alpha)}{4} N_T^{\frac{2-\alpha}{2}} \frac{\pi \Gamma\left(\frac{\alpha-2}{2}\right) 2^{-\frac{1}{2}\alpha+1} \Gamma\left(-\frac{\alpha-6}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{4}\right) \left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (23)$$

对于Kolmogorov大气湍流,令谱指数 $\alpha = 11/3$ , (23)式可以简化为 $\sigma_\chi^2 = 0.157 N_T^{-5/6}$ .

但是,方程(20)仅为理想的平面波的表达式,对于有限孔径的光束而言,由于风场渡越的作用,结构函数在孔径的不同位置处对应的热晕半径 $N_w$ 是不同的,因此对光束质量的影响也不同.在上风位置处光束质量较好,而在下风位置处光束质量较差.为了得到有限光束的Strehl比,使用Enguehard和Hatfield的方法<sup>[21]</sup>,将光斑分成不同的小块,这些小块等效为不同热晕半径的无限平面波,利用这些小块Strehl比平均作为有限孔径的Strehl比 $S$ ,使用数学描述可以表示为

$$S = \left| \frac{\int dx^2 S_r^{1/2}(N_w(x, L)) I_0^{1/2}(x, 0)}{\int dx^2 I_0^{1/2}(x, 0)} \right|^2, \quad (24)$$

式中 $S_r$ 为方程(20)计算结果, $I_0$ 为初始位置处光强分布.

### 3 湍流谱对热晕补偿的影响分析

图1给出了湍流菲涅耳数 $N_T = 20$ ,不同湍流谱指数条件下,方程(24)计算的Strehl比随热畸变参数的变化.计算中主激光使用 $1.3 \mu\text{m}$ 波长,发射口径 $1.8 \text{ m}$ ,均匀路径传输 $2.5 \text{ km}$ ,驱动器菲涅耳数为 $2.94$ 和 $15.74$ .从图1可以看出:不同湍流谱下,随着热畸变参数的增加,补偿效果逐渐变差;当湍

流谱越接近3时,Strehl比下降越快补偿效果越不理想,相反,当湍流谱指数逐渐接近于4时,Strehl比下降越慢,补偿效果越好;在文中条件下,PCI不明显时,使用较小的驱动器菲涅耳数的自适应光学系统有较好的补偿效果.

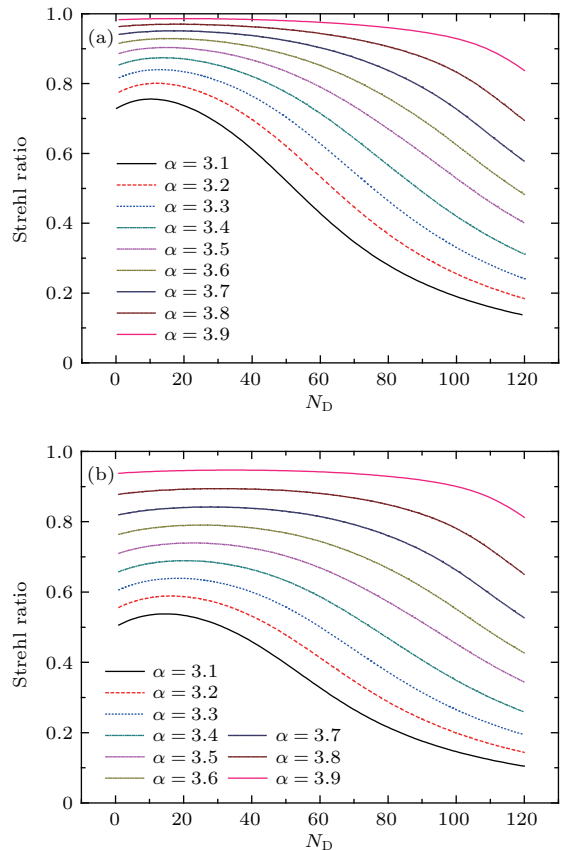


图1 (网刊彩色)相同广义相干长度、不同湍流谱条件下Strehl比随热晕的变化关系 (a)  $N_d = 3.94$ ; (b)  $N_d = 15.74$   
 Fig. 1. (color online) The relationship between Strehl ratio and thermal distortion number under different turbulence spectrum index with same generalized atmospheric coherence diameter: (a)  $N_d = 3.94$ ; (b)  $N_d = 15.74$ .

给定  $\beta = 5.92 \times 10^{-16} \text{ m}^{3-\alpha}$  为常量, 除湍流强度外使用图 1 中计算参数, 图 2 给出了不同湍流谱条件下, Strehl 比随热畸变参数的关系. 从图 2 可以看出: 与图 1 结果类似, 在不同湍流谱下, 热畸变参数的增加, 补偿效果变差; 当湍流谱越接近 3 时, Strehl 比下降越快, 当湍流谱指数逐渐接近于 4 时, Strehl 比下降越慢, 补偿效果越好; 使用较小的驱动器菲涅尔数的自适应光学系统有较好的补偿效果. 但是与图 1 不同的是在热畸变较弱时自适应光学系统的补偿效果随谱指数有一个先减少后增大的过程, 这是由于在  $\beta$  为常量时广义大气相干长度  $\rho_0$  的非线性变化引起的.

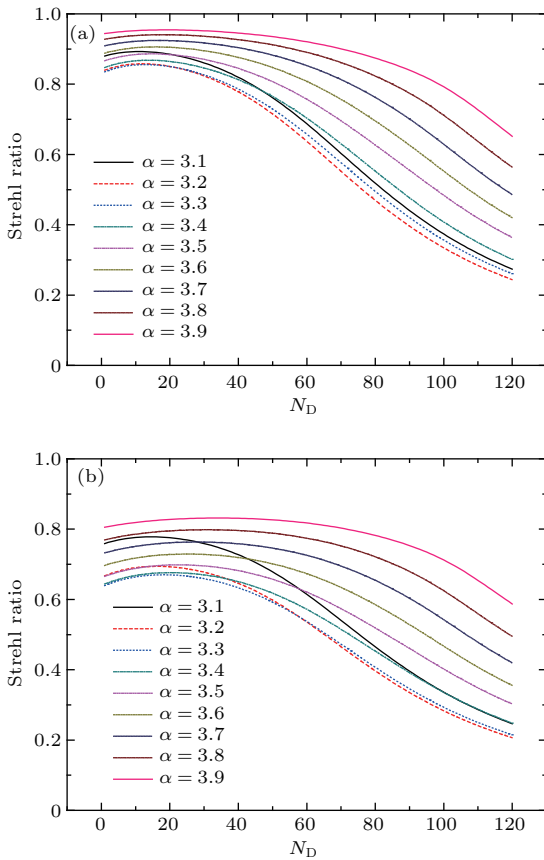


图 2 (网刊彩色) 相同折射率结构常量、不同湍流谱条件下 Strehl 比随热晕的变化关系 (a)  $N_d = 3.94$ ; (b)  $N_d = 15.74$   
 Fig. 2. (color online) The relationship between Strehl ratio and thermal distortion number under different turbulence spectrum index with same generalized index structure constant: (a)  $N_d = 3.94$ ; (b)  $N_d = 15.74$ .

图 3 给出了  $N_T = 20$  时, 不同谱指数下理想平面波对数振幅起伏方差随热晕的增长情况. 从图 3 可以看出, 湍流谱指数越接近 3 时, 对数振幅起伏方差有越快的增长. 这是图 1、图 2 计算结果中

湍流谱指数由 4 逐渐接近 3 时, Strehl 比随湍流热畸变增加下降变快的原因.

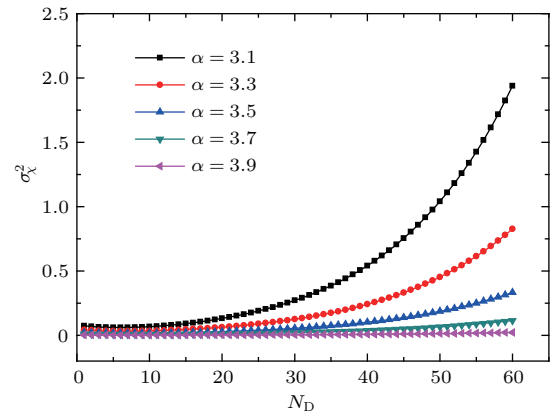


图 3 (网刊彩色)  $N_T = 20$  时不同湍流谱条件下对数振幅起伏方差随热畸变参数的变化  
 Fig. 3. (color online)  $N_T = 20$ , variation of logarithmic amplitude fluctuation variance with thermal distortion number under different turbulence conditions.

### 4 结 论

本文将小尺度热晕理论推广到 non-Kolmogorov 湍流大气中, 对高能激光的实际热晕补偿有重要的理论意义. 从小尺度热晕线性理论出发, 在 non-Kolmogorov 谱的基础上, 得到了 non-Kolmogorov 谱湍流下热晕相位补偿的 Strehl 比表达式, 分析了湍流谱对高能激光的相位补偿的影响. 湍流谱对湍流热晕效应的相位补偿有重要的影响. 在相同的湍流菲涅耳数下, 当谱指数越接近于 3 时补偿效果越差, 谱指数接近于 4 时补偿效果越好; 在相同湍流折射率结构常量的条件下, 其补偿效果变得复杂. 无论在相同大气相干长度条件下, 还是在相同湍流折射率常量条件下, 当谱指数接近于 3 时, Strehl 比随热晕效应的增强而下降变快, 当湍流谱指数逐渐接近于 4 时, Strehl 比下降速度变慢, 这是由于随着湍流谱指数的增大, TTBI 引起的对数振幅起伏增长变慢而造成的.

### 参考文献

- [1] Chambers D H, Karr T J, Morris J R, Cramer P, Viece J A, Gautesen A K 1990 *Proc. SPIE* **1221** 83
- [2] Chambers D H, Viece J A, Karr T J 1990 *Proc. SPIE* **1221** 220
- [3] Karr T J 1990 *Proc. SPIE* **1221** 26
- [4] Karr T J 1989 *J. Opt. Soc. Am. A* **6** 1038

- [5] Briggs R J 1987 *Lawrence Livermore National Lab. Technical Report UCID-21118*
- [6] Karr T J 1991 *Appl. Opt.* **30** 363
- [7] Karr T J, Morris J R, Chambers D H, Vecelli J A, Cramer P G 1990 *J. Opt. Soc. Am. B* **7** 1103
- [8] Karr T J, Rushford M C, Murray J R, Morris J R 1991 *J. Opt. Soc. Am B* **8** 993
- [9] Johnson B, Schonfeld J F 1991 *Opt. Lett.* **16** 1258
- [10] Johnson B, Primmerman C A 1989 *Opt. Lett.* **14** 639
- [11] Higgs C, Fouche D G, Pearson C F 1992 *Proc. SPIE* **1628** 210
- [12] Xue B, Cui L, Xue W, Bai X, Zhou F 2011 *J. Opt. Soc. Am. A* **28** 912
- [13] Cui L Y, Xue B D, Cao X G, Dong J K, Wang J N 2010 *Opt. Express* **18** 21269
- [14] Pérez L D G, Zunino L 2008 *Opt. Lett.* **33** 572
- [15] Tan L, Du W, Ma J, Yu S, Han Q 2010 *Opt. Express* **18** 451
- [16] Shan X, Liu M, Zhang N 2017 *Opt. Eng.* **56** 026111
- [17] Zhou Y, Yuan Y, Qu J, Huang W 2016 *Opt. Express* **24** 10682
- [18] Yan X, Zhang P F, Zhang J H, Qiao C H, Fan C Y 2016 *Chin. Phys. B* **25** 84204
- [19] Huang Y, Wang F, Gao Z, Zhang B 2015 *Opt. Express* **23** 1088
- [20] Wang Y J 1996 *Ph. D. Dissertation* (Hefei: Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [王英俭 1996 博士学位论文(合肥: 中国科学院安徽光学精密机械研究所)]
- [21] Enguehard S, Hatfield B 2004 *Proc. SPIE* **5552** 41
- [22] Enguehard S, Hatfield B 1994 *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 908
- [23] Enguehard S, Hatfield B 1991 *Proc. SPIE* **1408** 178
- [24] Enguehard S, Hatfield B 1991 *J. Opt. Soc. Am. A* **8** 637
- [25] Enguehard S, Hatfield B 1991 *Proc. SPIE* **1415** 128
- [26] Andrews L C, Phillips R L 2005 *Laser Beam Propagation through Random Media* (Berlillingham: SPIE) pp74–85
- [27] Lukin V P, Fortes B V 2002 *Adaptive Beaming and Imaging in the Turbulence Atmosphere* (Berlillingham: SPIE) pp15–20
- [28] Toselli I, Andrews L C, Phillips R L, Ferrero V 2007 *Proc. SPIE* **6551** 65510E
- [29] Tang H, Ou B, Luo B, Guo H, Dang A 2011 *J. Opt. Soc. Am. A* **28** 1016
- [30] Zhou P, Ma Y, Wang X, Zhao H, Liu Z 2010 *Opt. Lett.* **35** 1043
- [31] Beland R R 1995 *Proc. SPIE* **2375** 6
- [32] Stribling B E, Welsh B M, Roggemann M C 1995 *Proc. SPIE* **2471** 181
- [33] Enguehard S, Hatfield B 1995 *Prog. Quant. Electron.* **19** 239
- [34] Tyson R K 1982 *Appl. Opt.* **21** 787



# Linearization theory of small scale thermal blooming effect in non-Kolmogorov turbulent atmosphere\*

Zhang Peng-Fei Qiao Chun-Hong<sup>†</sup> Feng Xiao-Xing Huang Tong Li Nan  
Fan Cheng-Yu Wang Ying-Jian

(Key Laboratory of Atmospheric Composition and Optical Radiation, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics,  
Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China)

( Received 16 May 2017; revised manuscript received 24 July 2017 )

## Abstract

High energy laser beams propagating in the atmosphere are subjected to a variety of effects, such as the absorption and scattering of molecule and aerosol, atmospheric turbulence effects, thermal blooming effects, and the interaction between turbulence and thermal blooming. In general, these atmospheric propagation effects degrade laser beam quality and reduce the beam power concentration at the target. With adaptive optics compensation, the beam quality can be modified. But small-scale perturbation has developed and the phase compensation becomes unstable in some conditions. The performance of adaptive-optics system is degraded, which effects can be well explained by small-scale linear theory of thermal blooming. However previous theoretical studies of small-scale thermal blooming focused on the Kolmogorov turbulence. In the past decade, experimental evidence has shown significant deviations from Kolmogorov model in certain portions of the atmosphere. An generalized power-law of non-Kolmogorov turbulence model has been introduced, which becomes quite popular in the optical propagation community. Numerous theoretical and developmental efforts have been made based on non-Kolmogorov turbulence model in recent years. Thus it is very meaningful and imperative to explore the theoretical mechanism of high energy laser phase compensation with non-Kolmogorov turbulence.

In this study, the Strehl ratio of the thermal blooming phase compensation is generalized with the non-Kolmogorov turbulence spectrum, and the analytical expression is obtained based on the linear theory of small-scale thermal blooming. The influence of the turbulence spectrum on the phase compensation of the high energy laser is analyzed. The results show that the turbulence spectrum has an important influence on the phase compensation of turbulent thermal blooming effect. Under the same turbulence Fresnel number condition, the compensation effect is worse when the spectral index is closer to 3 and the compensation effect is better when the spectral index is close to 4. Under the same atmospheric coherence length condition or under the same turbulence refractive index constant condition, the Strehl ratio decreases with the increase of the thermal blooming effect when the spectral index is close to 3 and the decline rate of the Strehl ratio is slower when the turbulence spectrum index is close to 4. This is because as the turbulence spectrum exponent increases, the logarithmic amplitude fluctuation slows down due to the interaction between turbulence and thermal blooming. These theoretical results can provide some scientific bases and theoretical guidance for the practical applications of high energy laser transmission.

**Keywords:** high-energy laser, thermal blooming effect, phase compensation, small scale thermal blooming instability

**PACS:** 42.68.Bz, 42.25.Bs, 44.25.+f, 44.05.+e

**DOI:** 10.7498/aps.66.244210

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61405205).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [chqiao@aiofm.ac.cn](mailto:chqiao@aiofm.ac.cn)