

弹性需求下的网络交通流逐日动态演化

刘诗序 陈文思 池其源 严海

Day-to-day dynamical evolution of network traffic flow with elastic demand

Liu Shi-Xu Chen Wen-Si Chi Qi-Yuan Yan Hai

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 060501 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.060501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.060501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I6>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于广义似然比判决的混沌信号重构方法

[Reconstruction algorithm of chaotic signal based on generalized likelihood ratio threshold-decision](#)

物理学报.2017, 66(4): 040503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.040503>

含三个忆阻器的六阶混沌电路研究

[Research on a six-order chaotic circuit with three memristors](#)

物理学报.2017, 66(4): 040502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.040502>

忆感器文氏电桥振荡器

[Meminductive Wein-bridge chaotic oscillator](#)

物理学报.2017, 66(2): 020502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.020502>

余维-1非光滑分岔下的簇发振荡及其机理

[Bursting oscillations as well as the mechanism with codimension-1 non-smooth bifurcation](#)

物理学报.2017, 66(2): 020501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.020501>

基于亥姆霍兹定理计算动力学系统的哈密顿能量函数

[Calculation of Hamilton energy function of dynamical system by using Helmholtz theorem](#)

物理学报.2016, 65(24): 240501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.240501>

弹性需求下的网络交通流逐日动态演化*

刘诗序^{1)†} 陈文思¹⁾ 池其源¹⁾ 严海²⁾

1) (福州大学土木工程学院, 福州 350116)

2) (北京工业大学北京城市交通协同创新中心, 北京 100124)

(2016年12月7日收到; 2016年12月28日收到修改稿)

在现实交通系统中, 网络的交通需求是可变的, 随交通运行状态而改变. 针对需求可变情形, 以含两条路径的简单路网为例, 建立了弹性需求下的网络交通流逐日动态演化模型, 基于非线性动力学理论, 证明了动态演化模型的不动点存在且唯一, 并且推导出了弹性需求下网络交通流动态演化的稳定性条件. 通过数值实验, 分析了网络交通流演化特征. 研究发现: 在一定条件下流量演化会出现分岔和混沌现象, 并且出行者的出行需求对费用越敏感, 系统演化越可能稳定; 出行者路径选择的随机性越小, 系统演化越不可能稳定; 出行者对前一天实际费用的依赖程度越小, 系统演化越可能稳定.

关键词: 网络交通流, 弹性需求, 动态演化, 混沌

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Pq, 01.75.+m

DOI: 10.7498/aps.66.060501

1 引言

交通网络平衡分配问题的提出已有几十年的历史, 学者们提出了很多扩展的静态模型, 如用户平衡分配 (user equilibrium, UE) 模型^[1,2]、随机用户平衡分配 (stochastic user equilibrium, SUE) 模型^[1,2], 它是研究网络交通流的主要手段, 交通网络平衡分配模型隐含着网络交通流的平衡是可以达到的假设. 然而, 网络交通流是巨量的出行者路径选择博弈的集聚结果, 受到出行者选择行为的影响, 现实中出行者的理性程度、出行者获取的信息、出行者个体的差异性等都会影响出行者的路径选择^[3]. 有研究指出, 出行者第 n 天的行为受到第 $n-1$ 天和之前的行为以及网络状态的影响^[1], 因此每天的网络交通流不是一成不变的重复, 呈现复杂曲折的逐日动态演化过程. 研究网络交通流逐日动态演化规律, 不仅可以了解交通网络平衡是否能达到以及如何达到的过程, 而且还可以认识如果平衡达不到网络交通流演化会出现什么现象.

学者们通过两个途径探索网络交通流逐日动态演化规律. 第一个途径以出行者个体选择行为为着眼点, 使用计算机微观仿真与行为实验模拟方法, 以出行者个体为单元, 研究网络交通流的动态演化过程. 学者 Nakayama 等^[4]、Klühl 和 Bazzan^[5]、Kim 等^[3]、Wei 等^[6]、Kusakabe 和 Nakano^[7]、刘天亮和黄海军^[8]、刘诗序和关宏志^[9]、Iida 等^[10]、Selten 等^[11]、Rapoport 等^[12]做了一些代表性的研究. 另一个途径则是从集计角度出发, 基于出行者逐日路径选择机理, 建立逐日动态分配模型, 并以非线性动力学理论为基础, 研究网络平衡的存在性及其稳定性, 建立的模型分为连续型动态系统 (假设出行者出行的天数是连续变量) 和离散型动态系统 (假设出行者出行的天数是离散变量) 两类. 学者 Smith^[13,14]、Nagurney 和 Zhang^[15]、Watling^[16]、Cho 和 Hwang^[17]、Kumar 和 Peeta^[18]、Tan 等^[19]、Di 等^[20]、He 和 Peeta^[21]、Iryo^[22]、Xiao 等^[23]、郭仁拥和黄海军^[24,25]、张波等^[26]在连续型动态系统方面做了一些工作. 离散型动态系统建模方法最早由 Horowitz 提

* 国家自然科学基金 (批准号: 51308126, 51378036, 51308018) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liushixu@fzu.edu.cn

出[27], 随后, Cantarella 和 Cascetta [28–30]、Watling 和 Hazelton [31]、Bie 和 Lo [32]、He 和 Liu [33]、Han 和 Du [34]、Zhao 和 Orosz [35]、Di 和 Liu [36]、刘诗序和关宏志等 [1,37]、郭仁拥和黄海军等 [38–40]、徐红利等 [41] 学者进一步做了大量的深入研究. 最近, Cantarella 和 Watling [42] 将连续模型和离散模型做了统一.

运用非线性动力学方法研究网络交通流逐日动态演化规律, 不仅可以推导出网络交通流演化的稳定性条件, 而且还可以探索网络交通流不稳定时呈现出的非线性特征. 文献[1]对含两条路径的简单路网研究发现了在一定条件下网络交通流量的周期振荡和混沌现象, 完善了网络交通流演化研究中不稳定时的规律, 文献[37]拓展到有限理性情形. 研究表明: 网络中出行者理性程度适中时, 流量演化容易出现分岔和混沌现象.

然而, 上述研究都是针对固定需求的情形, 即交通网络的出行需求已知且固定, 而在现实中, 起讫点(OD)需求可能会受到交通网络运行状态的影响, 如当网络中某一对OD之间的拥挤程度增加时, 有些出行者可能会改变出行计划(例如放弃自驾选择乘坐地铁出行)或者放弃本次出行, 因此出行需求会减小. 国内外学者对弹性需求情形下的网络交通流静态分配问题极为关注, 提出了很多模型及其求解算法[43–46], 但是对弹性需求下网络交通流演化问题还未做深入研究. 如果网络的OD需求是可变的, 以日为单位, 每天的OD需求与交通网络运行状态有关, 出行者每天的路径选择受到前一天的行为和网络状态的影响, 那么网络交通流的演化是否会稳定? 如果不稳定, 什么情况出现分岔和混沌? 其演化特征和固定需求情形有何不同?

本文以两条路径的简单网络为对象, 建立弹性需求下的网络交通流逐日动态演化模型, 研究网络交通流动态演化系统平衡点的存在性、唯一性和稳定性, 分析弹性需求下网络交通流逐日动态演化规律, 探讨系统演化不稳定时出现分岔和出现混沌的条件.

2 模型

如图1所示, 交通网络中OD间有两条平行路径. 设第 n 天的OD需求为 $d^{(n)}$, 第 n 天路径1和路径2的流量分别为 $f_1^{(n)}$ 和 $f_2^{(n)}$, 第 n 天路径1和路

径2的实际出行费用为 $\bar{C}_1^{(n)}$ 和 $\bar{C}_2^{(n)}$, 假设各路径的出行费用仅与本路径的流量有关, 出行费用函数为 $\bar{C}_1^{(n)} = g_1(f_1^{(n)})$ 和 $\bar{C}_2^{(n)} = g_2(f_2^{(n)})$.

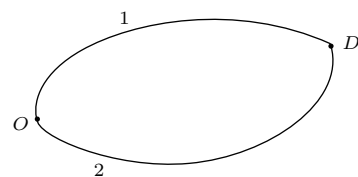


图1 路网示意图

Fig. 1. Road network.

根据随机用户平衡原则的假设[2], 出行者获取的信息不完全, 设第 n 天路径 r ($r = 1, 2$)上的理解出行费用为 $\hat{C}_r^{(n)} = C_r^{(n)} + \xi_r$, $C_r^{(n)}$ 为可观测部分, ξ_r 为随机误差项.

假设1 随机变量 ξ_1 和 ξ_2 相互独立且服从相同的Gumbel分布.

由假设1可知, 第 n 天路径1和路径2的选择概率为logit型, 分别为

$$p_1^{(n)} = P(C_1^{(n)} + \xi_1 \leq C_2^{(n)} + \xi_2) = \frac{1}{1 + e^{\theta(C_1^{(n)} - C_2^{(n)})}}, \quad (1)$$

$$p_2^{(n)} = 1 - p_1^{(n)} = \frac{1}{1 + e^{-\theta(C_1^{(n)} - C_2^{(n)})}}, \quad (2)$$

式中, θ 是与出行者特性有关的参数, 且 $\theta > 0$, 描述出行者路径选择时对路径的费用的敏感程度, θ 越大, 对路径的费用越敏感, 出行者路径选择的随机程度越小, 反之, θ 越小, 对路径的费用越不敏感, 出行者路径选择的随机程度越大. 根据SUE原则, 流量分配为[2,46]

$$f_1^{(n)} = d^{(n)} p_1^{(n)}, \quad (3)$$

$$f_2^{(n)} = d^{(n)} p_2^{(n)}. \quad (4)$$

第 n 天的期望出行费用根据第 $n-1$ 天期望出行费用和实际出行费用更新, 可以表示成二者的加权[1,44]

$$C_r^{(n)} = \phi C_r^{(n-1)} + (1 - \phi) \bar{C}_r^{(n-1)} \quad (r = 1, 2), \quad (5)$$

式中, ϕ 是与出行者特性有关的参数, 且 $0 \leq \phi < 1$, 其大小反映出出行者对前一天实际费用的依赖程度, $0 \leq \phi < 1$ 越大, 依赖程度越小, 反之, ϕ 越小, 依赖程度越大.

由此得到逐日动态交通流演化模型为

$$C_1^{(n)} = \phi C_1^{(n-1)} + (1 - \phi) g_1(f_1^{(n-1)}), \quad (6)$$

$$C_2^{(n)} = \phi C_2^{(n-1)} + (1 - \phi)g_2(f_2^{(n-1)}); \quad (7)$$

路径流量分配

$$f_1^{(n)} = \frac{d^{(n)}}{1 + e^{\theta(C_1^{(n)} - C_2^{(n)})}}, \quad (8)$$

$$f_2^{(n)} = \frac{d^{(n)}}{1 + e^{-\theta(C_1^{(n)} - C_2^{(n)})}}. \quad (9)$$

令

$$p(C_1^{(n)}, C_2^{(n)}) = \frac{1}{1 + e^{\theta(C_1^{(n)} - C_2^{(n)})}}, \quad (10)$$

则动态系统模型转化为

$$C_1^{(n)} = \phi C_1^{(n-1)} + (1 - \phi) \times g_1(d^{(n-1)}p(C_1^{(n-1)}, C_2^{(n-1)})), \quad (11)$$

$$C_2^{(n)} = \phi C_2^{(n-1)} + (1 - \phi)g_2(d^{(n-1)} - d^{(n-1)}p(C_1^{(n-1)}, C_2^{(n-1)})). \quad (12)$$

在弹性需求静态平衡分配问题中, OD 需求可表示为期望最小感知成本的单调下降函数^[2], 因此, 第 n 天的 OD 需求 $d^{(n)}$ 可表示为第 n 天的期望最小感知成本 $S^{(n)}$ 的单调下降函数, 这里设^[2,45,46]

$$d^{(n)} = D(S^{(n)}) = d_0 \exp(-\beta S^{(n)}), \quad (13)$$

式中, $d_0 > 0$, 表示最大潜在 OD 需求; $\beta \geq 0$, 表示需求量对最小期望感知成本的灵敏度, 反映出行者的出行需求对出行费用的敏感性, β 越大, 出行者的出行需求对费用越敏感, 出行者越不愿意出行, 反之, β 越小, 出行者的出行需求对费用越不敏感, 出行者出行的愿望越强.

由前面假设出行费用随机误差项服从 Gumbel 分布, 有^[2,45,46]

$$\begin{aligned} S^{(n)} &= E(\min\{\hat{C}_1^{(n)}, \hat{C}_2^{(n)}\}) \\ &= -\frac{1}{\theta} \ln(\exp(-\theta C_1^{(n)}) + \exp(-\theta C_2^{(n)})), \end{aligned} \quad (14)$$

因此

$$d^{(n)} = d_0 \exp\left(\frac{\beta}{\theta} \ln(\exp(-\theta C_1^{(n)}) + \exp(-\theta C_2^{(n)}))\right). \quad (15)$$

3 稳定性分析和演化状态划分

3.1 不动点的存在性、唯一性和稳定性

设 $\mathbf{x}$ 为一向量, $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 为一向量值函数, K 为一闭凸集. 需说明的是, 本文所用到的向量均为有限维空间的向量.

定义 1 如果 $[\mathbf{V}(\mathbf{x}^1) - \mathbf{V}(\mathbf{x}^2)]^T(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) \geq 0$, $\forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in K$, 则称向量值函数 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 在 K 上是单调的^[47].

定义 2 如果 $[\mathbf{V}(\mathbf{x}^1) - \mathbf{V}(\mathbf{x}^2)]^T(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) > 0$, $\forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in K$, $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$, 则称向量值函数 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 在 K 上是严格单调的^[47].

引理 1 设向量值函数 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 在 K 上一阶连续可微, 且其 Jacobian 矩阵 $\nabla \mathbf{V}(\mathbf{x})$ 是半正定的 (正定的), 则 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 是单调的 (严格单调的)^[47].

假设 2 路径的出行费用关于路径流量的函数连续可微, 且严格单调增加.

定理 1 动态系统 (11) 和 (12) 存在唯一的不动点.

证明 设动态系统 (11) 和 (12) 的不动点为 C_1^* , C_2^* , 则

$$C_1^* = g_1\left(d_0 \exp\left(\frac{\beta}{\theta} \ln(\exp(-\theta C_1^*) + \exp(-\theta C_2^*))\right) \times p(C_1^*, C_2^*)\right), \quad (16)$$

$$C_2^* = g_2\left[d_0 \exp\left(\frac{\beta}{\theta} \ln(\exp(-\theta C_1^*) + \exp(-\theta C_2^*))\right) \times (1 - p(C_1^*, C_2^*))\right]. \quad (17)$$

设

$$d^* = d_0 \exp\left(\frac{\beta}{\theta} \ln(\exp(-\theta C_1^*) + \exp(-\theta C_2^*))\right), \quad (18)$$

不动点处路径流量为 f_1^* , f_2^* , 则

$$f_1^* = \frac{d^*}{1 + e^{\theta(C_1^* - C_2^*)}}, \quad (19)$$

$$f_2^* = \frac{d^*}{1 + e^{-\theta(C_1^* - C_2^*)}}, \quad (20)$$

$$C_1^* = g_1(f_1^*), \quad (21)$$

$$C_2^* = g_2(f_2^*). \quad (22)$$

由 (19) 和 (20) 式, 令

$$f_1^* = h_1(C_1^*, C_2^*), \quad (23)$$

$$f_2^* = h_2(C_1^*, C_2^*). \quad (24)$$

首先, 证明动态系统 (11) 和 (12) 的不动点 C_1^* , C_2^* 的存在性. 由 (18) 式可知, 当 C_1^* 和 C_2^* 取最小值时, d^* 达到最大值 $d_{\max}$, 因此路径流量可行集 $R = \{(f_1, f_2) | f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, f_1 + f_2 = d^* \leq d_{\max}\}$ 是非空有界闭凸集, 设路径出行费用可行集为 Z , 由于路径的出行费用关于路径流量的函数连续, 并由 (6) 和 (7) 式可知: 给定路径出行费用初始值 $C_1^{(0)}$ 和 $C_2^{(0)}$, 集合 Z 也是非空有界闭凸集. 因此, 动态

系统(11)和(12)是非空有界闭凸集 Z 到自身的连续映射, 根据Brouwer不动点定理, 方程组(16)和(17)至少存在一个解, 即动态系统(11)和(12)至少存在一个不动点.

然后, 用反证法证明动态系统(11)和(12)的不动点 C_1^*, C_2^* 的唯一性. 设向量

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

向量值函数

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} g_1(f_1) \\ g_2(f_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} -h_1(C_1, C_2) \\ -h_2(C_1, C_2) \end{pmatrix}.$$

在不动点处, 设 $p = p(C_1^*, C_2^*)$,

$$g'_1 = \left. \frac{dg_1(f_1)}{df_1} \right|_{f_1^*}, \quad g'_2 = \left. \frac{dg_2(f_2)}{df_2} \right|_{f_2^*}.$$

得到 $\mathbf{G}(\mathbf{F})$ 在不动点处的Jacobian矩阵

$$\nabla \mathbf{G}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial f_1} & \frac{\partial g_1}{\partial f_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial f_1} & \frac{\partial g_2}{\partial f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_1 & 0 \\ 0 & g'_2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

由假设2知: $g'_1 > 0, g'_2 > 0$, 所以 $\nabla \mathbf{G}(\mathbf{F})$ 是正定的. 由引理1知 $\mathbf{G}(\mathbf{F})$ 是单调的. 假设动态系统(11)和(12)存在两个不动点 $\mathbf{C}^1 = \begin{pmatrix} C_1^{*1} \\ C_2^{*1} \end{pmatrix}$ 和

$\mathbf{C}^2 = \begin{pmatrix} C_1^{*2} \\ C_2^{*2} \end{pmatrix}$, 第1个不动点对应的路径流量为 $\mathbf{F}^1 = \begin{pmatrix} f_1^{*1} \\ f_2^{*1} \end{pmatrix}$, 第2个不动点对应的路径流量为 $\mathbf{F}^2 = \begin{pmatrix} f_1^{*2} \\ f_2^{*2} \end{pmatrix}$. 根据定义1得到

$$[\mathbf{G}(\mathbf{F}^1) - \mathbf{G}(\mathbf{F}^2)]^T (\mathbf{F}^1 - \mathbf{F}^2) > 0, \quad (26)$$

即

$$(g_1(f_1^{*1}) - g_1(f_1^{*2})) \cdot (f_1^{*1} - f_1^{*2}) + (g_2(f_2^{*1}) - g_2(f_2^{*2})) \cdot (f_2^{*1} - f_2^{*2}) > 0. \quad (27)$$

由(21)和(22)式知: $C_1^{*1} = g_1(f_1^{*1}), C_1^{*2} = g_1(f_1^{*2}), C_2^{*1} = g_2(f_2^{*1}), C_2^{*2} = g_2(f_2^{*2})$, 代入(27)式, 得

$$(C_1^{*1} - C_1^{*2}) \cdot (f_1^{*1} - f_1^{*2}) + (C_2^{*1} - C_2^{*2}) \cdot (f_2^{*1} - f_2^{*2}) > 0. \quad (28)$$

向量值函数 $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ 在不动点处的Jacobian矩阵

$$\nabla \mathbf{H}(\mathbf{C}) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial C_1} & \frac{\partial h_1}{\partial C_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial C_1} & \frac{\partial h_2}{\partial C_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^*p[\theta + (\beta - \theta)p] & d^*(\beta - \theta)p(1 - p) \\ d^*(\beta - \theta)p(1 - p) & d^*(1 - p)[\beta + (\theta - \beta)p] \end{pmatrix}. \quad (29)$$

注意到 $d^* > 0, \theta > 0, \beta \geq 0, p > 0$, 不难判断出: 当 $\beta = 0$ 时, $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ 的Jacobian矩阵 $\nabla \mathbf{H}(\mathbf{C})$ 是半正定的, 当 $\beta > 0$ 时, $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ 的Jacobian矩阵 $\nabla \mathbf{H}(\mathbf{C})$ 是正定的. 根据定义1和定义2得到

$$[\mathbf{H}(\mathbf{C}^1) - \mathbf{H}(\mathbf{C}^2)]^T (\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^2) \geq 0, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & (-h_1(C_1^{*1}, C_2^{*1}) + h_1(C_1^{*2}, C_2^{*2})) \cdot (C_1^{*1} - C_1^{*2}) \\ & + (-h_2(C_1^{*1}, C_2^{*1}) + h_2(C_1^{*2}, C_2^{*2})) \cdot (C_2^{*1} - C_2^{*2}) \\ & \geq 0. \end{aligned} \quad (31)$$

由(23)和(24)式知:

$$\begin{aligned} f_1^{*1} &= h_1(C_1^{*1}, C_2^{*1}), \quad f_1^{*2} = h_1(C_1^{*2}, C_2^{*2}), \\ f_2^{*1} &= h_2(C_1^{*1}, C_2^{*1}), \quad f_2^{*2} = h_2(C_1^{*2}, C_2^{*2}), \end{aligned}$$

代入(31)式得

$$\begin{aligned} & (-f_1^{*1} + f_1^{*2}) \cdot (C_1^{*1} - C_1^{*2}) \\ & + (-f_2^{*1} + f_2^{*2}) \cdot (C_2^{*1} - C_2^{*2}) \geq 0, \end{aligned} \quad (32)$$

即

$$\begin{aligned} & (C_1^{*1} - C_1^{*2}) \cdot (f_1^{*1} - f_1^{*2}) \\ & + (C_2^{*1} - C_2^{*2}) \cdot (f_2^{*1} - f_2^{*2}) \leq 0. \end{aligned} \quad (33)$$

显然, (33)和(28)式矛盾. 因此, 动态系统(11)和(12)不动点唯一. 证毕.

由(19)–(22)式可知, 不动点 C_1^*, C_2^* 对应的流量 f_1^*, f_2^* 即为弹性需求下的SUE解, 因此本文也称之为平衡点.

动态系统(11)和(12)的Jacobian矩阵为

$$\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial C_1^{(n)}}{\partial C_1^{(n-1)}} & \frac{\partial C_1^{(n)}}{\partial C_2^{(n-1)}} \\ \frac{\partial C_2^{(n)}}{\partial C_1^{(n-1)}} & \frac{\partial C_2^{(n)}}{\partial C_2^{(n-1)}} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

在平衡点处

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^* &= \phi \mathbf{E} + (1 - \phi) \cdot \nabla \mathbf{G}(\mathbf{F}) \cdot (-\nabla \mathbf{H}(\mathbf{C})) \\ &= \phi \mathbf{E} - (1 - \phi) \cdot \nabla \mathbf{G}(\mathbf{F}) \cdot \nabla \mathbf{H}(\mathbf{C}). \end{aligned} \quad (35)$$

由 (25) 和 (29) 式得

$$\mathbf{J}^* = \phi \mathbf{E} - (1 - \phi) \cdot d^* \cdot \begin{pmatrix} g'_1 p[\theta + (\beta - \theta)p] & g'_1(\beta - \theta)p(1 - p) \\ g'_2(\beta - \theta)p(1 - p) & g'_2(1 - p)[\beta + (\theta - \beta)p] \end{pmatrix}. \quad (36)$$

令

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} g'_1 p[\theta + (\beta - \theta)p] & g'_1(\beta - \theta)p(1 - p) \\ g'_2(\beta - \theta)p(1 - p) & g'_2(1 - p)[\beta + (\theta - \beta)p] \end{pmatrix}. \quad (37)$$

易知: 矩阵 $\mathbf{A}$ 有两个正的特征值 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\mathbf{J}^*$ 的特征值 $\lambda_{\mathbf{J}} = \phi - (1 - \phi)d^* \lambda_{1,2}$. 由于 $0 \leq \phi < 1$, $d^* > 0$, 所以 $\lambda_{\mathbf{J}} < 1$ 恒成立, 根据非线性动力学稳定性理论^[48], 当离散型动力系统平衡点 Jacobian 矩阵的所有特征值的模小于 1 时平衡点渐近稳定, 不难得到定理 2.

定理 2 弹性需求下两条路径的简单路网逐日动态分配系统平衡点渐近稳定的条件是

$$\phi - (1 - \phi)d^* \lambda_{1,2} > -1. \quad (38)$$

判定条件 (38) 式还可以变形为 $\phi > \frac{d^* \lambda_{1,2} - 1}{d^* \lambda_{1,2} + 1}$, 说明在一定条件下, 平衡点渐近稳定要求出行者对信息的依赖程度不能太大. 特殊地, 当 $\beta = 0$, 由 (15) 式可知, 每天的需求 $d^{(n)} = d_0$ 将不变, 此时弹性需求退化成为固定需求, 矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \theta p(1 - p)(g'_1 + g'_2)$, 稳定性条件 (38) 式变为

$$\phi - (1 - \phi)d_0 \theta p(1 - p)(g'_1 + g'_2) > -1. \quad (39)$$

不难验证 (39) 式和文献 [1] 的稳定性条件一致. 判定条件 (38) 式更具有一般性.

注意到 $\lambda_{1,2}$, d^* 与 ϕ 无关. 因此, 不难得到推论 1.

推论 1 若 $d^* \lambda_{1,2} < 1$, 不论参数 ϕ 取 $[0, 1)$ 内任何值, 弹性需求下两条路径的简单路网交通流逐日动态演化系统平衡点渐近稳定.

推论 1 表明只要交通系统满足一定条件, 不论出行者对信息的依赖程度多大, 路网交通流逐日动态演化系统的平衡点渐近稳定.

3.2 演化状态划分

由定理 2 可知, 当 (38) 式不满足时, 网络交通流逐日动态演化出现不稳定情况, 根据非线性动

力学理论, 演化结果将出现周期运动 (分岔) 或者混沌.

根据混沌理论, 当动态系统的 Lyapunov 指数大于 0 时, 系统才出现混沌. 动态系统 (11) 和 (12) 有 2 个 Lyapunov 指数^[48]:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\text{eig}(\mathbf{J}_{n-1}, \mathbf{J}_{n-2}, \dots, \mathbf{J}_0)|, \quad (40)$$

式中, $\text{eig}(\mathbf{J}_{n-1}, \mathbf{J}_{n-2}, \dots, \mathbf{J}_0)$ 表示 $\mathbf{J}_{n-1} \mathbf{J}_{n-2} \dots \mathbf{J}_0$ 的特征值.

由此得到动态系统 (11) 和 (12) 的最大 Lyapunov 指数为

$$L = \max(L_1, L_2). \quad (41)$$

因此, 动态系统 (11) 和 (12) 演化到稳定的平衡点、周期运动 (分岔) 和混沌 3 种状态的条件如表 1.

表 1 系统逐日动态演化的状态划分
Table 1. The state of day-to-day dynamical evolution.

演化的最终状态	判别条件
稳定且收敛于平衡点	$\phi > \frac{d^* \lambda_{1,2} - 1}{d^* \lambda_{1,2} + 1}$
周期运动 (分岔)	$\phi \leq \frac{d^* \lambda_{1,2} - 1}{d^* \lambda_{1,2} + 1}$ 且 $L \leq 0$
混沌运动	$L > 0$

通过以上分析可知, 弹性需求下网络交通流动态演化系统的平衡点即为弹性需求下的 SUE 解, 但是平衡点在一定条件才稳定 (定理 2), 否则会发生周期运动或混沌运动 (表 1). 下面通过数值实验, 来讨论参数 θ (表征出行者路径选择时对路径费用的敏感程度)、 ϕ (表征出行者对前一天实际费用的依赖程度)、 β (表征出行者的出行需求对费用的敏感性) 对网络交通流动态演化的影响. 注意到 $\theta \in (0, +\infty)$, $\phi \in [0, 1)$, $\beta \in [0, +\infty)$.

4 数值实验

如图 1, 路网的参数设定同文献 [1]. 路径的行程时间关于流量的函数采用 BPR (US Bureau of Public Roads) 函数

$$t = t_0[1 + 0.15(f/Q)^4], \quad (42)$$

式中 t 为路径的行程时间, t_0 为路径的自由流行程时间, f 为路径流量, Q 为通行能力. 设路径 1 和

路径2的自由流行程时间分别为 $t_{10} = 22$ min 和 $t_{20} = 25$ min, 通行能力分别为 $Q_1 = 1500$ 辆/h 和 $Q_2 = 2000$ 辆/h; 潜在的最大OD需求 $d_0 = 1500$ 辆/h; 出行费用只考虑出行时间.

4.1 稳定的临界曲线

根据推论1, 当 $\theta = 0.923$ 时, $\beta = 0$ 是稳定临界点, 通过不同参数组合的数值实验绘制出系统稳定时 β - θ 的临界曲线, 如图2所示. 由图2可知, β 的临界值随 θ 的变化分4个阶段: 1) 当 $\theta \leq 0.923$ 时, β 的临界值不变(等于0), 也即无论 β 取 $[0, +\infty)$ 的任何值、 ϕ 取 $[0, 1)$ 的任何值, 系统演化都稳定且收敛到平衡点; 2) 当 $0.923 < \theta \leq 2.293$ 时, 稳定临界点 β 随 θ 增大而增大, 当 $\theta = 2.293$ 时, β 达到极大值 0.00384; 如当 $\theta = 1.500$ 时, $\beta = 0.0032$ 是稳定临界点, 说明, 当 $\theta = 1.500$ 时, 不论 β 取 $[0.0032, +\infty)$ 的任何值、 ϕ 取 $[0, 1)$ 的任何值, 系统演化都稳定且收敛到平衡点; 3) 当 $2.293 < \theta \leq 28.564$ 时, 稳定临界点 β 随 θ 的增大而减小, 当 $\theta = 28.564$ 时, β 达到极小值 0.00154; 4) 当 $\theta > 28.564$ 时, 稳定临界点 β 随 θ 的增大而增大.

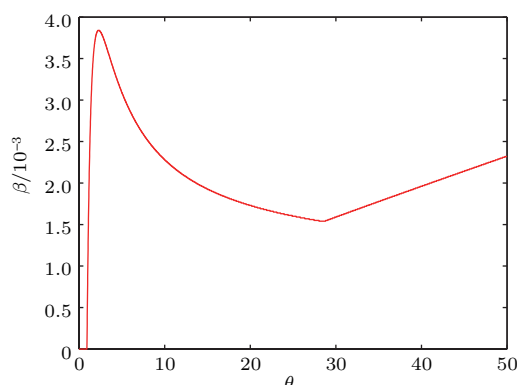


图2 系统稳定时 β - θ 的临界曲线

Fig. 2. The critical curve of β - θ when the system is stable.

总之, 参数 β 和 θ 取曲线上方的点时, 不论 ϕ 取 $[0, 1)$ 的任何值, 系统演化都稳定且收敛到平衡点, 参数 β 和 θ 取曲线下方的点时, 系统的演化状态与 ϕ 的取值有关, 可能出现分岔或混沌.

4.2 固定 β , 讨论 θ 和 ϕ 不同时系统的演化

情况1 $0 \leq \beta < 0.00155$

以 $\beta = 0.0002$ 为例, 由图2的临界曲线可知, 当 $\theta < 0.940$ 时, 系统稳定. 根据表1的判别条件,

经过多次数值实验发现: 当 $\theta > 0.940$ 时, 系统出现分岔; 当 $\theta > 7.295$ 时, 系统出现混沌. 图3是 $\beta = 0.0002$, θ 取不同值时路径1的流量关于参数 ϕ 的分岔图.

由图2可见, 当 $\beta = 0.0002$, $\theta = 0.5$ 时, 系统演化是稳定的. 由图3(b)和图3(c)可见, 当 $\beta = 0.0002$, $\theta = 6$ 或 7 时, 随着 ϕ 从大到小变化, 系统演化出现稳定-倍周期分岔-半周期逆分岔的过程, 最后 $\phi = 0$ 是2周期运动, 在文献[1]和其他非线性动力学模型中也可以看到类似的现象[1,49-51]. 由图3(d)-(h)可见: 随着 ϕ 从大到小变化, 系统演化出现稳定-倍周期分岔-混沌-半周期逆分岔的变化过程, 最后 $\phi = 0$ 是2周期运动; 从纵轴方向看, 在混沌区域中, 中间有一些周期3、周期5等奇数周期窗口; 从横轴方向看, 奇数周期窗口越来越宽, 将混沌区域分割成多个带, 当 $\theta = 8.5$ 时, 混沌带可以近似看成1片区域(奇数周期窗口很窄), 当 $\theta = 16$ 时, 周期3窗口变得很宽, 混沌区域分成了两个带, 当 $\theta = 22$ 时, 混沌区域分成了3个带, 当 $\theta = 33$ 时, 混沌区域分成了4个带, 当 $\theta = 40$ 时, 混沌区域分成了5个带(最左边的混沌带很窄).

当 $\beta = 0$ 时, 第 n 天的需求 $d^{(n)} = d_0$, 弹性需求退化成固定需求情形, 文献[1]的研究表明, 固定需求下, 当 $\theta < 0.923$ 时, 系统稳定, 当 $\theta > 0.923$ 时, 系统出现周期运动, 当 $\theta > 6.983$ 时, 系统出现混沌现象(更详细的讨论见文献[1]). 对比发现, $\beta = 0.0002$ 时, 随 θ 的增大, 流量演化关于 ϕ 的分岔图的规律与 $\beta = 0$ 相似.

根据表1系统逐日动态演化状态划分方法, 通过数值实验, 绘制出 $\beta = 0.0002$ 时系统关于参数 θ 和 ϕ 的状态划分图, 如图4所示.

从图4可以看到 $\beta = 0.0002$ 的稳定区域在上方, 不稳定区域在下方, 混沌区域可以大致分为3个带, 其他的是周期运动区域, 混沌区域中夹着一些周期运动点. 并且由定理2知: 稳定区域和不稳定区域的分界线就是 $\beta = 0.0002$ 时曲线 $\phi = \frac{d^* \lambda_{1,2} - 1}{d^* \lambda_{1,2} + 1}$ (d^* , $\lambda_{1,2}$ 与参数 β 和 θ 有关). 图5是 $\beta = 0.0007$, 0.0012 时系统关于参数 θ 和 ϕ 的状态划分图, 可以发现, 图5(a)和图5(b)状态的区域与图4相似.

从图4和图5可以发现, 随着 β 的增大, 稳定区域面积越来越大, 不稳定区域面积越来越小, 特别

是混沌区域面积越来越小, 这说明 β 对系统演化的稳定性有“正”作用, 从图2的稳定临界曲线也可以

看到, 当 $\beta > 0.00384$ 时, 不论参数 θ 取 $(0, +\infty)$, ϕ 取 $[0, 1)$ 内任何值, 系统演化都是稳定的.

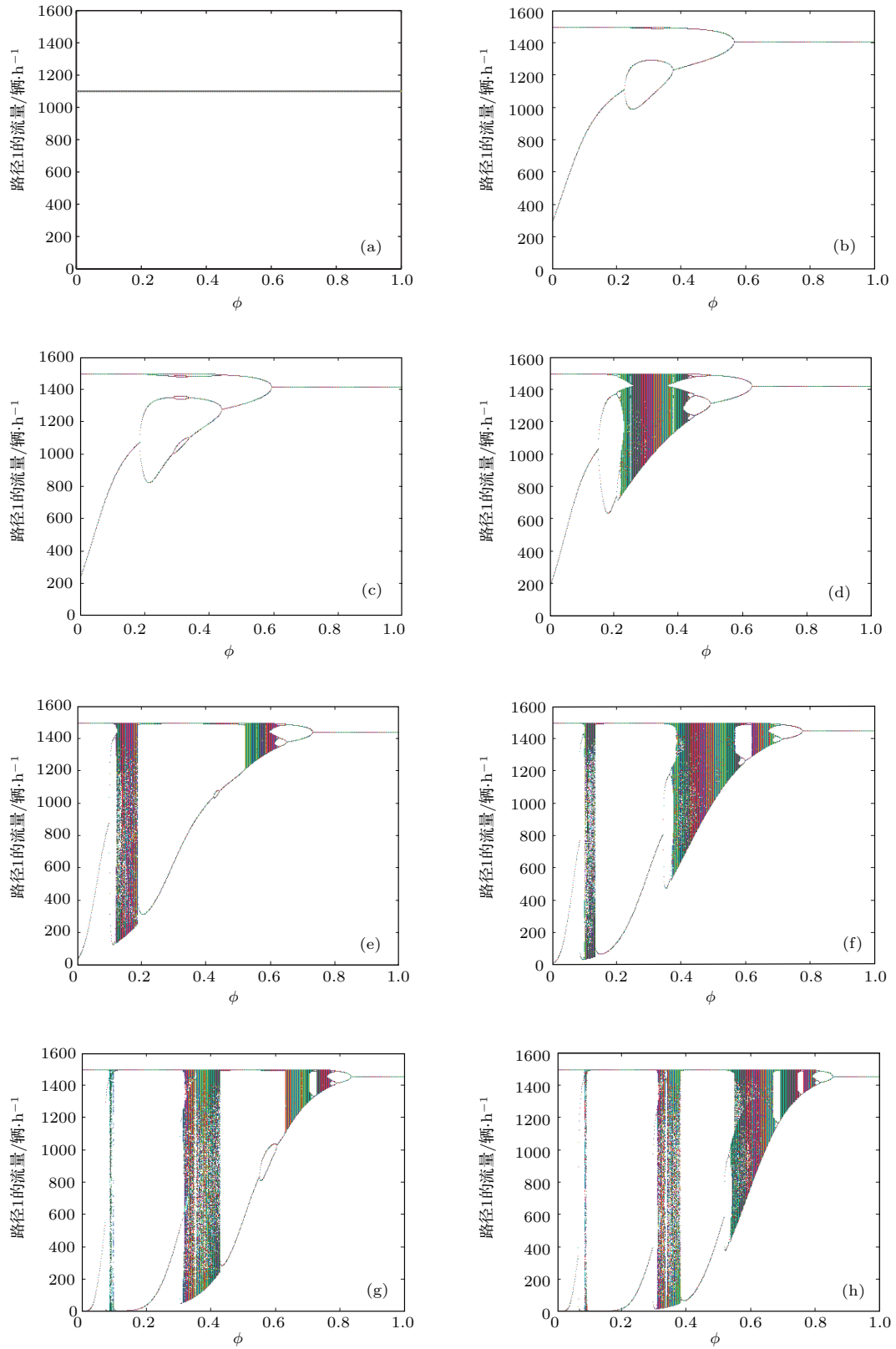


图3 (网刊彩色) $\beta = 0.0002$, θ 取不同值时流量关于 ϕ 变化的分岔图 (a) $\theta = 0.5$; (b) $\theta = 6$; (c) $\theta = 7$; (d) $\theta = 8.5$; (e) $\theta = 16$; (f) $\theta = 22$; (g) $\theta = 34$; (h) $\theta = 40$

Fig. 3. (color online) Flow bifurcation diagrams with ϕ when $\beta = 0.0002$ and θ is different: (a) $\theta = 0.5$; (b) $\theta = 6$; (c) $\theta = 7$; (d) $\theta = 8.5$; (e) $\theta = 16$; (f) $\theta = 22$; (g) $\theta = 34$; (h) $\theta = 40$.

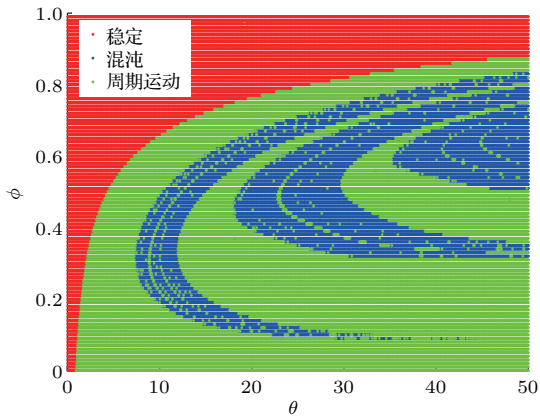


图4 (网刊彩色) $\beta = 0.0002$ 时系统关于 θ 和 ϕ 的状态划分图

Fig. 4. (color online) The system's state with θ and ϕ when $\beta = 0.0002$.

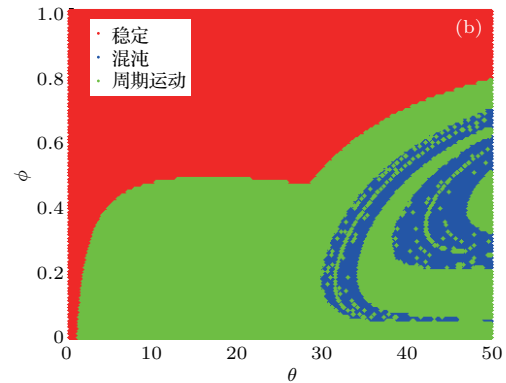
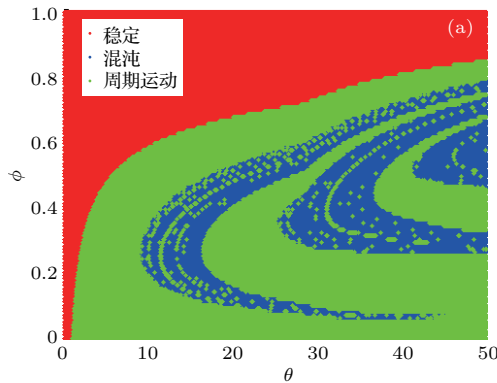


图5 (网刊彩色) $\beta = 0.0007$ 和 0.0012 时系统关于 θ 和 ϕ 的状态划分图 (a) $\beta = 0.0007$; (b) $\beta = 0.0012$

Fig. 5. (color online) The system's state with θ and ϕ when $\beta = 0.0007$ and 0.0012 : (a) $\beta = 0.0007$; (b) $\beta = 0.0012$.

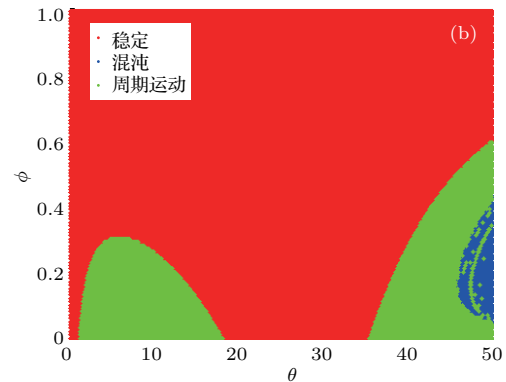
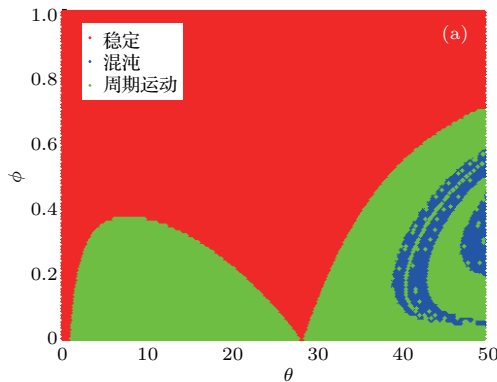


图6 (网刊彩色) $\beta = 0.00155$ 和 0.0018 时系统关于 θ 和 ϕ 的状态划分图 (a) $\beta = 0.00155$; (b) $\beta = 0.0018$

Fig. 6. (color online) The system's state with θ and ϕ when $\beta = 0.00155$ and 0.0018 : (a) $\beta = 0.00155$; (b) $\beta = 0.0018$.

由图7(b)和图7(c)可以看到, 当 $\beta = 0.00155$ 时, 在图6(a)中 $\theta < 28.352$ 的左半不稳定区域, 对于固定的 θ , 流量随 ϕ 变化的分岔图是相似的, 流量演化随 ϕ 从大到小变化, 呈现稳定-2周期分岔过

情况2 $0.00155 \leq \beta < 0.00233$

图6是 $\beta = 0.00155, 0.0018$ 时系统关于参数 θ 和 ϕ 的状态划分图.

从图6可见, 当 $\beta \geq 0.00155$ 时, 不稳定区域分开为两部分, 以图6(a)为例, 左边部分 ($\theta < 28.352$) 是周期运动区域, 右边部分 ($\theta > 28.352$) 周期运动和混沌并存. 同时, 还可以看到, 随着 β 的增大, 稳定区域的面积越来越大, 不稳定区域面积越来越小. 以 $\beta = 0.00155$ 为例, 由图2的临界曲线可知, 当 $\theta < 1.096$ 时, 系统稳定. 根据表1的判别条件, 经过多次数值实验发现: 当 $\theta > 38.494$ 系统出现混沌. 取 $\theta = 0.5, 8.5, 16, 35, 38, 42, 45, 50$ 绘制出路径1的流量关于参数 ϕ 的分岔图, 如图7所示.

程, 也即, 系统只有两种状态: 稳定状态和2周期运动状态. 由图7(d)—(h)可以看到: 当 $\beta = 0.00155$ 时, 在 $\theta > 28.352$ 的右半不稳定区域, 流量演化关于 ϕ 的分岔图的规律和 $\beta = 0.0002$ 的情况类似; 当

$28.352 < \theta < 38.494$ 时, 流量演化随着 ϕ 从大到小变化, 呈现出稳定-倍周期分岔-半周期逆分岔的变化过程, 最后 $\phi = 0$ 是 2 周期运动; 当 $\theta > 38.494$

时, 流量演化随着 ϕ 从大到小变化, 呈现出稳定-倍周期分岔-混沌-半周期逆分岔的变化过程, 最后 $\phi = 0$ 是 2 周期运动.

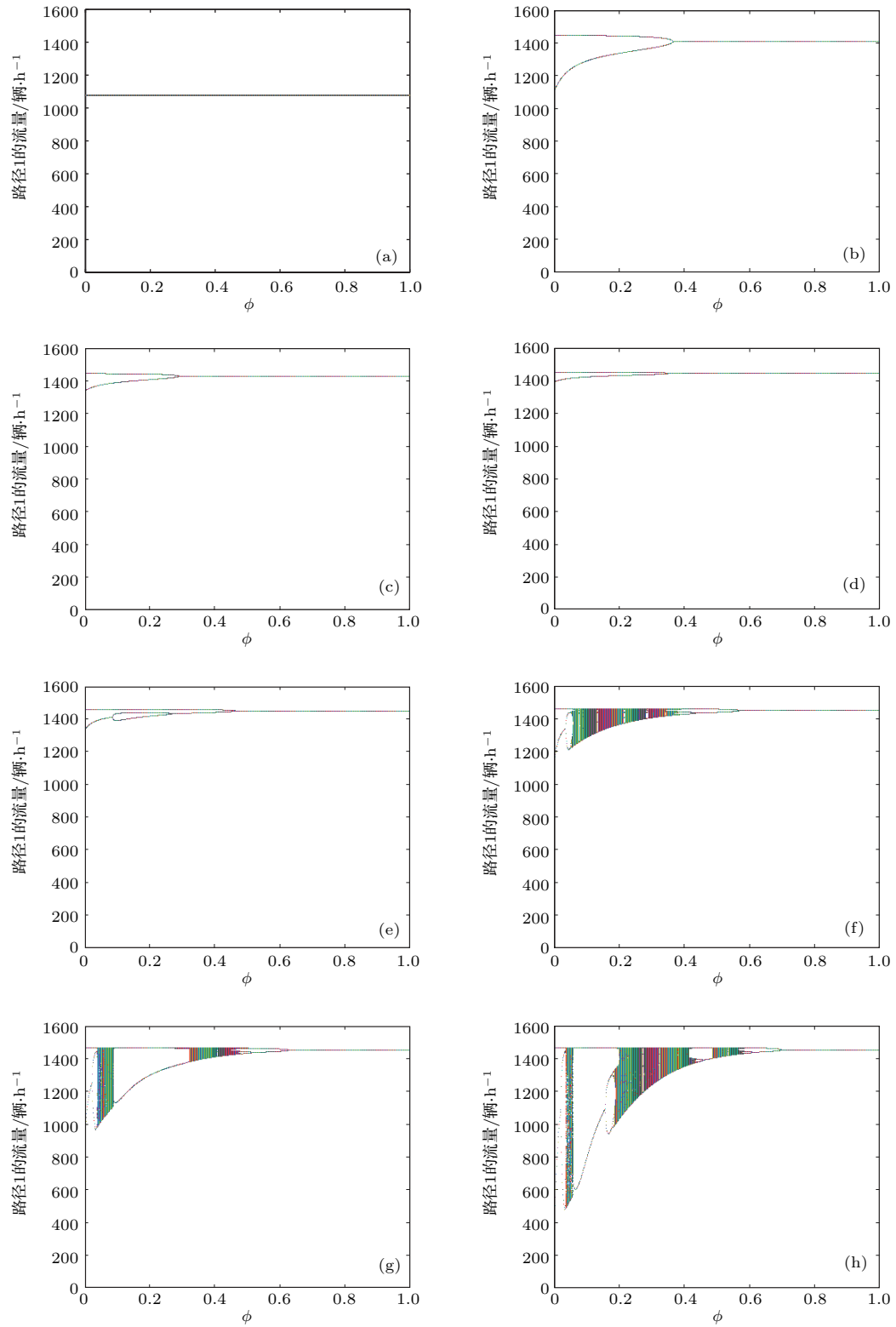


图7 (网刊彩色) $\beta = 0.00155$, θ 取不同值时流量关于 ϕ 的变化分岔图 (a) $\theta = 0.5$; (b) $\theta = 8.5$; (c) $\theta = 16$; (d) $\theta = 35$; (e) $\theta = 38$; (f) $\theta = 42$; (g) $\theta = 45$; (h) $\theta = 50$

Fig. 7. (color online) Flow bifurcation diagram with ϕ when $\beta = 0.00155$ and θ is different: (a) $\theta = 0.5$; (b) $\theta = 8.5$; (c) $\theta = 16$; (d) $\theta = 35$; (e) $\theta = 38$; (f) $\theta = 42$; (g) $\theta = 45$; (h) $\theta = 50$.

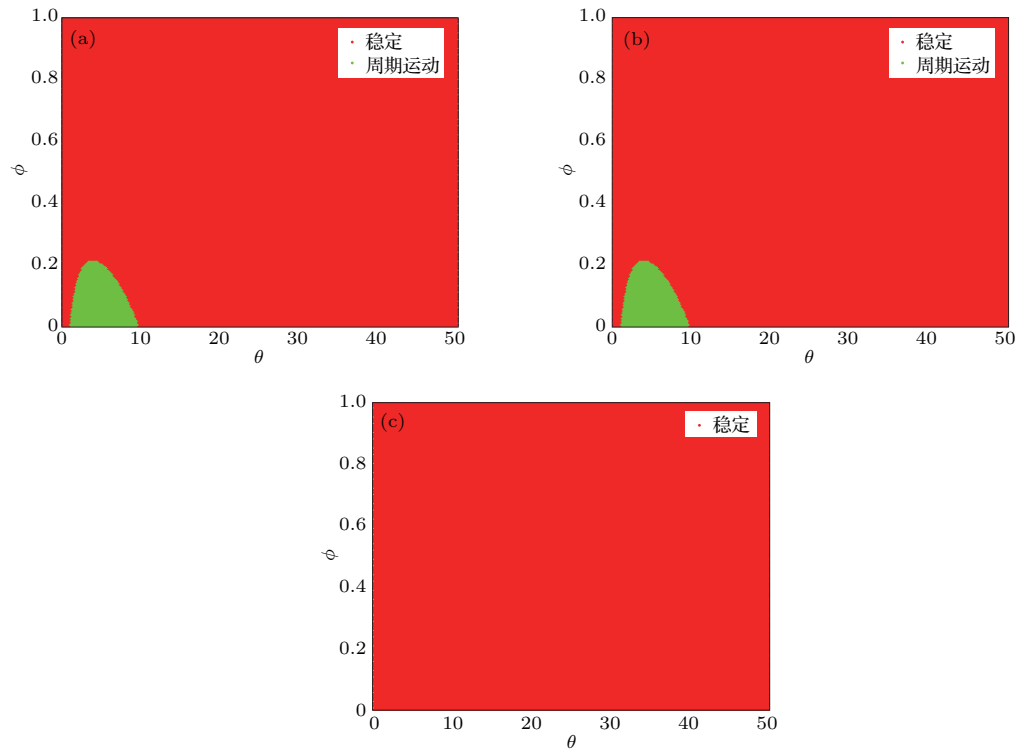


图8 (网刊彩色) $\beta = 0.00233, 0.0032$ 和 0.004 时系统关于 θ 和 ϕ 的状态划分图 (a) $\beta = 0.00233$; (b) $\beta = 0.0032$; (c) $\beta = 0.004$

Fig. 8. (color online) The system's state with θ and ϕ when $\beta = 0.00233, 0.0032, 0.004$: (a) $\beta = 0.00233$; (b) $\beta = 0.0032$; (c) $\beta = 0.004$.

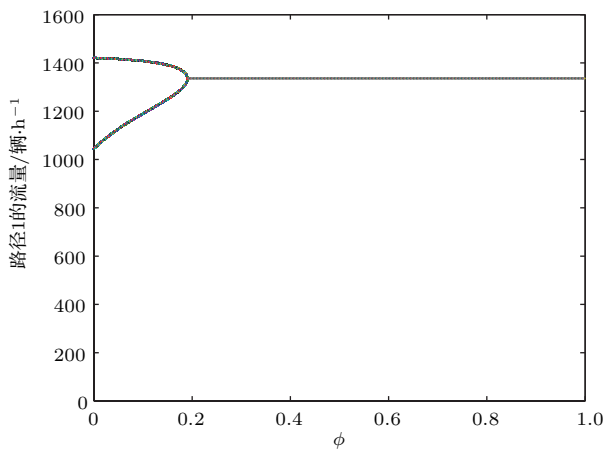


图9 $\beta = 0.00233, \theta = 3$ 时流量关于 ϕ 的变化分岔图

Fig. 9. (color online) Flow bifurcation diagram with ϕ when $\beta = 0.00233$ and $\theta = 3$.

情况3 $\beta \geq 0.00233$

图8是 $\beta = 0.00233, 0.0032, 0.004$ 时系统关于参数 θ 和 ϕ 的状态划分图. 图9是 $\beta = 0.00233, \theta = 3$ 时, 流量关于 ϕ 的变化分岔图.

对比图6(a)和图6(b)以及图8(a)和图8(b), 可以发现, 当 $\beta \geq 0.00233$ 时, 系统不稳定的右半部分区域消失, 此时混沌现象也消失, 从图9还

可以看到, 系统不稳定的状态是2周期运动. 从图8(a)—(c)可以看到, 随着 β 的增大, 周期运动区域面积逐渐减小, 最后完全是稳定状态, 通过多次数值实验得到, 当 $\beta \geq 0.00384$ 时, 系统完全是稳定状态, 也即, 当 $\beta \geq 0.00384$ 时, 不论 θ 取 $(0, +\infty)$ 内任何值、 ϕ 取 $[0, 1)$ 内任何值, 系统演化都稳定, 这一结论也可以从图2的系统稳定时 β - θ 的临界曲线得出.

4.3 固定 θ , 讨论 β 和 ϕ 不同时系统的演化

图10是 $\theta = 0.5, 3, 9, 25$ 时系统关于参数 β 和 ϕ 的状态划分图.

从图10可见, 当 θ 较小时, 系统都是稳定的, 随着 θ 的增大, 先出现周期运动, 后出现混沌现象. 经过多次数值实验发现: 当 $\theta \leq 0.923$ 时, 系统演化稳定, 即当 $\theta \leq 0.923$ 时, 无论 β 取 $[0, +\infty)$ 的任何值、 ϕ 取 $[0, 1)$ 的任何值, 系统演化都稳定且收敛到平衡点; 当 $0.923 < \theta \leq 6.983$ 时, 系统出现周期运动; 当 $\theta > 6.983$ 时, 系统出现混沌. 注意到, 系统出现分岔和混沌的 θ 的临界值和 $\beta = 0$ 时是一致的^[1].

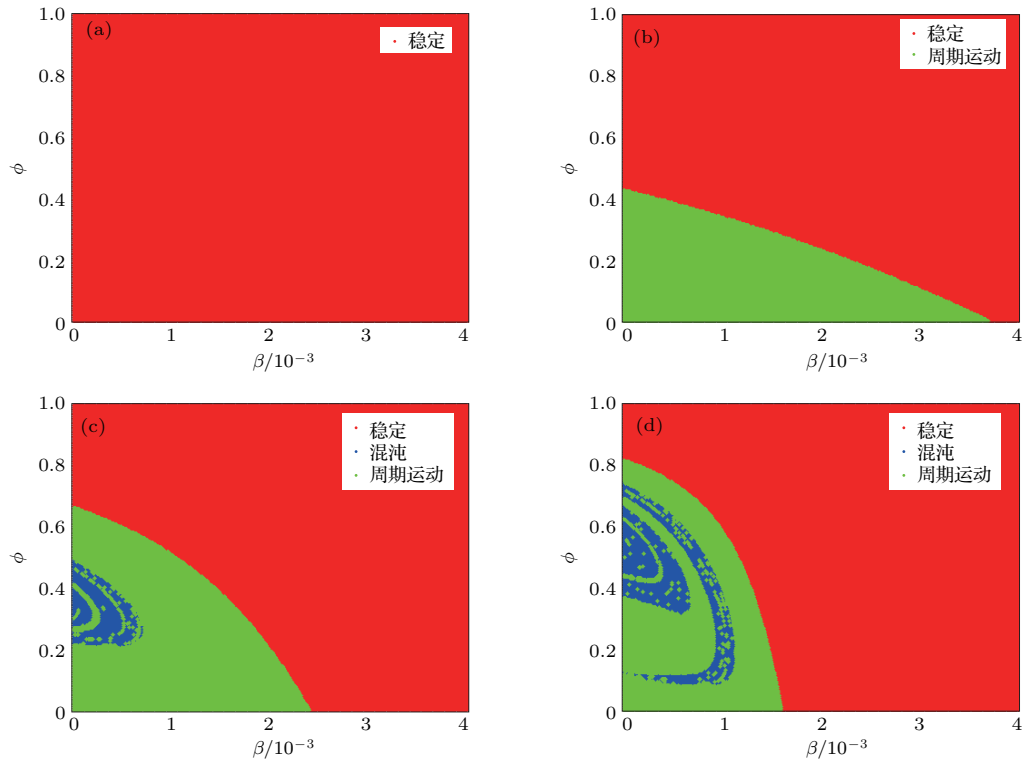


图 10 (网刊彩色) θ 取不同值时系统关于 β 和 ϕ 的状态划分图 (a) $\theta = 0.5$; (b) $\theta = 3$; (c) $\theta = 9$; (d) $\theta = 25$

Fig. 10. (color online) The system's state with β and ϕ when θ is different: (a) $\theta = 0.5$; (b) $\theta = 3$; (c) $\theta = 9$; (d) $\theta = 25$.

4.4 固定 ϕ , 讨论 β 和 θ 不同时系统的演化

图 11 是 $\phi = 0, 0.05, 0.3, 0.8, 0.86, 0.9$ 时系统关于参数 β 和 θ 的状态划分图。

从图 11 可以看出, 当 ϕ 较小时, 系统演化稳定或者周期运动; 当 ϕ 比较大时, 系统演化稳定; 当 ϕ 取中间值时, 系统演化有稳定、周期运动和混沌状态。经过多次数值实验发现: 当 $\phi \leq 0.036$ 时, 系统是稳定的或周期运动的; 当 $0.036 < \phi < 0.85$ 时, 系统是稳定、周期运动或者混沌状态; 当 $0.85 \leq \phi < 0.89$ 时, 系统演化是稳定的或周期运动的; 当 $0.89 \leq \phi < 1$ 时, 系统演化是稳定的。同时, 从图 11 还可以发现, 随着 ϕ 的增大, 稳定区域的面积越来越大, 不稳定区域的面积越来越小, 直到 $\phi = 0.89$ 时整个区域都是稳定的。

4.5 系统演化规律

根据以上的分析可知, 参数 θ (表征出行者路径选择时对路径的费用敏感程度), ϕ (表征出行者对前一天实际费用的依赖程度), β (表征出行者的出行需求对费用的敏感程度) 对网络交通流的逐日动

态演化都有影响。

1) 临界曲线特征

若对任意的 $\phi \in [0, 1)$ 动态系统演化都稳定, 那么临界曲线 β 随 θ 的变化为: 当 $\theta \leq 0.923$ 时, β 的临界值不变 (等于 0); 当 $\theta > 0.923$ 时, β 先增大后减小, 然后又增大, β 出现极大值点 0.00384 (当 $\theta = 2.293$ 时) 和极小值点 0.00154 (当 $\theta = 28.564$ 时)。

2) 参数 β 对系统演化的影响

① 当 $0 \leq \beta < 0.00155$ 时, 对于固定的 β , 随 θ 的增大, 系统演化关于 ϕ 的分岔图的规律与 $\beta = 0$ 相似。即 θ 较小时, 系统稳定; θ 取中间值时, 系统随着 ϕ 从大到小变化出现稳定-倍周期分岔-半周期逆分岔的过程, 最后 $\phi = 0$ 是 2 周期运动; θ 较大时, 系统随着 ϕ 从大到小变化出现稳定-倍周期分岔-混沌-半周期逆分岔的变化过程, 最后 $\phi = 0$ 是 2 周期运动。

② 当 $0.00155 \leq \beta < 0.00233$ 时, 对于固定的 β , 系统关于参数 θ 和 ϕ 的状态的划分图的不稳定区域分开为左右两部分: 左边是 2 周期运动区域, 右边周期运动和混沌并存。

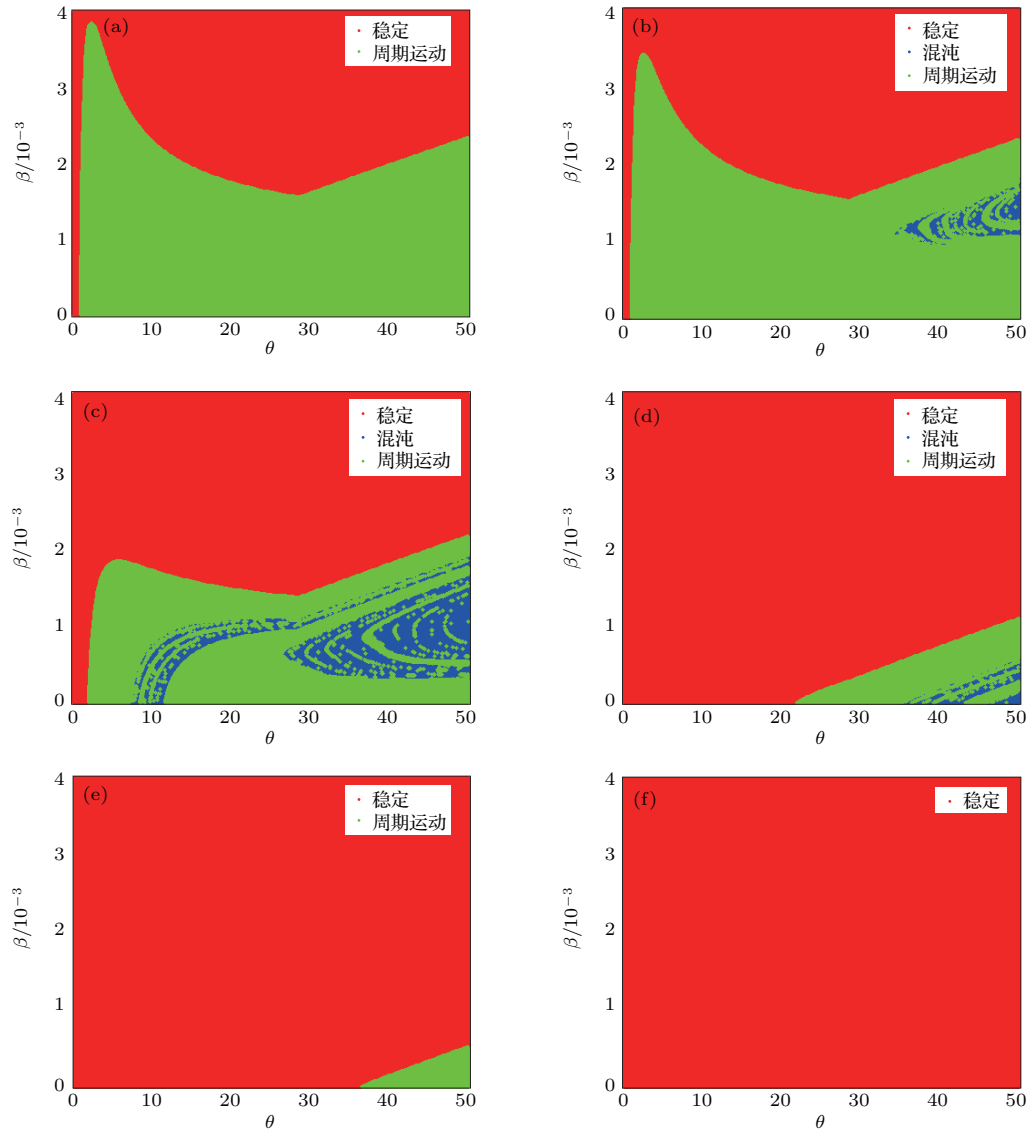


图 11 (网刊彩色) ϕ 取不同值时系统关于 β 和 θ 的状态划分图 (a) $\phi = 0$; (b) $\phi = 0.05$; (c) $\phi = 0.3$; (d) $\phi = 0.8$; (e) $\phi = 0.86$; (f) $\phi = 0.9$

Fig. 11. (color online) The system's state with β and θ when ϕ is different: (a) $\phi = 0$; (b) $\phi = 0.05$; (c) $\phi = 0.3$; (d) $\phi = 0.8$; (e) $\phi = 0.86$; (f) $\phi = 0.9$

③当 $0.00233 \leq \beta < 0.00384$ 时, 对于固定的 β , 系统关于参数 θ 和 ϕ 的状态的划分图的不稳定区域只有一个区域, 并且不稳定状态是 2 周期运动状态.

④当 $\beta \geq 0.00384$ 时, 系统完全是稳定状态 (与参数 θ 和 ϕ 无关).

⑤随着 β 的增大, 系统关于参数 θ 和 ϕ 的状态的划分图的稳定区域面积越来越大, 最后当 $\beta \geq 0.00384$ 时, 系统完全是稳定状态.

3) 参数 θ 对系统演化的影响

当 $\theta \leq 0.923$ 时, 系统演化稳定 (与参数 β 和 ϕ 无关); 当 $0.923 < \theta \leq 6.983$ 时, 系统出现周期运动; 当 $\theta > 6.983$ 时, 系统出现混沌.

4) 参数 ϕ 对系统演化的影响

①当 $0.89 \leq \phi < 1$ 时, 系统演化是稳定的; 当 $\phi \leq 0.036$ 或 $0.85 \leq \phi < 0.89$ 时, 系统是稳定的或周期运动的, 当 $0.036 < \phi < 0.85$ 时, 系统是稳定、周期运动或者混沌状态.

②随着 ϕ 的增大, 系统关于参数 β 和 θ 的状态划分图的稳定区域的面积越来越大, 直到 $\phi = 0.89$ 时整个区域都是稳定的.

5 结 论

本文假设交通需求是弹性的, 以两条平行路径的简单路网为例, 建立了逐日动态交通流演化模型 (固定需求是 $\beta = 0$ 时的特殊情形), 在数值实验中,

通过改变与出行者特性有关的参数 β , θ 和 ϕ 的取值, 分析系统的演化规律. 研究结论如下.

1) 弹性需求动态系统的不动点存在且唯一(定理1), 平衡点渐近稳定需要满足一定的条件(定理2).

2) 若对任意的 $\phi \in [0, 1)$ 动态系统演化都稳定, 那么临界曲线 β 随 θ 的变化为: 当 $\theta \leq 0.923$ 时, β 的临界值等于0; 当 $\theta > 0.923$ 时, β 先增大后减小, 然后又增大.

3) 系统演化随参数 β , θ 和 ϕ 的变化呈现复杂的特征, 有稳定、分岔和混沌现象. 总体上, 参数 β 对系统的稳定性有“正”作用, 即出行者的出行需求对费用越敏感, 系统演化反而越可能稳定, 当 $\beta \geq 0.00384$ 时, 系统完全是稳定状态; 参数 θ 对系统的稳定性有“负”作用, 即出行者路径选择时对路径的费用越敏感, 系统演化越不可能稳定, 换言之, 出行者路径选择的随机性越小, 系统演化越不可能稳定; 参数 ϕ 对系统的稳定性有“正”作用, 即出行者对前一天实际费用的依赖程度越小, 系统演化越可能稳定.

注意到参数 β 反映的是出行者的出行意愿(是否出行), β 越大, 出行者的出行需求对费用越敏感, 出行者越不愿意出行, 总的出行者数量就越小, 系统越有可能稳定. 参数 θ 反映的是出行者一旦出行了, 他在选择路径时路径的费用的影响程度(如何出行), θ 越大, 出行者路径选择时对路径的费用越敏感, 出行者路径选择的随机性越小, 出行者越倾向于选择最短路径, 而不是分散地选择所有路径, 系统越不可能稳定. 因此, 微观个体出行者在做是否出行和如何选择路径决策时, 路径的费用的敏感性对网络交通流演化的影响效果不同.

需要说明的是, 本文的结论只在两条路径的简单网络中才成立, 对于现实中的复杂网络, 可以参考本文的研究方法, 分析网络交通流逐日动态演化规律. 对于更复杂的交通网络, 其网络交通流动态演化模型是高维的非线性动力学模型, 但是分岔和混沌现象也应该存在, 只不过这时的非线性现象可能更加复杂, 如可能会出现多个分岔和混沌的临界点, 甚至在一定条件下还可能出现超混沌现象.

参考文献

- [1] Liu S X, Guan H Z, Yan H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 090506 (in Chinese) [刘诗序, 关宏志, 严海 2012 物理学报 **61** 090506]
- [2] Sheffi Y 1985 *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods* (Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.) pp59–61, 309
- [3] Kim H, Oh J S, Jayakrishnan R 2009 *KSCE J. Civil Engineer.* **13** 117
- [4] Nakayama S, Kitamura R, Fujii S 1999 *Transp. Res. Rec.* **1676** 30
- [5] Klügl F, Bazzan A L C 2004 *J. Artificial Societies and Social Simulation* **7** 1
- [6] Wei F F, Ma S F, Jia N 2014 *Math. Probl. Eng.* **204** 1
- [7] Kusakabe T, Nakano Y 2015 *Transp. Res. C* **59** 278
- [8] Liu T L, Huang H J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6321 (in Chinese) [刘天亮, 黄海军 2007 物理学报 **56** 6321]
- [9] Liu S X, Guan H Z 2013 *China Civil Eng. J.* **46** 136 (in Chinese) [刘诗序, 关宏志 2013 土木工程学报 **46** 136]
- [10] Iida Y, Akiyama T, Uchida T 1992 *Transp. Res. B* **26** 17
- [11] Selten R, Chmura T, Pitz T, Kubec S, Schreckenberg M 2007 *Game Econ. Behav.* **58** 394
- [12] Rapoport A, Gisches E J, Daniel T 2014 *Transp. Res. B* **68** 154
- [13] Smith M J 1984 *Transp. Sci.* **18** 245
- [14] Smith M J, Watling D P 2016 *Transp. Res. B* **85** 132
- [15] Nagurney A, Zhang D 1997 *Transp. Sci.* **31** 147
- [16] Watling D 1999 *Transp. Res. B* **33** 281
- [17] Cho H J, Hwang M C 2005 *Math. Comput. Model.* **41** 501
- [18] Kumar A, Peeta S 2015 *Transp. Res. B* **80** 235
- [19] Tan Z, Yang H, Guo R Y 2015 *Transp. Res. C* **61** 87
- [20] Di X, Liu H X, Ban X X, Yu J W 2015 *Netw. Spat. Econ.* **15** 537
- [21] He X Z, Peeta S 2016 *Transp. Res. B* **84** 237
- [22] Iryo T 2016 *Transp. Res. B* **92** 88
- [23] Xiao F, Yang H, Ye H B 2016 *Transp. Res. B* **86** 86
- [24] Guo R Y, Huang H J 2008 *J. Manag. Sci. in China* **11** 12 (in Chinese) [郭仁拥, 黄海军 2008 管理科学学报 **11** 12]
- [25] Guo R Y, Yang H, Huang H J, Tan Z J 2015 *Transp. Res. B* **71** 248
- [26] Zhang B, Juan Z C, Ni A N 2014 *J. Ind. Eng. Eng. Manag.* **28** 164
- [27] Horowitz J L 1984 *Transp. Res. B* **18** 13
- [28] Cascetta E, Cantarella G E 1991 *Transp. Res. A* **25** 277
- [29] Cantarella G E, Cascetta E 1995 *Transp. Sci.* **29** 305
- [30] Cantarella G E 2013 *Transp. Res. C* **29** 117
- [31] Watling D, Hazelton M L 2003 *Netw. Spat. Econ.* **3** 349
- [32] Bie J, Lo H K 2010 *Transp. Res. B* **44** 90
- [33] He X, Liu H X 2012 *Transp. Res. B* **46** 50
- [34] Han L, Du L 2012 *Transp. Res. B* **46** 72
- [35] Zhao X, Orosz G 2014 *Physica D* **275** 54
- [36] Di X, Liu H X 2016 *Transp. Res. B* **85** 142
- [37] Li T, Guan H Z, Liang K K 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 150502 (in Chinese) [李涛, 关宏志, 梁科科 2016 物理学报 **65** 150502]
- [38] Guo R Y, Yang H, Huang H J 2013 *Transp. Res. C* **34** 121
- [39] Guo R Y, Huang H J 2016 *Transp. Res. C* **71** 122

- [40] Yang W J, Guo R Y, Li Q 2015 *Syst. Eng. Theory Pract.* **35** 3192 (in Chinese) [杨文娟, 郭仁拥, 李琦 2015 系统工程理论与实践 **35** 3192]
- [41] Xu H L, Yu X L, Zhou J 2015 *J. Manag. Sci. China* **18** 39 (in Chinese) [徐红利, 于新莲, 周晶 2015 管理科学学报 **18** 39]
- [42] Cantarella G E, Watling D P 2016 *Euro. J. Transp. Logistics*. **5** 69
- [43] Dafermos S 1982 *Networks* **12** 57
- [44] Cantarella G E 1997 *Transp. Sci.* **31** 107
- [45] Yu Q, Fang D B, Du W 2014 *Eur. J. Oper. Res.* **239** 112
- [46] Zhou J 2001 *J. Syst. Engineer.* **16** 88 (in Chinese) [周晶 2001 系统工程学报 **16** 88]
- [47] Nagurney A 1999 *Network Economics: A Variational Inequality Approach* (Boston: Kluwer Academic Publishers) pp17–19
- [48] Liu Z H 2006 *Fundamentals and Applications of Chaotic Dynamic* (Beijing: Higher Education Press) pp24–29, 60–61 (in Chinese) [刘宗华 2006 混沌动力学基础及其应用 (北京: 高等教育出版社) 第 24—29, 60—61 页]
- [49] Stone L 1993 *Nature* **365** 617
- [50] Yu W B, Wei X P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3969 (in Chinese) [于万波, 魏小鹏 2006 物理学报 **55** 3969]
- [51] Peng M S 2005 *Chaos Solitons Fract.* **25** 1123

Day-to-day dynamical evolution of network traffic flow with elastic demand^{*}

Liu Shi-Xu^{1)†} Chen Wen-Si¹⁾ Chi Qi-Yuan¹⁾ Yan Hai²⁾

1) (*School of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350116, China*)

2) (*Beijing Collaborative Innovation Center for Metropolitan Transportation, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China*)

(Received 7 December 2016; revised manuscript received 28 December 2016)

Abstract

Network traffic flow is an aggregated result of a huge number of travelers' route choices, which is influenced by the travelers' choice behaviors. So day-to-day traffic flow is not static, but presents a complex and tortuous day-to-day dynamic evolution process. Studying day-to-day dynamic evolution of network traffic flow, we can not only know whether the traffic network equilibrium can be reached and how the process is achieved, but also can know what phenomenon will occur in the evolution of network traffic flow if the equilibrium is not reached. In a real traffic system, taking day as scale unit, the day-to-day network traffic demand is variable and changes with everyday's traffic network state. The travelers' route choices are also influenced by the previous day's behaviors and network state. Then, will the day-to-day network traffic flow evolution be stable? If it is unstable, when will bifurcation and chaos occur? In this paper we discuss the day-to-day dynamic evolution of network traffic flow with elastic demand in a simple two-route network. The dynamic evolution model of network traffic flow with elastic demand is formulated. Based on a nonlinear dynamic theory, the existence and uniqueness of the fixed point of dynamic evolution model are proved, and an equilibrium stability condition for the dynamic evolution of network traffic flow with elastic demand is derived. Then, the evolution of network traffic flow is investigated through numerical experiments by changing the three parameters associated with travelers, which are the sensitivity of travelers' travel demand to travel cost, the randomness of travelers' route choices, and travelers' reliance on the previous day's actual cost. Our findings are as follows. Firstly, there are three kinds of final states in the evolution of network traffic flow: stability and convergence to equilibrium, periodic motion and chaos. The final state of the network traffic flow evolution is related to the above three parameters. It is found that under certain conditions the bifurcation diagram of the network traffic flow evolution reveals a complicated phenomenon of period doubling bifurcation to chaos, and then period-halving bifurcation. Meanwhile, the chaotic region is interspersed with odd periodic windows. Moreover, the more sensitive to cost the travelers' travel demand the more likely the system evolution is to be stable. The smaller the randomness of travelers' route choices, the less likely the system evolution is to be stable. The lower the degree of travelers' reliance on the previous day's actual cost, the more likely the system evolution is to be stable.

Keywords: network traffic flow, elastic demand, dynamical evolution, chaos

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Pq, 01.75.+m

DOI: 10.7498/aps.66.060501

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51308126, 51378036, 51308018).

[†] Corresponding author. E-mail: liushixu@fzu.edu.cn