

一种非轴对称磁绝缘电子鞘层边界的计算方法

魏浩 孙凤举 呼义翔 梁天学 丛培天 邱爱慈

A method to calculate the electron sheath profile of the nonaxisymmetrical magnetic insulation

Wei Hao Sun Feng-Ju Hu Yi-Xiang Liang Tian-Xue Cong Pei-Tian Qiu Ai-Ci

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 038402 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.038402

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.038402>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I3>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于空间应用的透射式微型微束调制 X 射线源

Transmission-type miniature micro-beam modulated X-ray source based on space application

物理学报.2016, 65(14): 140703 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.140703>

X 射线通信系统的误码率分析

Bit error rate analysis of X-ray communication system

物理学报.2015, 64(12): 120701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.120701>

阻抗劈绕射对破碎波后向散射特性的影响

Effects of impedance wedge diffraction on backscattering from breaking waves

物理学报.2016, 65(21): 214101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.214101>

基于交替隐式有限差分法的快速早期乳腺癌时域微波断层成像

Microwave tomography for early breast cancer detection based on the alternating direction implicit finite-difference time-domain method

物理学报.2016, 65(14): 144101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.144101>

一种内置条状金属板的双层金属腔体屏蔽效能的理论模型

An analytical model for shielding effectiveness of double layer rectangular enclosure with inner strip-shaped metallic plate

物理学报.2016, 65(4): 044101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.044101>

## 一种非轴对称磁绝缘电子鞘层边界的计算方法\*

魏浩<sup>1)2)†</sup> 孙凤举<sup>2)</sup> 呼义翔<sup>2)</sup> 梁天学<sup>2)</sup> 丛培天<sup>2)</sup> 邱爱慈<sup>1)2)‡</sup>

1) (西安交通大学, 电力设备电气绝缘国家重点实验室, 西安 710049)

2) (西北核技术研究所, 强脉冲辐射环境模拟与效应国家重点实验室, 西安 710024)

(2016年6月30日收到; 2016年11月20日收到修改稿)

长距离磁绝缘传输线内电极偏心、感应腔注入电流非均匀分布引起电子鞘层边界偏心等非对称磁绝缘特性. 电子鞘层边界是研究非轴对称磁绝缘特性的重要参数. 本文提出一种计算非轴对称磁绝缘电子鞘层边界的方法. 通过引入角向非均匀分布的模数, 将经典一维轴对称 Creedon 稳态磁绝缘理论推广应用于圆柱坐标系下二维  $(r, \theta)$  平面. 建立了感应电压叠加器次级非轴对称磁绝缘的二维 Creedon 物理模型, 给出了非轴对称磁绝缘电子鞘层边界的数值计算方法和计算误差. 当阴极角向磁场(阴极电流)角向分布满足余弦函数时, 电子鞘层边界接近高斯分布. 阴极电流角向不均匀程度越大, 电子鞘层边界偏心程度越严重, 计算误差越大.

**关键词:** 磁绝缘感应电压叠加器, 注入电流非均匀分布, 非轴对称磁绝缘, 电子鞘层边界

**PACS:** 84.70.+p, 07.85.Fv, 41.20.-q, 52.35.-g

**DOI:** 10.7498/aps.66.038402

## 1 引言

磁绝缘传输线(magnetically insulated transmission lines, MITL)在超高功率脉冲传输和汇聚中具有重要应用<sup>[1-4]</sup>. 大型脉冲功率装置常采用数米至几十米长的MITL, 长距离MITL内电极通常仅在首端与装置连接固定, 这种悬臂式支撑结构易造成MITL内电极偏心、电极间电/磁场非轴对称分布, 从而引起非轴对称磁绝缘<sup>[4-7]</sup>. 此外, 在磁绝缘感应电压叠加器(magnetically induction voltage adders, MIVA)中, 由于感应腔初级注入电流非均匀分布, 也会导致MIVA次级磁绝缘呈现非轴对称特性<sup>[7-11]</sup>.

磁绝缘电子鞘层边界是联系MITL微观特性(空间电子电荷密度、电荷质心、漂移速率)和宏观特性(线电压、阴/阳极电流、运行阻抗)的关键参数.

电子鞘层边界限定了磁绝缘空间电子的活动区域, 可视作MITL的虚阴极, 电子鞘层边界和阳极构成的传输线特征阻抗即是MITL的实际运行阻抗<sup>[12]</sup>. 沿电子鞘层边界对磁场强度进行环路积分, 可获得MITL阳极电流. 在非轴对称磁绝缘研究中, 电子鞘层边界是评估磁绝缘状态和性能的重要物理量.

在通常的一维、轴对称磁绝缘中, 电子鞘层边界是与MITL阴/阳电极共圆心的同心圆( $r_s \equiv$ 常数). 对于非轴对称磁绝缘, 电子鞘层边界 $r_s(\theta)$ 随角向位置呈某种分布, 即 $r_s(\theta) = f(\theta)$ . 目前已有的磁绝缘模型(1975年Creedon层流理论<sup>[13]</sup>, 1979年Mendel<sup>[14]</sup>任意动量理论, 1990年Lawconnell和Neri<sup>[15]</sup>通用Laminar理论, 2006年Ottinger和Schumer<sup>[16]</sup>基于粒子模拟修正的Mendel理论, 以及2006年Stygar等<sup>[17]</sup>磁绝缘电子弹性碰撞理论)主要用来描述一维、轴对称磁绝缘问题. 由现有模型很难直接获得非轴对称磁绝缘 $r_s(\theta)$ 的解析解.

\* 国家自然科学基金(批准号: 11505138, 51577156)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: weihaoyy@nint.ac.cn

‡ 通信作者. E-mail: qiucac@cae.cn

电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  也很难直接实验测量, 目前主要采用粒子模拟 (particle in cell, PIC) 方法, 通过跟踪大量磁绝缘空间电子的轨迹来确定<sup>[16]</sup>. 确定非轴对称磁绝缘的  $r_s(\theta)$  必须采用三维 PIC 模型, 这对 PIC 模拟软件及代码提出了较高要求. 国外主要采用大型三维粒子模拟软件 LSP (large scale procedure), 国内电子科技大学研发了三维粒子模拟软件 CHIPIC3D, 并用于“聚龙一号”装置四层圆盘锥 MITL 和 1 MV LTD 装置螺旋支撑杆 MITL 的三维粒子模拟<sup>[18-21]</sup>. 但是, 大型脉冲功率装置或器件的三维 PIC 计算耗时极长, 模拟结果因受多种因素和假设条件的影响随机性很大. 因此, 本文提出了一种确定 MIVA 次级非轴对称磁绝缘电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  的方法.

## 2 MIVA 次级非轴对称磁绝缘物理模型

图 1 为 MIVA 次级 MITL 横截面 (垂直功率传输方向) 示意图.  $r_c, r_a$  分别为 MITL 阴、阳极半径,  $r_s(\theta)$  为待求解的磁绝缘电子鞘层边界. MIVA 感应腔初级注入电流非均匀分布导致次级磁绝缘阴/阳极电流、电/磁场角向非轴对称分布<sup>[22,23]</sup>. 即使 MITL 阴/阳电极同轴, 仍然会导致  $r_s(\theta)$  偏心<sup>[24]</sup>.

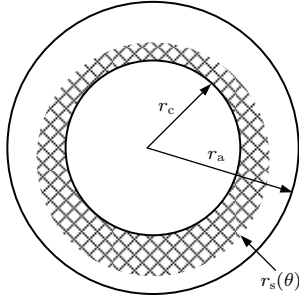


图 1 圆柱坐标系下二维  $(r, \theta)$  平面非轴对称磁绝缘示意图

Fig. 1. The schematic of the nonaxisymmetrical magnetic insulation on a two-dimensional plane of  $(r, \theta)$  under cylindrical coordinate.

由磁绝缘 Creedon 层流理论<sup>[13]</sup>, 磁绝缘达到稳态时空间电子区域 ( $r_c < r < r_s(\theta)$ ) 和真空区域 ( $r_s(\theta) < r < r_a$ ) 的相对论因子  $\gamma_i(r, \theta)$  和  $\gamma_o(r, \theta)$  分别满足数学物理方程<sup>[25-28]</sup>,

$$\nabla^2 \gamma_i = \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} (\nabla \gamma_i)^2, \quad (1a)$$

$$\nabla^2 \gamma_o = 0. \quad (1b)$$

在阴极 ( $r = r_c$ ) 和阳极 ( $r = r_a$ ) 的边界位置,  $\gamma_i(r, \theta)$  和  $\gamma_o(r, \theta)$  分别满足如下边界条件,

$$\begin{cases} \gamma_i(r_c, \theta) \equiv 1, \\ \gamma_o(r_a, \theta) \equiv \gamma_0, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\gamma_0 = 1 + eV_0/(mc^2)$  为阳极的相对论因子,  $e$  为电子电荷量,  $m$  为电子静止质量,  $V_0$  为阴-阳电极间线电压.

在电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  处, 满足分界面衔接条件,

$$\gamma_i(r, \theta) = \gamma_o(r, \theta)|_{r=r_s(\theta)}, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \gamma_i(r, \theta)}{\partial n} = \frac{\partial \gamma_o(r, \theta)}{\partial n} \Big|_{r=r_s(\theta)}. \quad (3b)$$

采取分离变量法<sup>[29]</sup> 求解方程 (1), 考虑到  $\gamma_i(r, \theta)$  和  $\gamma_o(r, \theta)$  在  $[0, 2\pi]$  内关于  $\theta = \pi$  对称, 并代入边界条件 (2), 得到相对论因子  $\gamma_i(r, \theta)$  和  $\gamma_o(r, \theta)$  的解析解分别为

$$\begin{aligned} \gamma_i(r, \theta) = & \cosh \left\{ a_0 \ln \left( \frac{r}{r_c} \right) \right. \\ & + \sum_{j=0}^n a_j \cdot \left[ \left( \frac{r}{r_c} \right)^j - \left( \frac{r_c}{r} \right)^j \right] \\ & \left. \times \cos(j\theta) \right\}, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_o(r, \theta) = & \gamma_0 + b_0 \ln \left( \frac{r}{r_a} \right) \\ & + \sum_{j=0}^n b_j \cdot \left[ \left( \frac{r}{r_a} \right)^j - \left( \frac{r_a}{r} \right)^j \right] \\ & \times \cos(j\theta), \end{aligned} \quad (4b)$$

其中  $n$  为非负整数, 表征阴/阳极电流角向非均匀分布的模数, 若令  $n = 0$ , (4) 式即为经典的一维、轴对称磁绝缘 Creedon 层流模型<sup>[13,28]</sup>; 系数  $a_j, b_j$  ( $0 \leq j \leq n, j$  为整数) 为待定常数, 其取值与阴/阳极电流角向分布有关.

当给定 MITL 结构参数 (阴/阳极半径  $r_a, r_c$ )、线电压  $V_0$  和阴极电流角向分布  $I_c(\theta)$  时, 联合方程 (3) 和 (4), 可确定电子鞘层边界  $r_s(\theta)$ . 但因方程 (4) 为超越方程, 难以直接获得  $r_s(\theta)$  的解析解, 需要采用数值方法进行求解.

### 3 计算电子鞘层边界 $r_s(\theta)$ 的数值方法

#### 3.1 确定系数 $a_j$ ( $0 \leq j \leq n$ )

由磁绝缘稳态时空间电子径向受力平衡<sup>[27]</sup>, 得到

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{E_r(r, \theta)}{v_z}, \quad (5)$$

其中  $E_r(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{mc^2}{e} \cdot \frac{\partial \gamma_i(r, \theta)}{\partial r}$ ,  $v_z$  为磁绝缘空间电子轴向漂移速率,  $B_\theta(r, \theta)$  为磁感应强度的角向分量.

(4) 和 (5) 式联合, 得到在  $r_c < r < r_s(\theta)$  区域  $B_\theta(r, \theta)$  满足,

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{mc\gamma}{e} \cdot \frac{1}{r} \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^n j \cdot a_j \times \left[ \left( \frac{r}{r_c} \right)^j + \left( \frac{r_c}{r} \right)^j \right] \cos(j\theta) \right\}. \quad (6)$$

令 (6) 式中  $r = r_c$ , 得到阴极表面角向磁场  $B_\theta(r_c, \theta)$ ,

$$B_\theta(r_c, \theta) = -\frac{mc}{e} \cdot \frac{1}{r_c} \left( a_0 + \sum_{j=1}^n 2j \cdot a_j \cdot \cos(j\theta) \right). \quad (7)$$

采用正交三角函数系  $\cos(j\theta)$  将  $B_\theta(r_c, \theta)$  在  $[0, 2\pi]$  区间内做 Fourier 级数展开, 得系数  $a_j$ ,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \kappa \cdot \int_0^{2\pi} B_\theta(r_c, \theta) d\theta, \\ a_j &= \frac{1}{2j\pi} \kappa \cdot \int_0^{2\pi} B_\theta(r_c, \theta) \cdot \cos(j\theta) d\theta \\ &\quad (1 \leq j \leq n), \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\kappa$  为常数,  $\kappa = -er_c/mc$ .

由 (8) 式可知, 系数  $a_j$  取决于阴极表面角向磁场  $B_\theta(r_c, \theta)$  角向分布. 实际中,  $B_\theta(r_c, \theta)$  角向分布可由感应电压叠加器的电磁模拟或实验测量获得.

#### 3.2 确定系数 $b_j$ ( $0 \leq j \leq n$ )

由方程 (3b) 可以推导系数  $b_j$  ( $0 \leq j \leq n$ ) 满足如下矩阵方程,

$$\mathbf{N}(r_s) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{M}(r_s) \cdot \mathbf{b}, \quad (9)$$

其中  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$  和  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)^T$  为  $n+1$  阶向量.  $\mathbf{N}(r_s), \mathbf{M}(r_s)$  为  $(n+1) \times (n+1)$

阶矩阵, 其元素分别为

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot \left[ \left( \frac{r_s}{r_a} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_a}{r_s} \right)^{j-1} \right] \\ &\quad \times \cos((j-1)\theta_i), \\ N_{ij} &= \sqrt{\gamma_s^2 - 1} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot \left[ \left( \frac{r_s}{r_c} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_c}{r_s} \right)^{j-1} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \cos((j-1)\theta_i) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

(9) 和 (10) 式的推导过程见附录 A. (9) 和 (10) 式表明, 当系数  $a_j$  确定后, 系数  $b_j$  仅与电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  有关. 因此, 可依据 MIVA 次级磁绝缘电子鞘层边界的物理实际和可能分布, 假定  $r_s(\theta)$  满足某种特定的函数分布  $f_0(\theta)$  (如高斯分布、余弦分布、二次抛物线分布等),  $f_0(\theta)$  中含有待定系数.

#### 3.3 确定 $f_0(\theta)$ 的待定系数

采用最优化问题的全局搜索解法<sup>[30]</sup>, 确定函数  $f_0(\theta)$  中待定系数. 最优化问题可表述为

$$\min \sigma = \int_0^{2\pi} [\gamma_i(f_0(\theta), \theta) - \gamma_o(f_0(\theta), \theta)]^2 d\theta, \quad (11a)$$

$$f_0(\theta) \text{ s.t. } \{r_c \leq f_0(\theta) \leq r_a\}, \quad (11b)$$

其中 (11a) 式为最优化问题的目标函数, 表征当  $r_s(\theta)$  为假定函数分布  $f_0(\theta)$  时,  $\gamma_i(r, \theta)$  和  $\gamma_o(r, \theta)$  偏离方程 (3a) 的程度, 定义为计算误差. 搜索约束条件 (11b) 限定了电子鞘层边界的取值范围, 即  $r_c < f_0(\theta) < r_a$ .

#### 3.4 确定电子鞘层边界 $r_s(\theta)$

重复 3.2—3.3 节的步骤, 比较多种假定函数分布 (高斯分布、余弦分布、二次抛物线分布等) 的计算误差, 计算误差最小的分布视为电子鞘层边界  $r_s(\theta)$ .

## 4 计算方法在 MIVA 次级非轴对称磁绝缘的应用

给定 MIVA 次级 MITL 运行参数: 阴极半径  $r_c = 0.1$  m, 阳极半径  $r_a = 0.2$  m, 阴-阳极线电压  $V_0 = 4$  MV,  $\gamma_0 = 9$ , 磁绝缘运行在最小电流工作点.

在一维轴对称情况(阴/阳极电流角向均匀分布)下,由磁绝缘经典 Creedon 层流理论,计算磁绝缘电子鞘层边缘的相对论势  $\gamma_s = 2.0$ , 电子鞘层边界  $r_s = 0.119$  m, 阳极电流  $I_a = 132$  kA, 阴极电流  $I_c = 65.5$  kA, 阴极表面角向磁场  $B_{co} = 0.131$  T.

二维、非轴对称情况下,由于MIVA感应腔初级注入电流角向的非均匀分布,靠近馈入点的角向位置 ( $\theta = 0$ )  $B_\theta(r_c, \theta)$  明显偏大,远离馈入点的角向位置 ( $\theta = \pi$ )  $B_\theta(r_c, \theta)$  偏小. 假定角向磁场  $B_\theta(r_c, \theta)$  满足余弦分布,

$$B_\theta(r_c, \theta) = B_{co} + B_{co} \cdot \delta \cdot \cos(\theta), \quad (12)$$

其中  $B_{co}$  为一维轴对称(电流角向均匀分布)时阴极角向磁场,不均匀系数  $\delta$  用于表征二维非轴对称情况下  $B_\theta(r_c, \theta)$  角向非均匀分布的程度.

假定MIVA次级MITL电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  满足余弦分布、高斯分布和二次抛物线分布,其分布函数分别如(13)—(15)式所示,

$$f_1(\theta) = -p_1 \cos \theta + q_1, \quad (13)$$

$$f_2(\theta) = p_2 \exp[-(\theta - \pi)^2/w_2^2] + q_2, \quad (14)$$

$$f_3(\theta) = -p_3(\theta - \pi)^2 + q_3. \quad (15)$$

由本文所述的数值计算方法,可以确定  $f_1(\theta)$ ,  $f_2(\theta)$  和  $f_3(\theta)$  中待定系数. 三种假定分布函数下电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  如图2所示. 余弦、高斯和二次抛物线三种分布函数下的计算误差分别为2.7084, 0.0682和9.6110. 高斯分布的计算误差最小,因此,当阴极角向磁场  $B_\theta(r_c, \theta)$  满足余弦分布时, MITL 电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  最接近高斯分布.

改变  $B_\theta(r_c, \theta)$  角向不均匀系数  $\delta$ , 电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  随之变化. 表1为几种不均匀系数  $\delta$  时三种分布函数的计算误差. 由表1可知,二次抛物线分布的计算误差最大,高斯分布的计算误差均最小. 注入电流分布越均匀(角向磁场  $B_\theta(r_c, \theta)$  不均匀系数  $\delta$  越小), 计算误差越小.

当  $B_\theta(r_c, \theta)$  不均匀系数  $\delta$  分别为25%, 10% 和 2.5%时,采用高斯函数分布求解的电子鞘层边界如图3所示. 电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  的最大值、最小值和电子鞘层不均匀系数  $\zeta$  如表2所列,其中电子鞘层角向不均匀系数  $\zeta$  定义为

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\max(r_s(\theta)) - \min(r_s(\theta))}{\text{mean}(r_s(\theta)) - r_c} \times 100\%, \quad (16)$$

其中  $\max(r_s(\theta))$ ,  $\min(r_s(\theta))$  和  $\text{mean}(r_s(\theta))$  分别为  $r_s(\theta)$  在  $\theta \in [0, 2\pi]$  的最大值、最小值和平均值. (16) 式定义的  $\zeta$  物理含义为电子鞘层厚度的极差与平均厚度之比.

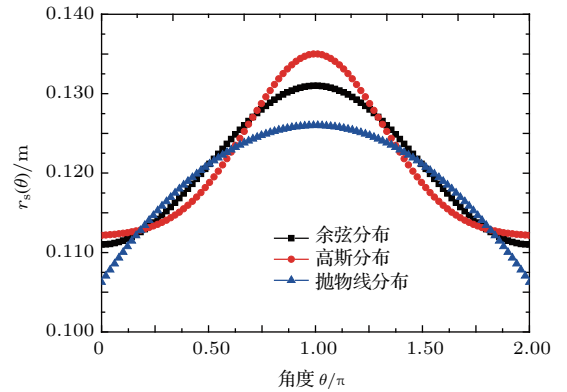


图2 (网刊彩色) 三种假定分布函数时电子鞘层边界 ( $B_\theta(r_c, \theta)$  不均匀系数  $\delta = 25\%$ )

Fig. 2. (color online) The electron sheath profiles under the three assumed distribution functions as the asymmetric coefficient of  $B_\theta(r_c, \theta)$ ,  $\delta$ , is about 25%.

表1  $B_\theta(r_c, \theta)$  不均匀系数  $\delta$  对计算误差的影响  
Table 1. The influences of the asymmetric coefficient of  $B_\theta(r_c, \theta)$ ,  $\delta$ , on the calculation errors.

不均匀系数 $\delta$	计算误差		
	余弦分布	高斯分布	二次抛物线分布
25%	2.7084	0.0682	9.6110
10%	0.0619	0.0387	1.2056
2.5%	0.1349	0.0269	0.8871
0.5%	0.1845	0.0098	0.1845

表2  $B_\theta(r_c, \theta)$  角向不均匀系数  $\delta$  不同时电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  的特性

Table 2. The parameters of the electron sheath profiles function as the asymmetric coefficients of  $B_\theta(r_c, \theta)$ .

$B_\theta(r_c, \theta)$ 不均匀系数 $\delta$	电子鞘层边界 最大 $\max(r_s(\theta))/\text{m}$	电子鞘层边界 最小值 $\min(r_s(\theta))/\text{m}$	电子鞘层 不均匀系数 $\zeta$
25%	0.135	0.112	27.1%
10%	0.123	0.115	10.1%
2.5%	0.120	0.118	2.6%
0.5%	0.119	0.118	0.86%

由图3和表2可知,  $B_\theta(r_c, \theta)$  不均匀系数  $\delta$  越大(注入电流角向不均匀程度越大), 电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  偏心程度越严重. 电子鞘层角向不均匀系数  $\zeta$  与  $B_\theta(r_c, \theta)$  角向不均匀系数  $\delta$  数值相接近. 当  $B_\theta(r_c, \theta)$  分布较均匀 ( $\delta = 0.5\%$ ) 时, 电子鞘层边界  $r_s(\theta) \approx 0.119$  m, 此数值与一维轴对称 Creedon 理论计算的结果相同.

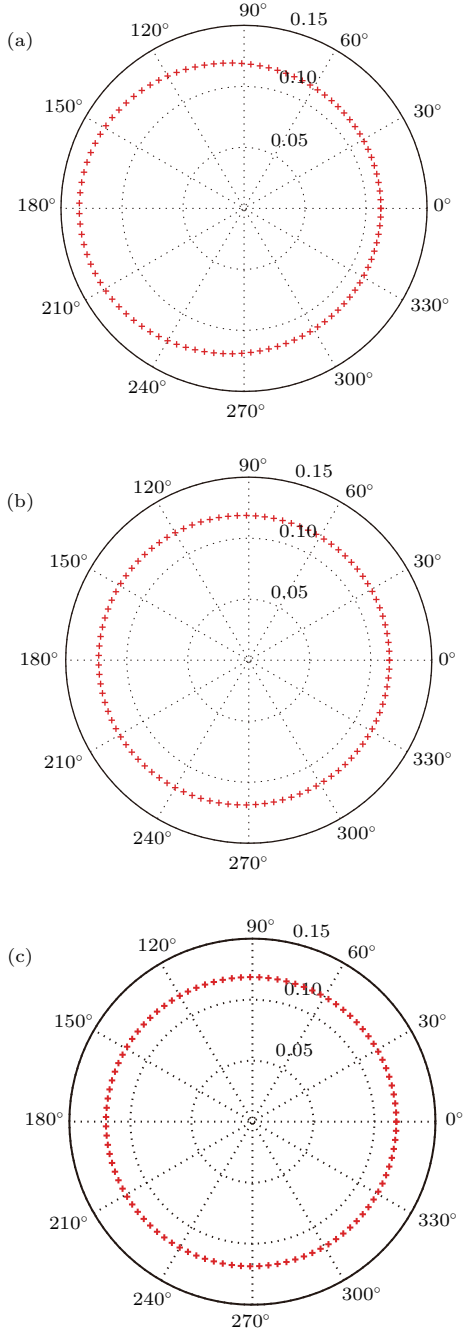


图3 不同  $B_\theta(r_c, \theta)$  角向不均匀系数  $\delta$  时的磁绝缘电子鞘层边界 (a)  $\delta = 25\%$ ; (b)  $\delta = 10\%$ ; (c)  $\delta = 2.5\%$   
 Fig. 3. The electron sheath profiles under three different asymmetric coefficients of  $B_\theta(r_c, \theta)$  for (a)  $\delta = 25\%$ , (b)  $\delta = 10\%$ , and (c)  $\delta = 2.5\%$ .

## 5 结 论

在稳态磁绝缘经典、一维轴对称 Creedon 理论基础上, 引入表征阴/阳极电流角向非均匀分布的参数(角向非均匀分布模数  $n$ ), 建立了圆柱坐标下 MIVA 次级非轴对称磁绝缘的二维 Creedon 物理模型, 给出了磁绝缘电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  的数值计算方法和计算误差. 当给定磁绝缘线结构参数(阴/阳极半径)、线电压和阴极电流(阴极角向磁场)角向分布时, 可计算磁绝缘电子鞘层边界  $r_s(\theta)$ . 本文提出的磁绝缘电子鞘层边界确定方法具有计算效率高、耗时短等优点, 该方法已用于 MIVA 次级非轴对称磁绝缘电子鞘层边界的确定. 结果表明, 当阴极角向磁场  $B_\theta(r_c, \theta)$  角向分布满足余弦函数时, 电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  呈高斯分布. 研究了电流均匀性对磁绝缘电子鞘层边界  $r_s(\theta)$  的影响, 结果表明, 随着电流不均匀程度增加, 电子鞘层偏心程度加大; 电子鞘层  $r_s(\theta)$  的角向不均匀系数和阴极角向磁场  $B_\theta(r_c, \theta)$  的不均匀系数数值相近.

感谢西安交通大学数学学院李东升教授、电气工程学院马西奎教授和葛晓宇博士对数值求解方法给予的良好建议. 感谢西北核技术研究所付梅艳、尹佳辉、姜晓峰、曾江海、张鹏飞、来定国、孙江等的讨论.

## 附录 A 矩阵方程 (9) 的推导

分界面衔接条件 (3) 的物理意义是在分界面  $r_s(\theta)$  上, 电势和法向电场连续.

当电子鞘层偏心程度较轻(即  $(r_s - r_c)/r_c \ll 1$ ) 时,  $\partial/\partial n \cong \partial/\partial r$ , (3b) 式可简化为

$$\frac{\partial \gamma_i(r, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial \gamma_o(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=r_s(\theta)} \quad (\text{A1})$$

将 (4) 式中  $\gamma_i(r, \theta)$  和  $\gamma_o(r, \theta)$  表达式代入 (A1) 式, 得到

$$\begin{aligned} & \sqrt{\gamma_s^2 - 1} \cdot \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^n j \cdot a_j \left[ \left( \frac{r_s}{r_c} \right)^j + \left( \frac{r_c}{r_s} \right)^j \right] \cdot \cos(j\theta) \right\} \\ & = \left[ b_0 + \sum_{j=1}^n j \cdot b_j \left[ \left( \frac{r_s}{r_a} \right)^j + \left( \frac{r_a}{r_s} \right)^j \right] \cdot \cos(j\theta) \right]. \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$

为了便于分析, 将 (A2) 式等号两边均写成级数求和形成, 即

$$\begin{aligned} & \sqrt{\gamma_s^2 - 1} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot a_{j-1} \cdot \left[ \left( \frac{r_s}{r_c} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_c}{r_s} \right)^{j-1} \right] \right. \\ & \left. \times \cos((j-1)\theta) \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot b_{j-1} \left[ \left( \frac{r_s}{r_a} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_a}{r_s} \right)^{j-1} \right] \times \cos((j-1)\theta), \quad (\text{A3})$$

其中

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1/2, & j = 1, \\ j-1, & 2 \leq j \leq n+1. \end{cases} \quad (\text{A4})$$

由于方程 (A3) 对于  $[0, 2\pi]$  内任意  $\theta$  均成立, 因此, 将  $\theta$  离散化处理, 在  $[0, 2\pi]$  取  $(n+1)$  个离散点,

$$\theta_i = \frac{2\pi}{n} \cdot i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (\text{A5})$$

对于任意一个  $\theta_i$  均满足方程 (A3), 可以得到,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\gamma_s^2 - 1} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot a_{j-1} \cdot \left[ \left( \frac{r_s}{r_c} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_c}{r_s} \right)^{j-1} \right] \right. \\ & \left. \times \cos((j-1)\theta_0) \right\} \\ = & \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot b_{j-1} \left[ \left( \frac{r_s}{r_a} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_a}{r_s} \right)^{j-1} \right] \cdot \cos((j-1)\theta_0), \\ & \sqrt{\gamma_s^2 - 1} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot a_{j-1} \cdot \left[ \left( \frac{r_s}{r_c} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_c}{r_s} \right)^{j-1} \right] \right. \\ & \left. \times \cos((j-1)\theta_1) \right\} \\ = & \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot b_{j-1} \left[ \left( \frac{r_s}{r_a} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_a}{r_s} \right)^{j-1} \right] \cdot \cos((j-1)\theta_1), \\ & \vdots \\ & \sqrt{\gamma_s^2 - 1} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot a_{j-1} \cdot \left[ \left( \frac{r_s}{r_c} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_c}{r_s} \right)^{j-1} \right] \right. \\ & \left. \times \cos((j-1)\theta_n) \right\} \\ = & \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot b_{j-1} \left[ \left( \frac{r_s}{r_a} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_a}{r_s} \right)^{j-1} \right] \\ & \times \cos((j-1)\theta_n). \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

将公式 (A6) 写成矩阵方程的形式, 即

$$\mathbf{N}(r_s) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{M}(r_s) \cdot \mathbf{b}, \quad (\text{A7})$$

其中,  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$  和  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)^T$  为  $n+1$  阶向量;  $\mathbf{N}(r_s), \mathbf{M}(r_s)$  为  $(n+1) \times (n+1)$  阶矩阵, 其元素分别为

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot \left[ \left( \frac{r_s}{r_a} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_a}{r_s} \right)^{j-1} \right] \cdot \cos((j-1)\theta_i), \\ N_{ij} &= \sqrt{\gamma_s^2 - 1} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \cdot \left[ \left( \frac{r_s}{r_c} \right)^{j-1} + \left( \frac{r_c}{r_s} \right)^{j-1} \right] \right. \\ & \left. \times \cos((j-1)\theta_i) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

### 参考文献

- [1] Stygar W A, Corcoran P A, Ives H C, Spielman R B, Douglas J W, Whitney B A, Mostrom M A, Wagoner T C, Speas C S, Gilliland T L, Allshouse G A, Clark R E, Donovan G L, Hughes T P, Humphreys D R, Jaramillo D M, Johnson M F, Kellogg J W, Leeper R J, Long F W, Martin T H, Mulville T D, Pelock M D, Peyton B P, Poukey J W, Ramirez J J, Reynolds P G, Seamen J F, Seidel D B, Seth A P, Sharpe A W, Shoup R W, Smith J W, Vandevalde D M, Wavrik R W 2009 *Phys. Rev. Spec. Top. Accel. Beams*. **12** 120401
- [2] Stygar W A, Awe T J, Bailey J E, Bennett N L, E W Breden, Campbell E M, Clark R E, Cooper R A, Cuneo M E, Ennis J B, Fehl D L, Genoni T C, Gomez M R, Greiser G W, Gruner F R, Herrmann M C, Hutsel B T, Jennings C A, Jobe D O, Jones B M, M C Jones, Jones P A, Knapp P F, Lash J S, LeChien K R, Leckbee J J, Leeper R J, Lewis S A, Long F W, Lucero D J, Madrid E A, Martin M R, Matzen M K, Mazarakis M G, McBride R D, McKee G R, Miller C L, Moore J K, Mostrom C B, Mulville T D, Peterson K J, Porter J L, Reisman D B, Rochau G A, Rochau G E, Rose D V, Rovang D C, Savage M E, Sceiford M E, Schmit P F, Schneider R F, Schwarz J, Sefkow A B, Sinars D B, Slutz S A, Spielman R B, Stoltzfus B S, Thoma C, Vesey R A, Wakeland P E, Welch D R, Wisher M L, Woodworth J R 2015 *Phys. Rev. Spec. Top. Accel. Beams*. **18** 110401
- [3] Zou W K, Wang M, Chen L, Zhou L J, Guo F, Xie W P, Deng J J 2013 *High Power and Laser and Particle Beams* **25** 2487 (in Chinese) [邹文康, 王勳, 陈林, 周良骥, 郭帆, 谢卫平, 邓建军 2013 强激光与粒子束 **25** 2487]
- [4] Pate R C, Patterson J C, Dowdican M C, Ramirez J J, Hasti D E, Tolk K M, Poukey J W, Schneider L X, Rosenthal S E, Sanford T W, Alexander J A, Heath C E 1987 *Proceeding of 6th IEEE Pulsed Power Conference* Arlington, USA, 22-26 June, 1987 p478
- [5] Johnson D, Bailey V, Altes R, Corcoran P, Smith I, Cordova S, Hahn K, Maenchen J, Molina I, Portillo S, Puetz E, Sceiford M, Valde D V, Rose D, Oliver B, Welch D, Droemer D 2005 *Proceeding of 15th IEEE Pulsed Power Conference Monterey, USA, 13-17 June, 2005* p314
- [6] Allen R J, Commisso R J, Cooperstein G, Ottinger P F, Schumer J W 2011 *Proceeding of 18th IEEE Pulsed Power Conference Chicago, USA, 19-23 June, 2011* p1036
- [7] Smith I D 2004 *Phys. Rev. Spec. Top. Accel. Beams*. **7** 064801
- [8] Smith I D, Bailey V L, Fockler J, Gustwiller J S, Johnson D L, Maenchen J E, Droemer D W 2000 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **28** 1653
- [9] Thomas K, Beech P, Brown S, Buck J, Burscough J, Clough S, Crotch I, Duff Y J, Goes C, Huckle I, Jones A, King A, Stringer B, Threadgold J, Trenaman S, Wheelon R, Woodroffe M, Carboni V, DaSilva T, Galver B, Glazebrook W, Hanzel K, Pearce J, Pham J, Pomeroy S, Saunders W, Speits D, Warren T, Whitney B, Wilson J

- 2011 *Proceeding of 18th IEEE Pulsed Power Conference Chicago, USA, 19–23 June, 2011* p1042
- [10] Wei H, Sun F J, Liang T X, Yin J H, Dang T F, Zeng J T, Cong P T, Qiu A C 2014 *Rev. Sci. Instrum.* **85** 083506
- [11] Wei H, Sun F J, Liang T X, Guo J M, Qiu A C, Cong P T, Yin J H, Hu Y X, Jiang X F, Wang Z G, Dang T F 2015 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **43** 3359
- [12] Mendel C W, Rosentha S E 1995 *Phys. Plasmas* **2** 1332
- [13] Creedon J M 1975 *J. Appl. Phys.* **46** 2946
- [14] Mendel C W 1979 *J. Appl. Phys.* **50** 3830
- [15] Lawconnell R I, Neri J 1990 *Phys. Fluids B* **2** 629
- [16] Ottinger P F, Schumer J W 2006 *Phys. Plasmas* **13** 063109
- [17] Stygar W A, Wagoner T C, Ives H C, Corcoran P A, Cuneo M E, Douglas J W, Gilliland T L, Mazarakis M G, Ramirez J J, Seamen J F, Seidel D B, Spielman R B 2006 *Phys. Rev. Spec. Top. Accel. Beams.* **9** 090401
- [18] Liu L Q, Liu D G, Wang X Q, Zou W K, Yang C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 162901 (in Chinese) [刘腊群, 刘大刚, 王学琼, 邹文康, 杨超 2012 物理学报 **61** 162901]
- [19] Liu L Q, Liu D G, Wang X Q, Yang C, Xia M Z, Peng K 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 162902 (in Chinese) [刘腊群, 刘大刚, 王学琼, 杨超, 夏蒙重, 彭凯 2012 物理学报 **61** 162902]
- [20] Dai W, Zhu X Z, Liu L Q, Zou W K, Guo F, Liu D G 2015 *Modern Electron. Tech.* **38** 144 (in Chinese) [戴巍, 朱旭智, 刘腊群, 邹文康, 郭帆, 刘大刚 2015 现代电子技术 **38** 144]
- [21] Zou W K, Chen L, Liu D G, Zhang L, Liu L Q, Zhou L J, Wang M, Wei B, Guo F, Wang X Q, Dai Y M, Xie W P, Deng J J 2012 *Phys. Rev. Spec. Top. Accel. Beams* **15** 110401
- [22] Johnson D L, Smith I D, Corcoran P, Bailey V, Maenchen J, Rovang D, Molina I, Hahn K, Lucero R, Kincy M, Kitterman D, Oliver B, Welch D, Rose D, Goldsack T J, Phillips M A, Sinclair M A, Thomas K J 2002 *Proceeding of 14th IEEE High Power Particle Beams Conference Albuquerque, USA, 23–28 June, 2002* p123
- [23] Oliver B V, Genoni T C 2003 *Proceeding of 14th IEEE Pulsed Power Conference Dallas, USA, June 15–18, 2003* p395
- [24] Bruner N, Mostrom C, Rose D V, Welch D R, Bailey V, Johnson D L, Oliver B V 2007 *Proceeding of 16th IEEE Pulsed Power Conference Albuquerque, USA, June 17–22, 2007* p807
- [25] Qian B L, Liu Y G, Li C L, Liu C B 2000 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **28** 760
- [26] Fuks M I, Schamiloglu E 2014 *Phys. Plasmas* **21** 053102
- [27] Bluhm H (translated by Jiang W H, Zhang C) 2008 *Pulsed Power Systems: Principles and Application* (Beijing: Tsinghua University Press) pp128–135 (in Chinese) [布鲁姆 H 著 (江伟华, 张弛 译) 2008 脉冲功率系统的原理与应用 (北京: 清华大学出版社) 第 128—135 页]
- [28] Wang M Y 1978 *Appl. Phys. Lett.* **33** 284
- [29] Ma X K 2000 *Theory and Application of Electromagnetic Field* (Xi'an: Xian Jiaotong University Press) pp206–216 (in Chinese) [马西奎 2000 电磁场理论及应用 (西安: 西安交通大学出版社) 第 206—216 页]
- [30] Xue D Y, Chen Y Q 2011 *Technology and Application of System Simulation Based on MATLAB and Simulink* (Beijing: Tsinghua University Press) pp108–110 (in Chinese) [薛定宇, 陈阳泉 2011 基于 MATLAB/Simulink 的系统仿真技术与应用 (北京: 清华大学出版社) 第 108—110 页]



# A method to calculate the electron sheath profile of the nonaxisymmetrical magnetic insulation\*

Wei Hao<sup>1)2)</sup>† Sun Feng-Ju<sup>2)</sup> Hu Yi-Xiang<sup>2)</sup> Liang Tian-Xue<sup>2)</sup>  
Cong Pei-Tian<sup>2)</sup> Qiu Ai-Ci<sup>1)2)</sup>‡

1) (State Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

2) (State Key Laboratory of Intense Pulsed Radiation Simulation and Effect, Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China)

( Received 30 June 2016; revised manuscript received 20 November 2016 )

## Abstract

The nonaxisymmetrical magnetic insulation would occur due to the disalignment of inner electrodes in long magnetically insulated transmission lines, or the nonuniform distributions of injected currents in induction cavities of magnetically insulated induction voltage adders (MIVA). The electron sheath profile is a very important parameter to characterize the nonaxisymmetrical magnetic insulation. In the past, the three-dimensional particle in cell simulation was usually used to determine the electron sheath profile, which is extremely time-consuming and inefficient. In this paper, a fast and efficient calculation method is proposed. The classical one-dimensional Creedon theory of the magnetic insulation equilibrium is generalized to a two-dimensional plane of  $(r, \theta)$  via introducing a parameter defined as the azimuthal mode number. Two-dimensional Creedon is developed to model the asymmetric magnetic insulation of the MIVA. Provided the azimuthal distributions of magnetic flux density on the cathode, which is in proportion to the cathode current, the two-dimensional Creedon model is numerically solved. A numerical solution method to calculate the electron sheath profile is proposed, and then the calculation error is also given. As the azimuthal distribution of magnetic flux density on the cathode meets a cosine function, the profile of the electron sheath is approximate to the Gauss function. As the nonuniform portion of cathode current increases, the electron sheath becomes more eccentric, and the calculation error is also much larger.

**Keywords:** magnetically insulated induction voltage adders, asymmetrical distribution of injected currents, nonaxisymmetrical magnetic insulation, electron sheath profile

**PACS:** 84.70.+p, 07.85.Fv, 41.20.-q, 52.35.-g

**DOI:** 10.7498/aps.66.038402

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11505138, 51577156).

† Corresponding author. E-mail: [weihaoyy@nint.ac.cn](mailto:weihaoyy@nint.ac.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [qiuac@cae.cn](mailto:qiuac@cae.cn)