

强迫 Lorenz 系统的可预报性研究

李保生 丁瑞强 李建平 钟权加

Predictability of forced Lorenz system

Li Bao-Sheng Ding Rui-Qiang Li Jian-Ping Zhong Quan-Jia

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **66**, 060503 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.060503

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.060503>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I6>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于广义似然比判决的混沌信号重构方法

Reconstruction algorithm of chaotic signal based on generalized likelihood ratio threshold-decision

物理学报.2017, 66(4): 040503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.040503>

含三个忆阻器的六阶混沌电路研究

Research on a six-order chaotic circuit with three memristors

物理学报.2017, 66(4): 040502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.040502>

忆感器文氏电桥振荡器

Meminductive Wein-bridge chaotic oscillator

物理学报.2017, 66(2): 020502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.020502>

余维 -1 非光滑分岔下的簇发振荡及其机理

Bursting oscillations as well as the mechanism with codimension-1 non-smooth bifurcation

物理学报.2017, 66(2): 020501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.020501>

基于亥姆霍兹定理计算动力学系统的哈密顿能量函数

Calculation of Hamilton energy function of dynamical system by using Helmholtz theorem

物理学报.2016, 65(24): 240501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.240501>

# 强迫 Lorenz 系统的可预报性研究\*

李保生<sup>1)2)</sup> 丁瑞强<sup>1)3)†</sup> 李建平<sup>4)5)</sup> 钟权加<sup>1)2)</sup>

1)(中国科学院大气物理研究所, 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

2)(中国科学院大学地球科学学院, 北京 100049)

3)(成都信息工程大学, 高原大气与环境四川省重点实验室, 成都 610225)

4)(北京师范大学全球变化与地球系统科学研究院, 北京 100875)

5)(全球变化研究协同创新中心, 北京 100875)

(2016年11月11日收到; 2016年12月15日收到修改稿)

根据非线性局部 Lyapunov 指数方法, 分别以常数强迫 Lorenz 系统和准周期强迫 Lorenz 系统为例, 研究了在外强迫存在的条件下混沌系统可预报性的改变. 结果表明: 外强迫会影响混沌系统的可预报性, 两种不同类型的强迫 Lorenz 系统的可预报期限都随着外强迫的增强而增加, 但是大小相等方向相反的外强迫对系统可预报性的影响不同, 其中正值强迫比负值强迫作用下的可预报期限更长, 并且这种差异随着强度的增加而增大; 不同形式的外强迫对可预报性的影响也不同, 常数强迫的影响主要体现在误差增长的线性阶段, 准周期强迫的影响除了线性阶段还必须考虑到非线性阶段; 当强度相等的常数强迫和准周期强迫驱动 Lorenz 系统时, 常数强迫作用下的系统可预报性更高. 本文基于混沌理论模型的研究, 对于实际大气的可预报性研究具有一定的启示意义.

**关键词:** 非线性局部 Lyapunov 指数, 可预报性, 外强迫, Lorenz 系统

**PACS:** 05.45.-a, 92.60.Wc

**DOI:** 10.7498/aps.66.060503

## 1 引言

大气是一个复杂的非线性系统, 具有内在随机性<sup>[1,2]</sup>, 因此其可预报时效有一定的范围, 超出范围, 预报将失去技巧. 虽然混沌系统对初值十分敏感, 但是系统的短期行为仍是可预测的<sup>[3-7]</sup>. 大气系统存在可预报性是其固有属性, 确定和估计这种预报时效的长短, 研究误差增长和传播规律等是可预报性理论研究的主要内容, 其中定量的估计可预报时效也是一个重要课题. 当前关于可预报性的研究工作中, 丁瑞强和李建平<sup>[8-10]</sup>提出的非线性局部 Lyapunov 指数 (NLLE) 的方法, 克服了传统 Lyapunov 指数的局限, 不做任何线性近似, 考虑到

非线性项对误差增长的贡献, 而且能够定量地估计混沌系统的可预报期限, 该方法已经被应用到实际天气和气候的可预报性研究中, 并取得了很好的效果<sup>[11-18]</sup>.

在可预报性问题的研究中, 除了要考虑初值的不确定性, 外强迫的影响也很重要<sup>[19]</sup>. 大量的研究表明, 强迫项在真实大气中是不可忽视的, 例如在气候研究中常关注海表温度或海冰对环流的强迫作用<sup>[20-22]</sup>, 尤其是准周期为3—7年的 ENSO 循环对全球气候变化的贡献<sup>[23-25]</sup>. 外强迫条件的变化和异常会影响大气内部的动力过程, 从而影响天气和气候的可预报性. 但在以往有关强迫项的研究中, 较少的工作涉及外强迫影响混沌系统可预报性的问题. 外强迫的改变会使得混沌系统的可预

\* 国家自然科学基金优秀青年科学基金 (批准号: 41522502)、“全球变化与海气相互作用”专项 (批准号: GASI-IPOVAI-06) 和国家重点研发计划 (批准号: 2016YFA0601801) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: drq@mail.iap.ac.cn

报期限产生怎样的变化, 尚需进一步的研究. 同时, 大气作为非线性动力系统, 常用非线性理论模型来体现大气系统运动的非周期性和运动轨迹对初值的敏感性, 但以往的研究主要集中探讨其动力结构和动力学统计性质等内容 [26,27], 涉及可预报性方面的研究工作还较少.

本文借助于 Lorenz 理论模型, 并利用 NLLE 的方法, 给出了定常强迫 Lorenz 模型 [28] 和准周期强迫 Lorenz 模型 [29] 在外强迫强度改变的条件下混沌系统误差增长规律和可预报期限的变化, 以及外强迫对 Lorenz 系统混沌性质的影响.

## 2 方 法

本文采用 NLLE 方法定量地估计混沌系统的可预报期限. 由于传统的 Lyapunov 方法 [30–32] 都假设初始误差无限小, 误差发展满足切线性近似, 因而忽略了非线性项对误差增长的贡献, 使得传统方法无法描述有限尺度大小的初始误差对可预报性的贡献, 因此存在很大的缺陷和不足. NLLE 方法不做任何线性近似, 保留所有的非线性项, 直接对误差演化的非线性方程进行积分求解.

对于一个  $n$  维非线性动力系统, 其原始误差演化方程表示如下:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{J}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta} + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}), \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x}$  是  $t$  时刻系统的状态向量,  $\boldsymbol{\delta}$  是状态  $\mathbf{x}$  上叠加的误差,  $\mathbf{J}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}$  是切线性项,  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta})$  是关于误差的高阶非线性项. 将误差演化方程 (1) 的解从  $t = t_0$  到  $t_0 + \tau$  进行数值积分, 得到

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \eta(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau)\boldsymbol{\delta}_0, \quad (2)$$

其中  $\boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\delta}(t_0 + \tau)$ ,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ ,  $\boldsymbol{\delta}_0 = \boldsymbol{\delta}(t_0)$ ,  $\eta(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau)$  为非线性误差传播算子. NLLE 被定义为

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|\boldsymbol{\delta}_1\|}{\|\boldsymbol{\delta}_0\|}, \quad (3)$$

这里  $\lambda(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau)$  不仅依赖于相空间中参考轨道的初始状态  $\mathbf{x}_0$  和演化时间  $\tau$ , 还与初始误差  $\boldsymbol{\delta}_0$  有关. 系统全局吸引子上的整体集合平均的非线性局部 Lyapunov 指数可表示为

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\boldsymbol{\delta}_0, \tau) &= \int_{\Omega} \lambda(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau) d\mathbf{x} \\ &= \langle \lambda(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\delta}_0, \tau) \rangle_N, \end{aligned} \quad (4)$$

这里  $\Omega$  代表系统全局吸引子的区域范围,  $\langle \cdot \rangle_N$  表示  $N$  ( $N \rightarrow \infty$ ) 个样本的集合平均. 在此基础上可以获得初始误差的平均相对增长,

$$\bar{E}(\boldsymbol{\delta}_0, \tau) = \exp[\bar{\lambda}(\boldsymbol{\delta}_0, \tau)\tau]. \quad (5)$$

由 (3), (4) 和 (5) 式可得

$$\bar{E}(\boldsymbol{\delta}_0, \tau) = \left( \prod_{i=1}^N \delta_i(t_0 + \tau) \right)^{1/N} / \delta(t_0). \quad (6)$$

对于一个混沌系统, 随着  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $\boldsymbol{\delta}_1(t_0 + \tau)$ ,  $\boldsymbol{\delta}_2(t_0 + \tau), \dots, \boldsymbol{\delta}_N(t_0 + \tau)$  相互独立, 并且收敛到同一分布, 根据 Ding 和 Li [8] 证明的饱和定理, 误差的平均相对增长以概率意义收敛到一个常数, 即

$$\bar{E}(\boldsymbol{\delta}_0, \tau) \xrightarrow{P} c \quad (N \rightarrow \infty), \quad (7)$$

其中  $\xrightarrow{P}$  表示依概率收敛于,  $c$  为依赖于  $P$  的一个常数.  $c$  可以看作是  $\bar{E}(\boldsymbol{\delta}_0, \tau)$  的饱和值, 一旦误差增长达到饱和, 就意味着系统的初始信息全部丢失, 预测失去意义, 利用这一饱和值, 系统的可预报期限可以被定量地估计出来, 此方法已经被用到天气和气候的可预报性研究工作中. 本文将初始误差演化到饱和值  $c$  的 98% 时对应的时间定义为可预报期限.

## 3 试验设计

本文选取两个简单的强迫 Lorenz 系统来研究不同类型的强迫以及外强迫强度的改变对其可预报性的影响.

### 3.1 常数强迫 Lorenz 系统

在经典 Lorenz 模型基础上, Palmer [28] 引入常数强迫的 Lorenz 模型, 其方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y + F_x, \\ \dot{y} = rx - y - xz + F_y, \\ \dot{z} = xy - bz + F_z, \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ , 分别为 Prandtl 数、Rayleigh 数以及表示与对流尺度相联系的参数. 强迫参量的选取, 利用 Mittal 等 [33] 研究的情形, 其中  $F_x = \sigma F$ ,  $F_y = -F$ ,  $F_z = 0$ . 当强迫项存在时, Lorenz 系统出现混沌现象除了与自身参数  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b$  有关, 还受到  $F$  的限制. 这种条件下, 强迫项存在临界值  $F_c = 1.61$ , 仅当  $|F| < F_c$  时, 系统表现出混

沌. 本文在保证系统混沌性的前提下, 通过变化强迫项  $F$  的大小来研究系统可预报性的改变.

### 3.2 准周期强迫 Lorenz 系统

本文选取的准周期外力强迫的 Lorenz 方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y + A \cos(v\theta_n), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \theta_{n+1} = \theta_n + w. \end{cases} \quad (9)$$

方程中的参数  $\sigma, r, b$  与常数强迫情形下相同,  $A$  为准周期外强迫的振幅;  $v$  为常数,  $v = 2\pi$ ;  $w$  为无理数, 取值为  $(\sqrt{5} - 1)/2$ , 计算中采用有理数来近似表示,  $w = 0.618$ . 本文通过变化外强迫振幅  $A$  的大小来研究 Lorenz 系统的可预报期限对外力强迫的响应.

由于强迫 Lorenz 系统的控制方程已知, 我们采用直接积分误差演化方程的方法来计算 NLLE, 从而定量地确定不同强迫条件与系统可预报性的关系.

## 4 结果分析

### 4.1 常数强迫 Lorenz 系统

图 1 给出了常数强迫 Lorenz 系统分别在有强迫和无强迫的条件下, 初始误差 ( $\delta_0 = 10^{-6}$ , 下文同) 的增长规律和可预报期限的变化情况. 从

图 1(a) 可以看出: 无论是否存在强迫, Lorenz 系统的  $\bar{\lambda}$  都在最初阶段表现出突然增加为较大的正值, 这段时间可以认为是初始误差随时间调整到误差最快增长方向的适应阶段; 随后  $\bar{\lambda}$  逐渐趋于常数, 该阶段为误差增长的线性阶段, 误差增长率在此阶段表现出明显的分离现象, 其中有常数强迫条件下的  $\bar{\lambda}$  相比无强迫时的情形下要小; 当进一步发展到非线性阶段后, 有强迫和无强迫系统的误差增长率逐渐趋于一致. 与之对应的有强迫存在的情形下,  $\ln \bar{E}$  的增长也更为缓慢; 尽管进入到非线性阶段后, 最终达到的饱和值相等, 但是有强迫存在时的  $\ln \bar{E}$  达到饱和需要的时间更长, 即可预报期限增加 (图 1(b)). 以上结果表明, 当常数强迫存在时, Lorenz 系统的误差增长规律和可预报期限会发生改变. 常数强迫的驱动使得系统的误差增长更加缓慢, 造成可预报性的增加, 同时外强迫对误差增长的影响主要体现在线性阶段.

为了进一步分析不同大小和方向的常数强迫对 Lorenz 系统的影响规律, 图 2 给出了 Lorenz 系统的误差增长率和误差增长曲线随着不同常数强迫的变化. 从图 2(a) 可以看出:  $\bar{\lambda}$  在最开始经过短时的调整之后, 进入到线性阶段, 在该阶段表现出明显的分离现象, 随着  $|F|$  的增大, 线性阶段的  $\bar{\lambda}$  随之减小; 当发展到非线性阶段之后, 不同强迫条件下的误差增长率趋于一致. 误差增长曲线 (图 2(b)) 也显示了相应的发展情况, 虽然混沌系统的初值误差在各强迫条件下达到的饱和值相等, 但是  $\ln \bar{E}$  的增长速度并不相同,  $|F|$  越大, 增长曲线的曲率越大, 意味着最终达到饱和所需的时间越长. 此外,

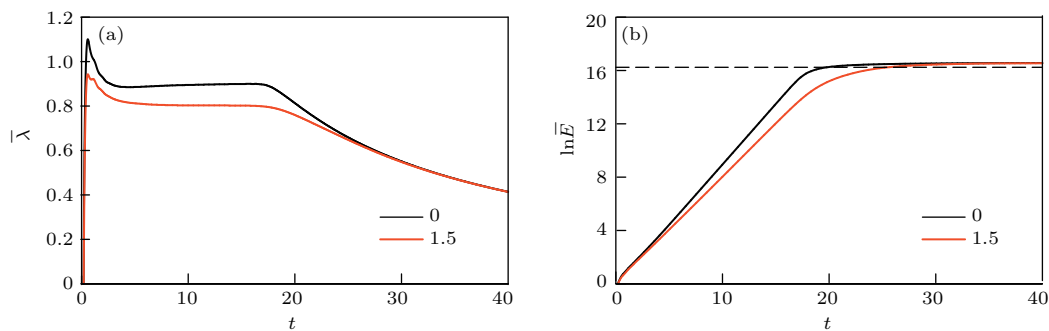


图 1 (网刊彩色) 常数强迫 Lorenz 系统的 (a) NLLE 和 (b) 误差的自然对数  $\ln \bar{E}$  随  $t$  的变化 (黑色实线,  $F = 0$ ; 红色实线,  $F = 1.5$ ; 黑色水平虚线, 饱和值的 98%)

Fig. 1. (color online) Temporal evolution of (a) the NLLE and (b) the error growth of the Lorenz system with constant forcing (black solid curves,  $F = 0$ ; red solid curves,  $F = 1.5$ ; black dashed horizontal curve means the value corresponding to the 98% saturated bias).

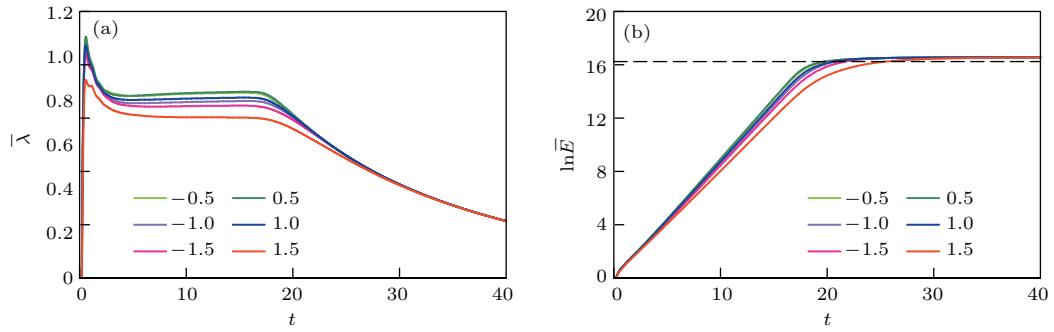


图2 (网刊彩色) 不同强迫条件下, 常数强迫 Lorenz 系统的 (a) NLLE 和 (b) 误差的自然对数  $\ln \bar{E}$  随  $t$  的变化 (黑色水平虚线: 饱和值的 98%)

Fig. 2. (color online) Temporal evolution of (a) the NLLE and (b) the error growth of the Lorenz system with different constant forcings (black dashed horizontal curve means the value corresponding to the 98% saturated bias).

我们还可以注意到, 大小相等方向相反的外强迫对可预报期限影响不同. 当  $F = \pm 0.5$  时, 误差增长曲线比较接近; 随着  $F$  增加到  $\pm 1.0$  时, 两条误差增长曲线在线性增长阶段有较为明显的分离, 并且  $F = 1.0$  的误差增长速度更为缓慢; 当  $F$  进一步扩大到  $\pm 1.5$  时, 误差增长曲线的分离表现更为明显, 其中  $F = 1.5$  的增长速度更慢. 可见, 大小相同方向相反的常数强迫并不都对误差增长产生相同的影响, 正值强迫对于可预报性增加的影响更为显著.

为了更加直观地分析不同强迫对 Lorenz 系统可预报期限的影响, 图 3 给出了可预报性期限  $T_P$  随不同强度的常数强迫的变化曲线. 首先, 从图 3 可以看出, 随着外强迫强度的增强, 可预报性也随之增加; 其次, 曲线的非对称性更明显地表述出大小相等、方向不同的  $|F|$  对混沌系统产生着不同的影响, 也说明了 Lorenz 系统对正负强迫的响应不同. Lorenz 系统可预报性的增加对正值强迫的响应要比负值强迫更加明显, 随着强迫强度的增加, 这种差异越为显著.

传统 Lyapunov 指数常用来表示混沌系统的改变, Ding 和 Li [18] 在研究中曾指出线性阶段的 NLLE 与传统 Lyapunov 指数大致相等, 因此本文利用误差增长率在其线性平稳阶段的平均值  $\bar{\lambda}_L$  来估计系统的内部变化. 从图 4 给出的误差增长线性阶段的平均值  $\bar{\lambda}_L$  随外强迫的变化曲线可以看出, 不存在常数强迫时的  $\bar{\lambda}_L$  最大. 随着正强迫值的增加,  $\bar{\lambda}_L$  随之减小, 负值亦然. 但不同的是, 强迫为正值时,  $\bar{\lambda}_L$  曲线的下降趋势比强迫为负值时更加明显, 意味着正值强迫下  $\bar{\lambda}_L$  减小速度更快, 与图 3 中

的结论相符合. 由此可见, 外强迫的存在改变了系统的误差增长规律, 强迫越强, 误差增长越慢, 可预报期限越长; 同时, 对于强度相等的外强迫, 正值强迫比负值强迫下的可预报期限更长.

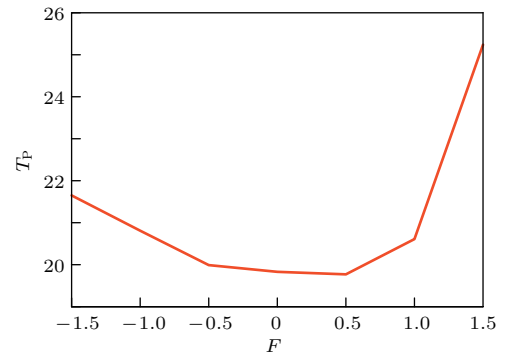


图3 常数强迫 Lorenz 系统的可预报期限  $T_P$  随强迫  $F$  的变化

Fig. 3. The predictability limit  $T_P$  of the Lorenz system with constant forcing varies with the external forcing strength  $F$ .

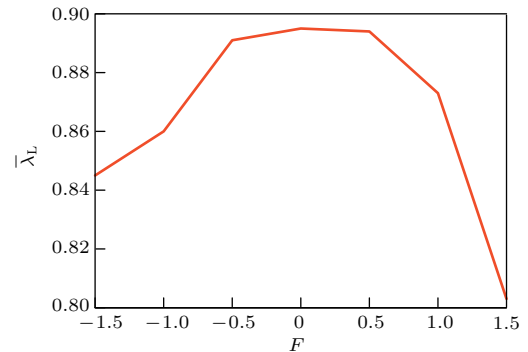


图4 常数强迫 Lorenz 系统的  $\bar{\lambda}_L$  随强迫  $F$  的变化  
Fig. 4. The average NLLE of the linear phase  $\bar{\lambda}_L$  of the Lorenz system with constant forcing varies with the external forcing strength  $F$ .

### 4.2 准周期强迫 Lorenz 系统

图 5 给出了 Lorenz 系统在准周期强迫条件下的误差增长率与误差增长曲线. 同常数强迫 Lorenz 系统一样, 系统误差增长率在经过短时间的调整后进入到线性阶段, 此时系统受到准周期强迫驱动的

$\bar{\lambda}$  相比无强迫情形下的小, 随着时间发展, 由于非线性作用的增强, 增长率最终趋于一致 (图 5 (a)). 图 5 (b) 的误差发展曲线也显示出, 系统存在准周期外强迫时, 初始误差的增长速度要更加缓慢, 达到饱和的时间更加长, 可预报期限增加. 由此可见, 准周期强迫增加了 Lorenz 系统的可预报性.

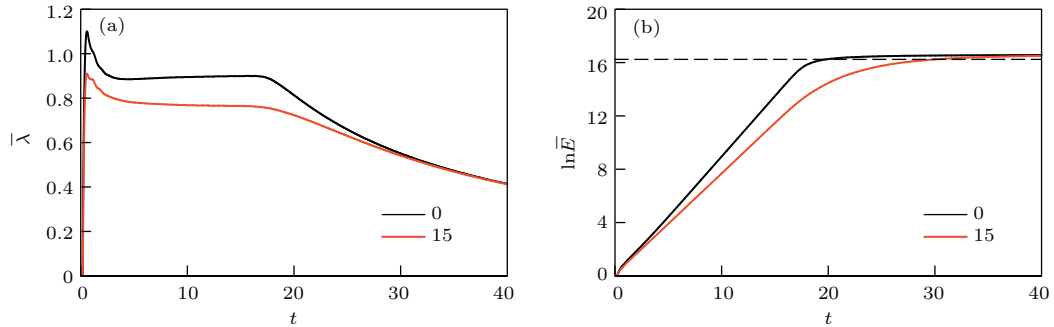


图 5 (网刊彩色) 准周期强迫 Lorenz 系统的 (a) NLLE 和 (b) 误差的自然对数  $\ln \bar{E}$  随  $t$  的变化 (黑色实线,  $A = 0$ ; 红色实线,  $A = 15$ ; 黑色水平虚线, 饱和值的 98%)

Fig. 5. (color online) Temporal evolution of (a) the NLLE and (b) the error growth of the Lorenz system with quasi-periodic forcing (black solid curves,  $A = 0$ ; red solid curves,  $A = 15$ ; black dashed horizontal curve means the value corresponding to the 98% saturated bias).

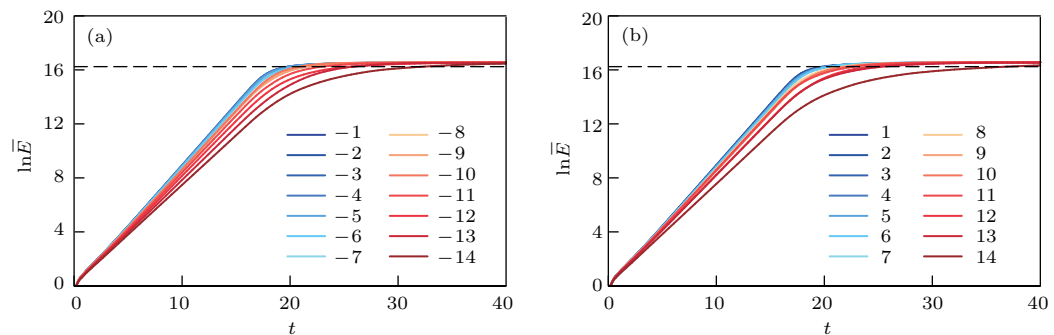


图 6 (网刊彩色) 不同强迫条件下准周期强迫 Lorenz 系统的误差自然对数  $\ln \bar{E}$  随  $t$  的变化 (黑色水平虚线: 饱和值的 98%) (a) 准周期强迫振幅  $A$  为负值; (b) 准周期强迫振幅  $A$  为正值

Fig. 6. (color online) Temporal evolution of the error growth of the Lorenz system with different quasi-periodic forcings (black dashed horizontal curves mean the value corresponding to the 98% saturated bias): (a) The quasi-periodic forcings are negative; (b) the quasi-periodic forcings are positive.

图 6 给出的准周期强迫 Lorenz 系统在不同强迫振幅  $A$  作用下的误差增长曲线, 可以从中进一步分析系统可预报期限随强迫振幅的变化情况. 外强迫振幅为负值的变化过程中 (图 6 (a)), 当  $A$  在  $-9$  内变动时, 误差增长达到饱和需要的时间有增加的趋势, 但是尚不明显, 比较接近无强迫条件下的情形; 但当  $A$  从  $-10$  开始增加, 随着  $|A|$  的增加, 误差增长速度减小趋势显著, 达到饱和所需要的时间也明显增加; 外强迫为较小的正值时 (图 6 (b)), 误差增长同样比较接近无强迫的情形; 当  $A$  从  $7$  开始增加, 可以看出误差增长曲线的曲率依此增大, 即误

差增长速度依此减小, 达到饱和的时间增加. 以上结果表明, 在不考虑外强迫方向的前提下, 初始误差的增长速度在整体上表现出随着外强迫振幅的增加而减小, 从而使得可预报期限增加.

图 7 给出了准周期强迫 Lorenz 系统的可预报期限在不同的振幅作用下的变化曲线. 从图 7 可以更明显地看出, 在  $A = 0$  时的可预报期限最短, 随着  $|A|$  的增加, 可预报期限增加, 这一趋势随着外强迫的增强变的明显; 在  $|A|$  较小时,  $T_p$  的增长过程存在一定的波动, 这与图 6 分析的误差增长曲线分离不明显结果对应; 可预报期限变化曲线的非对称

性表明,大小相等方向不同的外强迫对系统可预报性的影响效果不同,当外强迫的振幅较小时,外强迫方向的影响尚不显著,但是当振幅较大时,外强迫方向的作用使得正值强迫驱动下的系统可预报期限更长.

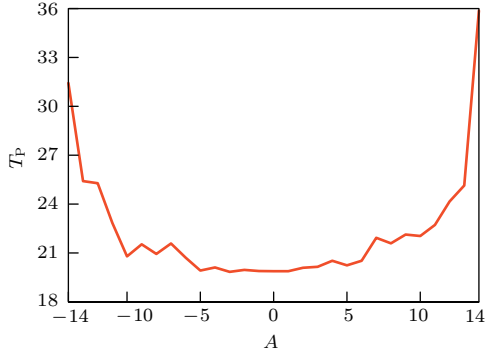


图7 准周期强迫 Lorenz 系统的可预报期限  $T_P$  随强迫振幅  $A$  的变化

Fig. 7. The predictability limit  $T_P$  of the Lorenz system with quasi-periodic forcing varies with the external forcing magnitude  $A$ .

图8给出了准周期强迫 Lorenz 系统的 NLE 在线性平稳阶段的平均值  $\bar{\lambda}_L$  随强迫振幅  $A$  的变化曲线. 首先,随着  $|A|$  的增加,  $\bar{\lambda}_L$  呈现减小趋势,即系统误差增长速度依此减缓,图7得出的可预报性增加的结论与之对应;其次,  $\bar{\lambda}_L$  在减小的过程中存在波动,尤其当  $|A|$  较小时表现明显,解释了可预报期限的波动增加趋势;图8中大小相等的外强迫,负值时的  $\bar{\lambda}_L$  比正值时的小,这时负值下的可预报期限应该更大,但图7中的结果显示正值时较大.这可能是因为随着外强迫的增强,准周期强迫对于非线性阶段的影响开始显著,不再局限于误差增长的线性阶段,这是与常数强迫不同的地方,即不同形式的外强迫对系统误差增长的影响阶段是不同的.

为进一步说明不同形式的外强迫对系统误差增长的影响不同,图9给出了外强迫的强度相等(外强迫强度都选取为  $-1$ )时,常数强迫 Lorenz 系统和准周期外强迫 Lorenz 系统的误差增长率和误差增长曲线.从图9可以看出,常数强迫情形下的误差增长在其线性阶段更加缓慢,最终达到饱和的时间更久,可预报期限更长.这种结果显示,强度相等形式不同的外强迫对系统的影响是不同的,系统受到常数强迫影响的可预报期限更长,因此当我们考虑外强迫对可预报性的影响时,也应该考虑到外强迫的不同形式.

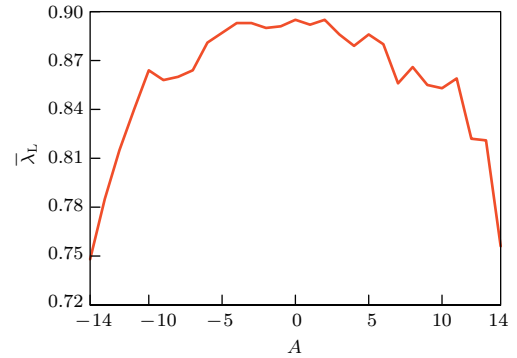


图8 准周期强迫 Lorenz 系统的  $\bar{\lambda}_L$  随强迫振幅  $A$  的变化  
Fig. 8. The average NLE of the linear phase  $\bar{\lambda}_L$  of the Lorenz system with quasi-periodic forcing varies with the external forcing magnitude  $A$ .

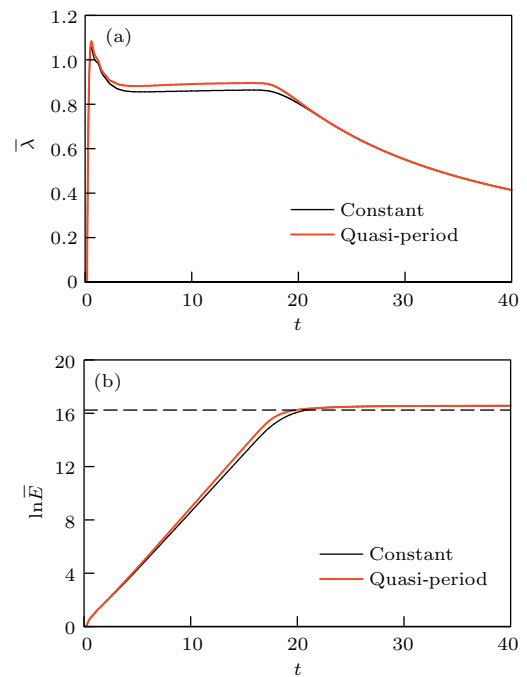


图9 (网刊彩色)不同强迫 Lorenz 系统的 (a) NLE 和 (b) 误差的自然对数随  $t$  的变化(黑色实线,准周期强迫 Lorenz 系统;红色实线,常数强迫 Lorenz 系统;黑色水平虚线,饱和值的 98%)

Fig. 9. (color online) Temporal evolution of (a) the NLE and (b) the error growth of the different forced Lorenz system (black solid curves, the Lorenz system with constant forcing; red solid curves, the Lorenz system with quasi-periodic forcing; black dashed horizontal curve means the value corresponding to the 98% saturated bias).

### 5 讨论与结论

本文基于两个不同类型的强迫 Lorenz 理论模型,利用 NLE 方法考察了在外强迫改变的情况下混沌系统的可预报性问题,主要研究结论如下.

1) 外强迫会对系统的可预报性产生影响. 两种不同强迫类型的系统可预报期限都随着外强迫的增强而增加; 大小相同方向不同的外强迫作用不同, 系统可预报性对正值强迫的响应要比负值强迫更加明显, 系统在正值强迫作用下的误差增长率更小, 可预报期限更长, 并且这种差异随着强迫的增强而增加.

2) 不同类型的外强迫对于系统误差增长的影响不同. 常数强迫的影响主要体现在误差增长的线性阶段; 准周期强迫作用下, 随着强迫的增加, 误差增长的非线性阶段同样受到影响; 在外强迫强度相等时, 混沌系统在常数强迫驱动下的可预报期限比准周期强迫时更长.

本文虽然基于简单的理论模型进行研究, 但是其结果对于实际天气具有一定的启示意义. 首先, 大气可预报性的研究中, 选取外强迫的强度对大气可预报性有重要影响, 外强迫增强会使得大气可预报性增加, 因此外强迫大小的选取在实际研究中要合理. 其次, 强迫的类型不同对于可预报性的影响不同, 比如在大气可预报性的研究工作中, 经常将海温作为外强迫驱动大气, 但是选择海温作为常数外强迫或准周期外强迫的不同情形下, 大气可预报性是不同的; 此外, 强度相等方向不同的强迫对于可预报性的作用效果不一致, 这种非对称性随着外强迫的增强变得更加明显, 可能是由于非线性的作用使得正负强迫条件下的信号强度表现不同, 但是关于系统内部的动力行为仍有待深入研究. 这对于实际研究同样重要, 过去研究中我们常将强迫项作为一个整体去考虑, 然而大气和海洋中存在着许多正负相反的气象要素和位相不同的模态, 如海温的正负异常、ENSO的正负位相等, 由于方向不同的外力对于实际大气或海洋的动力过程影响是不同的, 所以应该分别考虑不同位相驱动下的可预报性问题. 总之, 大气和海洋的研究中存在着多种不同的准周期强迫项和常数强迫项, 探索实际可预报性仍需要进一步的努力.

## 参考文献

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [2] Chou J F 2002 *Nonlinearity and Complexit in Atmospheric Sciences* (Beijing: China Meteorological Press) p131 (in Chinese) [丑纪范 2002 大气科学中的非线性和复杂性 (北京: 气象出版社) 第 131 页]
- [3] Lorenz E N 1965 *Tellus A* **17** 321
- [4] Lorenz E N, Palmer T N, Hagedorn R 1995 *Proceedings of a Seminar Held at ECMWF on Predictability* (I), 1995 p1
- [5] Li J P, Chou J F 2003 *Chin. J. Atmos. Sci.* **27** 653 (in Chinese) [李建平, 丑纪范 2003 大气科学 **27** 653]
- [6] Duan W S, Mu M 2006 *Chin. J. Atmos. Sci.* **30** 759 (in Chinese) [段晚锁, 穆穆 2006 大气科学 **30** 759]
- [7] Duan W S, Ding R Q, Zhou F F 2013 *Climatic Environ. Res.* **18** 524 (in Chinese) [段晚锁, 丁瑞强, 周非凡 2013 气候与环境研究 **18** 524]
- [8] Ding R Q, Li J P 2007 *Phys. Lett. A* **364** 396
- [9] Ding R Q, Li J P 2007 *Chin. J. Atmos. Sci.* **31** 571 (in Chinese) [丁瑞强, 李建平 2007 大气科学 **31** 571]
- [10] Ding R Q, Li J P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7494 (in Chinese) [丁瑞强, 李建平 2008 物理学报 **57** 7494]
- [11] Li J P, Ding R Q 2008 *Chin. J. Atmos. Sci.* **32** 975 (in Chinese) [李建平, 丁瑞强 2008 大气科学 **32** 975]
- [12] Ding R Q, Li J P 2009 *Acta Meteor. Sin.* **67** 343 (in Chinese) [丁瑞强, 李建平 2009 气象学报 **67** 343]
- [13] Ding R Q, Li J P, Seo K H 2010 *Mon. Wea. Rev.* **138** 1004
- [14] Ding R Q, Li J P, Seo K H 2011 *Mon. Wea. Rev.* **139** 2421
- [15] Ding R Q, Li J P 2011 *Mon. Wea. Rev.* **139** 3265
- [16] Ding R Q, Li J P 2013 *Int. J. Climatol.* **33** 1936
- [17] Ding R Q, Li J P, Zheng F, Feng J, Liu D Q 2015 *Climatic Dyn.* **46** 1563
- [18] Ding R Q, Li J P 2012 *Adv. Atmos. Sci.* **29** 1078
- [19] Reichler T J, Roads J O 2003 *Nonlinear Proc. Geoph.* **10** 211
- [20] Yang X Q, Xie Q, Huang T S 1992 *Acta Meteor. Sin.* **50** 349 (in Chinese) [杨修群, 谢倩, 黄士松 1992 气象学报 **50** 349]
- [21] Li C Y, Zhu J H, Sun Z B 2002 *Climatic Environ. Res.* **7** 209 (in Chinese) [李崇银, 朱锦红, 孙照渤 2002 气候与环境研究 **7** 209]
- [22] Li W J, Li Y, Chen L J, Zhao Z G 2013 *J. Appl. Meteor. Sci.* **24** 385 (in Chinese) [李维京, 李怡, 陈丽娟, 赵振国 2013 应用气象学报 **24** 385]
- [23] Charles C D, Hunter D E, Fairbanks R G 1997 *Science* **277** 925
- [24] Wang B, Wu R G, Fu X H 2000 *J. Climate* **13** 1517
- [25] Zhang Z S, Hu P, Feng G L 2016 *Acta Meteor. Sin.* **74** 165 (in Chinese) [张志森, 胡泊, 封国林 2016 气象学报 **74** 165]
- [26] Gong Z Q, Feng G L, Dong W J, Li J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3180 (in Chinese) [龚志强, 封国林, 董文杰, 李建平 2006 物理学报 **55** 3180]
- [27] Gong Z Q, Zhou L, Zhi R, Feng G L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5351 (in Chinese) [龚志强, 周磊, 支蓉, 封国林 2008 物理学报 **57** 5351]
- [28] Palmer T N 1994 *Proceedings-Indian National Science Academy Part A* **60** 57
- [29] He W P, Feng G L, Gao X Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3175 (in Chinese) [何文平, 封国林, 高新全 2006 物理学报 **55** 3175]
- [30] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285



[31] Eckmann J P, Ruelle D 1985 *Rev. Mod. Phys.* **57** 617[33] Mittal A K, Dwivedi S, Pandey A C 2005 *Nonlin. Pro.*[32] Lacarra J F, Talagrand O 1988 *Tellus* **40A** 81*Geophys.* **12** 707

## Predictability of forced Lorenz system\*

Li Bao-Sheng<sup>1)2)</sup> Ding Rui-Qiang<sup>1)3)†</sup> Li Jian-Ping<sup>4)5)</sup> Zhong Quan-Jia<sup>1)2)</sup>

1) (State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics (LASG), Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)

2) (College of Earth Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

3) (Plateau Atmosphere and Environment Key Laboratory of Sichuan Province, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

4) (College of Global Change and Earth System Science (GCESS), Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

5) (Joint Center for Global Change Studies, Beijing 100875, China)

( Received 11 November 2016; revised manuscript received 15 December 2016 )

### Abstract

In recent years, the actual atmospheric predictability has attracted widespread attention. Improving our understanding of weather predictability is vital to developing numerical models and improving our forecast skill in weather and climate events. Given that the atmosphere is a complex and nonlinear system, taking the Lorenz system as an example is a better way to understand the actual atmosphere predictability. Up to now, some predictability problems of the Lorenz system have been investigated, such as the relative effects of the initial error and the model error. Previous advances in the research of predictability mainly focus on the relationship between the predictability limit and the initial error. As is well known, the external forcing can also result in the change of the predictability. Therefore, it is significant to investigate the predictability changing with the external forcing. The nonlinear local Lyapunov exponent (NLLE) is introduced to measure the average growth rate of the initial error of nonlinear dynamical model, which has been used for quantitatively determining the predictability limit of chaos system. Based on the NLLE approach, the influences of external forcing on the predictability are studied in the Lorenz system with constant forcing and Lorenz system with quasi-periodic forcing in this paper. The results indicate that for the Lorenz systems with constant and quasi-periodic forcings respectively, their predictability limits increase with forcing strength increasing. In the case of the same magnitude but different directions, the constant and quasi-periodic forcing both show different effects on the predictability limit in the Lorenz system, and these effects become significant with the increase of forcing strength. Generally speaking, the positive forcing leads to a higher predictability limit than the negative forcing. Therefore, when we consider the effects of positive and negative elements and phases in the atmosphere and ocean research, the predictability problems driven by different phases should be considered separately. In addition, the influences of constant and quasi-periodic forcings on the predictability are different in the Lorenz system. The effect of the constant forcing on the predictability is mainly reflected in the linear phase of error growth, while the nonlinear phase should also be considered additionally for the case of the quasi-periodic forcing. The predictability of the system under constant forcing is higher than that of the system under quasi-periodic forcing. These results based on simple chaotic model could provide an insight into the predictability studies of complex systems.

**Keywords:** nonlinear local Lyapunov exponent, predictability, external forcing, Lorenz system

**PACS:** 05.45.-a, 92.60.Wc

**DOI:** 10.7498/aps.66.060503

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China for Excellent Young Scholars (Grant No. 41522502), the National Programme on Global Change and Air-Sea Interaction, China (Grant No. GASI-IPOVAI-06), and the National Key Research and Development Plan of China (Grant No. 2016YFA0601801).

† Corresponding author. E-mail: [drq@mail.iap.ac.cn](mailto:drq@mail.iap.ac.cn)