

领导-跟随多智能体系统的部分分量一致性

吴彬彬 马忠军 王毅

Partial component consensus of leader-following multi-agent systems

Wu Bin-Bin Ma Zhong-Jun Wang Yi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 060201 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.060201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.060201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I6>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一类离散时间广义系统的迭代学习控制

[Iterative learning control of a class of discrete-time singular system](#)

物理学报.2016, 65(12): 120201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.120201>

自主协同系统的宏观稳定机理研究

[Macroscopic stable mechanism of autonomous cooperative system](#)

物理学报.2015, 64(10): 100202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.100202>

切换系统的异步镇定: 相邻模型依赖平均驻留时间

[Asynchronous stabilization of switched systems: Adjacent mode-dependent average dwell time](#)

物理学报.2015, 64(5): 050201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.050201>

X波段微带余割平方扩展波束天线阵赋形优化遗传算法研究

[Research on X band extended cosecant squared beam synthesis of micro-strip antenna arrays using genetic algorithm](#)

物理学报.2015, 64(11): 110504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.110504>

领导-跟随多智能体系统的部分分量一致性*

吴彬彬¹⁾²⁾ 马忠军^{1)2)†} 王毅³⁾

1) (桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 桂林 541004)

2) (桂林电子科技大学, 广西高校数据分析与计算重点实验室, 桂林 541004)

3) (浙江财经大学数学与统计学院, 杭州 310012)

(2016年6月29日收到; 2016年11月30日收到修改稿)

首先给出多智能体系统的部分分量一致性概念, 然后探讨有向网络拓扑结构下的一阶非线性领导-跟随多智能体系统的部分分量一致性问题. 通过设计合适的牵引控制器, 建立相应的误差系统, 将多智能体系统的部分分量一致性转化为误差系统的部分变元稳定性, 并运用矩阵理论和稳定性理论, 导出该多智能体系统实现部分分量一致性的充分条件. 数值模拟验证了理论结果的正确性.

关键词: 多智能体系统, 一致性, 部分分量一致性

PACS: 02.30.Yy, 02.30.Ks, 05.65.+b

DOI: 10.7498/aps.66.060201

1 引言

近年来, 随着人工智能技术的快速发展, 多智能体系统的研究引起了物理、通信与控制等各领域学者的兴趣. 一致性作为多智能体系统协调控制中最基本的问题之一, 也受到多个领域中研究者的持续关注^[1-4]. 一致性是指由多个智能体组成的一个系统在控制协议的作用下, 其位置或速度等状态变量渐近趋同. 多智能体系统的一致性研究^[5,6]在蜂拥问题、群集问题、编队控制和分布式传感器网络等领域都有着广泛应用.

目前, 已有很多研究无领导者的多智能体系统一致性问题的文献^[7-12]. 例如, 文献^[7]将系统的通信拓扑建模成有向图, 首先证明了在有向固定拓扑强连通的情况下, 系统能够达到一致; 文献^[8]考虑了广义的线性和非线性多智能体系统的一致性问题; 文献^[9]考察了同时具有通信时延和输入时延的一阶与二阶多智能体系统的运动一致性问

题. 此外, 文献^[10, 11]分别考虑了一阶和二阶非线性多智能体系统模型的一致性问题; 通过给出一个新的李雅普诺夫函数, 文献^[12]获得了固定通信拓扑结构下的三阶非线性多智能体系统一致性的一个充分条件. 领导-跟随多智能体系统的一致性问题也获得了一些研究成果^[13-17]. 例如, 文献^[13]考察了有向网络拓扑结构下非线性多智能体系统的局部和全局一致性问题; 基于一个新的 T - S 模糊模型方法, 文献^[14]考虑了在任意拓扑结构下非线性多智能体系统模型的 H_∞ 一致性控制问题; 运用线性矩阵不等式方法, 文献^[15]在其基础上获得了领导-跟随多智能体系统模型一致性的一个模糊算法; 文献^[16]研究了在固定和切换拓扑结构下高阶多智能体系统的一致性问题; 此外, 文献^[17]提出了多智能体系统的滞后一致性, 并基于矩阵理论和稳定性理论, 给出了几个实现滞后一致性的充分条件.

以上研究考虑的一致性(或聚类一致性)是所有(或部分)智能体的所有状态变量(如位移和速

* 国家自然科学基金(批准号: 11562006, 61663006)、广西自然科学基金(批准号: 2015GXNSFAA139013)、桂林电子科技大学研究生教育创新计划(批准号: YJCS201555)、广西优秀中青年骨干教师培养工程项目(批准号: gxqg022014025)和浙江省自然科学基金(批准号: LY17A020007)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: mzj1234402@163.com

度)渐近趋于恒同. 一些学者从另外的角度, 针对二阶多智能体系统, 研究了部分状态变量的一致性问题. 例如, 文献 [18] 研究了二阶多智能体系统的部分状态一致性问题, 这意味着每个智能体的部分状态(如速度)达到一致, 其他的状态(如位移)不一定达到一致. 然而, 在多智能体网络中, 因为一些因素或需要, 系统中智能体的位移(或速度)也许只在某一个方向上的分量达到一致, 而在其他方向上的分量并不一定一致. 例如, 飞机在飞行表演时, 几架飞机保持一字横队并排(或射线状)飞行, 就位移这个三维矢量来说, 在其飞行前进方向上的位移分量是一致的, 而位移在另外方向上的分量并不是一致的. 从本质上来说, 这就是一种关于位移的部分分量一致性问题. 受上述研究结果和现象的启发, 本文考虑多智能体系统的部分分量一致性问题. 与状态中全部分量达到一致的已有研究结果相比较, 部分分量一致性更具有一般性, 是一种比通常意义下的一致性要弱的群体动力学行为. 因此, 部分分量一致性的研究具有较强的理论意义和潜在的应用价值.

本文第2节给出文中要用到的部分变元稳定性、图论以及矩阵相关知识和引理; 第3节先给出部分分量一致性概念, 然后研究领导-跟随非线性多智能体系统的部分分量一致性问题, 通过设计合适的控制项, 并运用矩阵理论和稳定性理论, 导出该多智能体系统实现部分分量一致性的充分条件; 第4节数值模拟验证了理论结果的正确性; 第5节给出结论和讨论.

2 预备知识

首先给出文中要用到的有关稳定性理论的一些结果. 考虑 n 维非自治常微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad (1)$$

其中, $F(t, x) \in C[R^+ \times R^n, R^n]$, $F(t, 0) \equiv 0$, $x = (y, z)^T = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)^T \in R^n$. 令 $y = (x_1, \dots, x_m)^T \in R^m$, $z = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T \in R^p$, $m + p = n$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$, $\|y\| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$, $\|z\| = \left(\sum_{i=m+1}^n x_i^2\right)^{1/2}$, R^+ 表示 $[0, +\infty)$, $t \in R^+$.

定义 1 [19] 称 (1) 式的平凡解关于部分变元 y 是稳定的, 若 $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in R^+, \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \forall x_0 \in S_{\delta(t_0)} = \{x \mid \|x\| < \delta\}$, 有

$$\|y(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon(t \geq t_0).$$

定义 2 [19] 称 (1) 式的平凡解关于部分变元 y 是吸引的, 若 $\forall t_0 \in R^+, \exists \sigma(t_0) > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in S_{\delta(t_0)} = \{x \mid \|x\| \leq \sigma(t_0)\}, \exists T(t_0, x_0, \varepsilon) > 0$, 当 $t \geq t_0 + T$ 时, 有

$$\|y(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon,$$

其中 $S_{\sigma(t_0)}$ 称为关于 y 的吸引区域.

定义 3 [19] 称 (1) 式的平凡解关于部分变元 y 渐近稳定, 若它关于 y 稳定且吸引.

定义 4 [19] 若函数 $\varphi \in C[R^+, R^+]$ (或 $C[(0, r), R^+]$) 是连续的严格单调上升函数, 且有 $\varphi(0) = 0$, 则称 φ 属于 K 类函数, 记为 $\varphi \in K$.

引理 1 [19] 令 ϕ, ψ 和 α 都是 K 类函数. 若存在函数 $V(t, x)$ 满足

$$\varphi(\|y\|) \leq V(t, x) \leq \psi(\|y\|),$$

它的导数

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} \leq -\alpha(\|y\|),$$

则 (1) 式的平凡解关于 y 渐近稳定.

接着, 给出一个文中需要用到的有关矩阵的引理.

引理 2 设 $H = (h_{ij}) \in R^{N \times N}$, $B = (b_{ij}) \in R^{n \times n}$, 则存在 nN 阶置换矩阵(即每一行和每一列都只有一个元素为 1 而其余元素均为 0 的方阵) $P = P_s \cdots P_1$, 其中 P_i 是第一类初等行变换矩阵(即将单位矩阵的某两行进行对换后的矩阵), 使得等式 $P(H \otimes B)P^{-1} = B \otimes H$ 成立. 其中, $i = 1, \dots, s$, s 为正整数, \otimes 为克罗内克积.

证明 由克罗内克积的性质知, $H \otimes B = (H \otimes I_n)(I_N \otimes B) = (I_N \otimes B)(H \otimes I_n)$, 其中 I_N 与 I_n 分别为 N 阶和 n 阶单位矩阵.

$$H \otimes I_n = \begin{pmatrix} h_{11}I_n & \cdots & h_{1N}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N1}I_n & \cdots & h_{NN}I_n \end{pmatrix},$$

$$I_n \otimes H = \begin{pmatrix} H & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & H \end{pmatrix}.$$

通过简单计算可知, 存在 nN 阶置换矩阵 $P = P_s \cdots P_1$, 其中 P_i 是第一类初等行变换矩阵, 使得 $P(H \otimes I_n)P^{-1} = I_n \otimes H$. 同理, $P(I_N \otimes B)P^{-1} = B \otimes I_N$.

于是,

$$\begin{aligned} P(H \otimes B)P^{-1} &= P(H \otimes I_n)(I_N \otimes B)P^{-1} \\ &= P(H \otimes I_n)P^{-1}P(I_N \otimes B)P^{-1} \\ &= (I_n \otimes H)(B \otimes I_N) = B \otimes H. \end{aligned}$$

然后, 介绍文中要用的图论基础知识.

将网络中的智能体看成点, 两个智能体信息交流看作边, 则智能体的相互作用拓扑可以用图来表示. 令 $G = \{V, E, A\}$ 表示一个图, 其中 $V = \{1, \dots, N\}$ 是点集, $E \subseteq V \times V$ 是边集, $A = (a_{ij})_{N \times N}$ 是邻接矩阵. 图 G 中的一条边用 $e_{ij} = (v_i, v_j)$ 表示, 意思是第 i 个智能体可以接收第 j 个智能体的信息. 如果 $e_{ij} \in E$, 则 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$. 本文中我们假设 $a_{ii} = 0, i \in V$. 拉普拉斯矩阵 $L = (L_{ij})_{N \times N}$ 与邻接矩阵有如下关系: $L_{ij} = -a_{ij} (i \neq j)$ 和 $L_{ii} = \sum_{i \neq j} a_{ij}$, 因此

$$\sum_{j=1}^N L_{ij} = 0.$$

3 主要结果

本文将部分变元的稳定性理论运用到多智能体系统. 考虑由 N 个智能体和一个领导者组成的一阶多智能体系统, 由文献 [13] 的模型, 可设每个跟随智能体的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)) \\ &\quad + u_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^T \in \mathbf{R}^n$ 表示第 i 个智能体的状态; $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = (f_1(\mathbf{x}_i), \dots, f_n(\mathbf{x}_i))^T$ 是非线性连续函数; $c > 0$ 表示耦合强度; $\Gamma = \text{diag}(r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}^{n \times n} (r_k \geq 0, k = 1, \dots, n)$ 表示内部耦合矩阵.

设领导智能体的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)), \quad (3)$$

其中, $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})^T \in \mathbf{R}^n$ 表示领导智能体的状态, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = (f_1(\mathbf{x}_0), \dots, f_n(\mathbf{x}_0))^T$ 是非线性连续函数.

考虑有向网络拓扑下的领导-跟随多智能体系统部分分量一致性问题. 类似于文献 [15] 中的一致性协议, 设计牵引控制器

$$\mathbf{u}_i(t) = -cd_i \Gamma(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)), \quad (4)$$

其中, c 和 Γ 的意义与 (2) 式中的相同. 当第 i 个智能体能接收到领导者的信息时, $d_i > 0$, 否则 $d_i = 0$.

令 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)$. 由 (2), (3) 和 (4) 式可以得到误差系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - c \sum_{j=1}^N L_{ij} \Gamma \mathbf{e}_j(t) \\ &\quad - cd_i \Gamma \mathbf{e}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

上式可以写成向量形式

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}(t) &= \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_0) \\ &\quad - c[(L + D) \otimes \Gamma] \tilde{\mathbf{e}}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= (\mathbf{e}_1^T(t), \dots, \mathbf{e}_N^T(t))^T, \\ \mathbf{e}_i(t) &= (e_{i1}(t), \dots, e_{in}(t))^T, \\ D &= \text{diag}(d_1, \dots, d_N), \\ \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) &= (\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_N))^T, \\ \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_0) &= (\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_0))^T. \end{aligned}$$

为了研究误差系统 (5) 的平凡解关于部分变元的渐近稳定性, 我们做如下变换: 令 $\hat{\mathbf{e}}(t) = P\mathbf{e}(t)$, 其中 P 是引理 2 中的置换矩阵. 令 $\boldsymbol{\varepsilon}_k(t) = (e_{1k}(t), \dots, e_{Nk}(t))^T, k = 1, \dots, n$, 通过计算可得 $\hat{\mathbf{e}}(t) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1^T(t), \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n^T(t))^T$. 因此, (5) 式可以转化为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}}(t) &= P[\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_0)] \\ &\quad - cP[(L + D) \otimes \Gamma]P^{-1}\hat{\mathbf{e}}(t), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}}(t) &= [\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_0)] \\ &\quad - c\Gamma \otimes (L + D)\hat{\mathbf{e}}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) &= (\hat{\mathbf{f}}_1^T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N), \dots, \hat{\mathbf{f}}_n^T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N))^T, \\ \hat{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) &= (\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_N))^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_0) \\ &= (\hat{\mathbf{f}}_1^T(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_0), \dots, \hat{\mathbf{f}}_n^T(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_0))^T, \\ & \hat{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_0) \\ &= (\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_0))^T. \end{aligned}$$

首先给出文中要用到的一个假设条件.

假设 1 假设存在一个常数 $w > 0$, 使得非线性函数 $\hat{\mathbf{f}}$ 满足

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{e}}(t)^T \mathbf{A}(\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_0)) \\ & \leq w \hat{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{A} \hat{\mathbf{e}}(t), \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{A} = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{lN}, 0, \dots, 0), l \in \{1, \dots, n\}$, $\hat{\mathbf{e}}(t) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1^T(t), \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n^T(t))^T$.

注: 与利普希茨条件相比, 假设 1 的条件是弱化的条件.

然后, 给出文中要用到的一个定义.

定义 5 若存在 $1 \leq l \leq n$, 使得系统 (2) 和 (3) 的解满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^l \|\boldsymbol{\varepsilon}_k(t)\| = 0$, 则称系统 (2) 和 (3) 关于前 l 个分量达到 (部分分量) 一致.

明显地, 若 $l = n$, 则定义 5 中的一致性就是通常意义下的一致性. 这就是说, 部分分量一致性是

一种更一般化的群体动力学行为.

定理 1 有向网络拓扑结构下, 对于控制项 (4), 若系统 (2) 和 (3) 满足假设 1, 且满足条件

$$w \mathbf{I}_N - cr_k(\mathbf{L} + \mathbf{D})_s < 0 \quad (k = 1, 2, \dots, l), \quad (7)$$

其中, $r_k > 0$ 是矩阵 $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$ 的第 k 个元素, $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_N) \in \mathbf{R}^{N \times N}, d_i \geq 0$, $(\mathbf{L} + \mathbf{D})_s = \frac{1}{2}[(\mathbf{L} + \mathbf{D})^T + (\mathbf{L} + \mathbf{D})]$, 则所有智能体跟随领导智能体关于前 l 个分量达到一致.

证明 设 $\phi(\|\mathbf{y}\|) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^N e_{ik}(t) e_{ik}(t), \psi(\|\mathbf{y}\|) = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^N e_{ik}(t) e_{ik}(t)$, 其中, $\mathbf{y} = (e_{11}(t), \dots, e_{N1}(t), \dots, e_{1l}(t), \dots, e_{Nl}(t))^T$. 显然, $\phi, \psi \in K$.
令

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^N e_{ik}(t) e_{ik}(t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{A} \hat{\mathbf{e}}(t),$$

其中, $\mathbf{A} = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{lN}, 0, \dots, 0)$, $\hat{\mathbf{e}}(t) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1^T(t), \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n^T(t))^T$. 因此, 函数 $V(t)$ 显然满足引理 1 的条件 $\phi(\|\mathbf{y}\|) \leq V(t) \leq \psi(\|\mathbf{y}\|)$. 类似于文献 [17], 把函数 $V(t)$ 沿着 (6) 的轨迹对 t 求导有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \hat{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{A} \dot{\hat{\mathbf{e}}}(t) = \hat{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{A}[(\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_0)) - c \mathbf{\Gamma} \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{D}) \hat{\mathbf{e}}(t)] \\ &\leq w \hat{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{A} \hat{\mathbf{e}}(t) - c \hat{\mathbf{e}}^T(t) \{ \mathbf{A}[\mathbf{\Gamma} \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{D})] \} \hat{\mathbf{e}}(t) \\ &= w \hat{\mathbf{e}}^T(t) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{I}_N & \\ & & & 0_{N \times N} & \ddots \\ & & & & & 0_{N \times N} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}(t) - c \hat{\mathbf{e}}^T(t) \begin{pmatrix} r_1(\mathbf{L} + \mathbf{D}) & & & \\ & \ddots & & \\ & & r_l(\mathbf{L} + \mathbf{D}) & \\ & & & 0_{N \times N} & \ddots \\ & & & & & 0_{N \times N} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}(t) \\ &= \hat{\mathbf{e}}^T(t) \begin{pmatrix} w \mathbf{I}_N - cr_1(\mathbf{L} + \mathbf{D}) & & & \\ & \ddots & & \\ & & w \mathbf{I}_N - cr_l(\mathbf{L} + \mathbf{D}) & \\ & & & 0_{N \times N} & \ddots \\ & & & & & 0_{N \times N} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}(t) \\ &= \sum_{k=1}^l \boldsymbol{\varepsilon}_k^T(t) [w \mathbf{I}_N - cr_k(\mathbf{L} + \mathbf{D})] \boldsymbol{\varepsilon}_k(t) = \sum_{k=1}^l \boldsymbol{\varepsilon}_k^T(t) [w \mathbf{I}_N - cr_k(\mathbf{L} + \mathbf{D})_s] \boldsymbol{\varepsilon}_k(t), \end{aligned}$$

其中 \mathbf{I}_N 表示 N 阶单位矩阵. 若 (7) 式成立, 则存在 $h > 0$ 使得

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{k=1}^l \boldsymbol{\varepsilon}_k^T(t) [w \mathbf{I}_N - cr_k(\mathbf{L} + \mathbf{D})_s] \boldsymbol{\varepsilon}_k(t) \leq -h \sum_{k=1}^l \boldsymbol{\varepsilon}_k^T(t) \boldsymbol{\varepsilon}_k(t) = -h \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^N e_{ik}(t) e_{ik}(t).$$

取引理 1 中的 $\alpha(\|\mathbf{y}\|) = h \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^N e_{ik}(t)e_{ik}(t)$, 显然 $\alpha \in K$. 根据引理 1, (6) 式的零解是关于部分变元渐近稳定的, 即有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^l \|\varepsilon_k(t)\| = 0$. 因此, 系统 (2) 和 (3) 关于前 l 个分量达到一致.

注 1: 控制器 (4) 是牵引控制器. 当网络拓扑为平衡图 [7] (即满足条件: 任何一个节点的入度等于出度, 也就是 \mathbf{L} 的行和与列和都等于 0; 无向图是平衡图的特例) 时, 只需牵制根节点就可以保证 $(\mathbf{L} + \mathbf{D})_s$ 正定, 故当 c 充分大时定理的条件可以成立. 这就是说, 对于平衡图, 只需牵制控制根节点即可.

注 2: 对于网络结构为权重有向非平衡图的情形, 很多的数值模拟例子表明, 只牵制根节点时定理条件也能满足, 但存在本文定理不适用的反例.

例如 $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 若只牵制根节点 (第 3 个节点), 无论牵制强度有多大, 由于 $(\mathbf{L} + \mathbf{D})_s$ 的二阶顺序主子式小于 0, 故 $(\mathbf{L} + \mathbf{D})_s$ 不可能正定. 这就是说, 对于这个 \mathbf{L} , 如果只牵制根节点, 定理的条件 (7) 不能满足. 直观来看, 权重 0.1 比较接近 0; 若 0.1 改成 0 (相应的 -0.1 也是 0), 则第 2 个节点是根节点、第 3 个节点是孤立节点, 都需要牵制. 这就是说, 接受邻居信息能力很弱的节点, 也应该看作根节点, 需要接受领导智能体的牵制.

4 数值模拟

本节通过例子表明上一节中部分分量一致性理论结果的有效性.

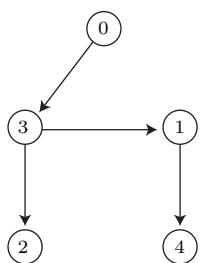


图 1 智能体连接的拓扑图

Fig. 1. The adjacent topology graph of agents.

例 令系统 (2) 中的 $N = 4, n = 3$ (图 1). 下面我们考虑多智能体系统关于前两个分量的一致

性问题 (即 $l = 2$). 设领导智能体状态的下标用 0 表示. 令第 i 个智能体的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{i1} = \mathbf{x}_{i2} - 3\mathbf{x}_{i1} + 2[|\mathbf{x}_{i1} + 1| - |\mathbf{x}_{i1} - 1|] \\ \dot{\mathbf{x}}_{i2} = -\mathbf{x}_{i1} + \mathbf{x}_{i2} - \mathbf{x}_{i2}\mathbf{x}_{i3}^2 \\ \dot{\mathbf{x}}_{i3} = 2\mathbf{x}_{i2} \end{cases}$$

通过简单计算, 取 $w = 1$ 时假设 1 成立. 取 \mathbf{L} 和 \mathbf{D} 分别为

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

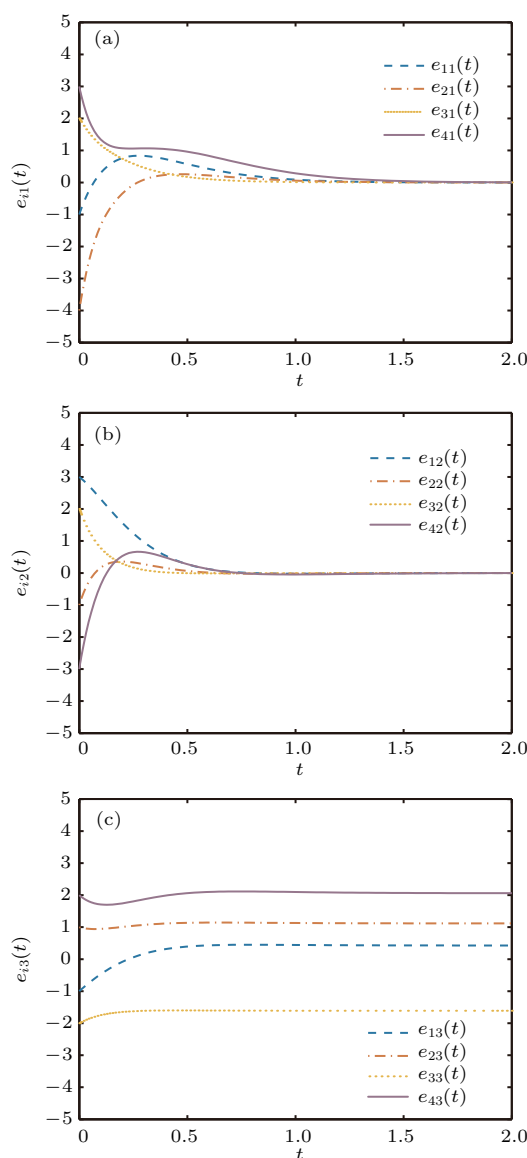


图 2 (网刊彩色) 跟随者与领导者的状态误差演化
Fig. 2. (color online) The time evolution of the state errors between the leader and the followers.

则 $(L + D)_s$ 的最小特征值为 $\lambda_{\min} = 0.1910$. 取 $\Gamma = \text{diag}(1, 1, 0)$ 与 $c = 6$, 不等式 (7) 成立. 运用 Matlab 软件计算, 得到误差轨迹如图 2 所示. 图 2(a) 与图 2(b) 表明了牵制根节点 (第 3 个节点) 时系统 (2) 和 (3) 中所有智能体的前两个分量都能达到一致, 而图 2(c) 说明另一个分量没有达到一致. 这就是说, 与通常意义下的一致性比较, 部分分量一致性是一种较弱的群体动力学行为.

5 结 论

本文考虑了具有领导者的一阶非线性多智能体系统的部分分量一致性, 在有向网络拓扑结构下, 给出了一个有效的牵引控制器, 获得了该系统达成部分分量一致性的一个充分条件, 并运用矩阵理论和稳定性理论证明了该充分条件的正确性. 然而, 现实中还有一些现象是关于速度的部分分量一致性的, 这就需要对二阶甚至是高阶多智能体系统的一致性进行研究. 下一步, 我们将讨论二阶多智能体系统的多个分量一致性问题.

参考文献

- [1] Vicsek T, Czirok A, Ben-Jacob E, Cohen I, Shochet O 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1226
- [2] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S 2003 *IEEE Trans. Autom. Control* **48** 988
- [3] Qu Z H, Wang J, Hull R A 2008 *IEEE Trans. Autom. Control* **53** 894
- [4] Cortes J, Bullo F 2005 *SIAM J. Control Optimization* **44** 1543
- [5] Wang N, Wu Z H, Peng L 2014 *Chin. Phys. B* **23** 108901
- [6] Fax J A, Murray R M 2004 *IEEE Trans. Autom. Control* **49** 1465
- [7] Olfati-Saber R, Murray R M 2004 *IEEE Trans. Autom. Control* **49** 1520
- [8] Guo L X, Hu M F, Hu A H, Xu Z Y 2014 *Chin. Phys. B* **23** 050508
- [9] Ji L H, Liao X F 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 150202 (in Chinese) [纪良浩, 廖晓峰 2012 物理学报 **61** 150202]
- [10] Xie D S, Xie J Q, Zhao H Y 2015 *Proceedings of the 34th Chinese Control Conference Hangzhou, China, July 28–30, 2015* p7529
- [11] Yu W W, Chen G R, Cao M, Kurths J 2010 *Automatica* **46** 1089
- [12] Xin Y M, Li Y X, Huang X, Cheng Z S 2015 *Neurocomputing* **159** 84
- [13] Yu W W, Chen G R, Cao M 2011 *IEEE Trans. Autom. Control* **56** 1436
- [14] Zhao Y, Li B, Qin J H, Gao H J, Karimi H R 2013 *IEEE Trans. Cybernet.* **43** 2157
- [15] Saadi P T, Mardani M M, Shasadeghi M, Safarinezhadian B 2015 *4th Iranian Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems Zahedan, Iran, September 9–11, 2015* p1
- [16] Ni W, Cheng D Z 2010 *System Control Lett.* **59** 209
- [17] Xie Y Y, Wang Y, Ma Z J 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 040202 (in Chinese) [谢媛艳, 王毅, 马忠军 2014 物理学报 **63** 040202]
- [18] Xiao F, Wang L, Chen J 2010 *System Control Lett.* **59** 775
- [19] Liao X X 2001 *Mathematical Theory of Stability and Its Application* (Wuhan: Central China Normal University Press) pp19, 321, 336 (in Chinese) [廖晓昕 2001 稳定性的数学理论及应用 (武汉: 华中师范大学出版社) 第 19, 321, 336 页]

Partial component consensus of leader-following multi-agent systems*

Wu Bin-Bin¹⁾²⁾ Ma Zhong-Jun^{1)2)†} Wang Yi³⁾

1) (School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

2) (Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Data Analysis and Computation, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

3) (School of Mathematics and Statistics, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310012, China)

(Received 29 June 2016; revised manuscript received 30 November 2016)

Abstract

Consensus problems, as basic topics in distributed coordination of multi-agent systems, have drawn a great deal of attention from different research fields. Generally, consensus refers to the asymptotic convergence of state variables of all agents with time evolution. In this paper, a concept on partial component consensus in multi-agent system is first given, which is a weaker dynamic behavior of group than the consensus in general, and then the problem of partial component consensus in leader-following first-order multi-agent system with the directed network topology is discussed. By designing an appropriate pinning control protocol and building corresponding error system, partial component consensus in multi-agent system is transformed into the partial variable stability of the error system. Using matrix theory and stability theory, a sufficient condition is given to realize partial component consensus in multi-agent system. Numerical simulations are given to illustrate the theoretical results.

Keywords: multi-agent system, consensus, partial component consensus

PACS: 02.30.Yy, 02.30.Ks, 05.65.+b

DOI: [10.7498/aps.66.060201](https://doi.org/10.7498/aps.66.060201)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11562006, 61663006), the Natural Science Foundation of Guangxi, China (Grant No. 2015GXNSFAA139013), the Innovation Project of GUET Graduate Education, China (Grant No. YJXCS201555), the Outstanding Young Teachers Training in Higher Education Institutions of Guangxi, China (Grant No. gxqg022014025), and the Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (Grant No. LY17A020007).

† Corresponding author. E-mail: mzj1234402@163.com