

基于递推-变换方法计算圆柱面网络的等效电阻及复阻抗

谭志中 张庆华

Calculation of the equivalent resistance and impedance of the cylindrical network based on recursion-transform method

Tan Zhi-Zhong Zhang Qing-Hua

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 070501 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.070501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.070501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I7>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于教室人群疏散实验的行人流建模和模拟

Modeling and simulation of pedestrian evacuation from a single-exit classroom based on experimental features

物理学报.2015, 64(22): 220505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.220505>

横场中非束缚类准周期伊辛链的赝临界点

Quantum pseudocritical point in the unbounded quasiperiodic transverse field Ising chain

物理学报.2015, 64(19): 190501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.190501>

拥堵疏散的行人拥挤力仿真研究

Simulation of pedestrian push-force in evacuation with congestion

物理学报.2015, 64(6): 060505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.060505>

三维空间行人疏散的元胞自动机模型

A cellular automata model of pedestrian evacuation in three-dimensional space

物理学报.2014, 63(8): 080507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.080507>

交叉口混合交通流元胞自动机模型及仿真研究

Research and simulation on cellular automaton model of mixed traffic flow at intersection

物理学报.2014, 63(1): 010508 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.010508>

# 基于递推-变换方法计算圆柱面网络的等效电阻及复阻抗\*

谭志中<sup>1)†</sup> 张庆华<sup>2)</sup>

1)(南通大学物理系, 南通 226019)

2)(南通大学数学系, 南通 226019)

(2016年10月6日收到; 2017年1月12日收到修改稿)

获得任意电阻网络等效电阻的解析解一直是科学和数学上的难题. 本文采用递推-变换方法研究了一类任意  $m \times n$  阶圆柱面网络的等效电阻及复阻抗问题. 首先采用网络分析建立递推矩阵方程模型; 其次构造对角化矩阵变换方法以便获得矩阵的特征值和特征向量, 从而获得矩阵方程的通解; 再次采用网络分析建立边界条件约束方程模型, 进而获得矩阵方程的特解; 最后利用矩阵逆变换给出支路电流的解析解, 从而获得任意  $m \times n$  阶圆柱面网络轴线上等效电阻的解析解, 所得结果由特征根构成及单求和表达. 作为公式的应用, 给出了任意半无限和无限情形时的数个新的等效电阻公式, 在与其他文献结论的对比研究中得到了一个有趣的新的三角函数恒等式. 研究了圆柱面  $RLC$  网络的等效复阻抗问题, 给出了精确的等效复阻抗公式.

**关键词:** 圆柱面网络, 递推-变换方法, 等效电阻解析解, 三角恒等式

**PACS:** 05.50.+q, 84.30.Bv, 89.20.Ff, 02.10.Yn

**DOI:** 10.7498/aps.66.070501

## 1 引言

自从1845年德国物理学家基尔霍夫(1824—1887年)创立了节点电流定律和回路电压定律以来<sup>[1]</sup>, 人类在电路网络领域的研究已历时170多年, 但由于研究难度很大而导致进展缓慢. 现在电阻网络的研究已经延伸到自然科学的许多领域和数学领域, 特别是电阻网络模型的建立与研究<sup>[2-30]</sup>. 2010年的诺贝尔物理学奖授予了石墨烯网络的发现者. 自石墨烯网络发现以来, 相继发现了许多重要特性并取得了不少重要研究成果. 在自然界中, 石墨烯网络的研究、一些金属化合物晶体或非金属晶体结构的研究、多铁性磁电材料结构的研究、富勒烯  $C_{60}$  的结构及纳米碳管结构的研究等, 都可能需要通过构建电阻网络模型进行模拟研究, 人们通过建立电阻网络模型已经解决了许多抽象和复杂的科学问题<sup>[2-30]</sup>. 电阻网络模型的建立与研究具

有重要的理论意义与实际应用价值.

任意  $m \times n$  阶电阻网络等效电阻的精确公式研究一直是一个科学难题<sup>[5-26]</sup>, 不少科学问题或工程技术问题涉及电阻网络模型的模拟研究<sup>[2-4,27-30]</sup>. 自1845年到2000年的150多年间, 匈牙利罗兰大学的 József 教授<sup>[5]</sup>才第一次采用格林函数技术建立了研究无穷网络等效电阻的方法, 首次给出了无穷网络的等效电阻公式(不涉及边界条件), 包括二维平面网络和三维空间电阻网络. 该方法在随后的研究中得到了一些发展与应用<sup>[6-8]</sup>. 例如, 意大利热那亚大学的 Giordano 教授<sup>[6]</sup>应用格林函数技术研究了一类每个节点通过一个给定的任意电阻连接到一个参考节点的  $n$  维各向异性任意晶格网络, 这种拓扑包括了许多在理论和实践应用中有趣的结构, 如与一维系统相对应的任意梯形网络、沉积在基质上的二维结构模型场、以及描述任意各向异性材料的三维结构模型等. 巴勒

\* 江苏省基础研究计划(自然科学基金)面上项目(批准号: BK20161278)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [tanz@ntu.edu.cn](mailto:tanz@ntu.edu.cn); [tanzzh@163.com](mailto:tanzzh@163.com)

斯坦工业大学的 Asad 博士在文献 [7] 中研究了三维无限面心立方 (FCC) 的电阻网络, 在文献 [8] 中研究了三维立体结构的无限电容网络的等效电容问题, 并且给出了理论计算公式及分析研究等. 然而, 无穷网络是一种理想化的情形, 不需要考虑边界条件, 因而比较简单. 但是实际生活中的许多网络往往是有限的, 因而存在各种各样的边界条件限制. 2004 年, 国际著名理论物理学家 Wu [9] 在任意有限电阻网络研究中取得了新的突破, 第一次建立了研究任意电阻网络等效电阻的 Laplacian 矩阵方法, 给出了多种结构的任意  $m \times n$  阶电阻网络等效电阻的计算公式. 如第一次给出了含有自由边界条件的二维矩形网络的等效电阻公式、含有自由边界条件的圆柱面网络的等效电阻公式、含有双周期边界条件网络的等效电阻公式、嵌入在麦比乌斯带 (Möbius strip) 上的电阻网络的等效电阻公式、嵌入在克莱因瓶 (Klein bottle) 上的电阻网络的等效电阻公式, 另外还给出了三维有限和无限情形条件下的电阻网络的等效电阻公式等. 尽管如此, Laplacian 矩阵方法所适用的电阻网络通常都是特殊的自由边界或者周期边界, 不涉及任意边界条件. 在后来的研究中 Laplacian 矩阵方法得到了进一步的发展和应用 [10–14]. 例如, 2006 年台湾淡江大学的 Tzeng 和 Wu [10] 采用 Laplacian 矩阵方法研究了任意  $m \times n$  阶 LC 网络的等效复阻抗问题, 分析研究了共鸣条件等. 2014 年, 英国考文垂大学的 Izmailian 等 [11] 推广了 Laplacian 矩阵方法, 使得该方法能够适用于含有零电阻边界的网络问题, 推导出了任意  $m \times n$  阶 cobweb 网络的等效电阻公式, 证明了 Tan 等 [16] 提出的猜想. 英国伦敦大学的 Essam 等 [12] 分别采用 Laplacian 矩阵方法和递推-变换 (RT) 方法研究了一个 hammock 网络, 并且对两种不同方法进行了比较研究. 2014 年, Izmailian 等 [13] 进一步改进了 Laplacian 矩阵方法, 使得该方法能够适用于任意  $m \times n$  阶 globe 网络的等效电阻研究. 2015 年, Izmailian 等 [14] 采用 Laplacian 矩阵方法研究了任意  $m \times n$  阶 fan 网络的等效电阻问题.

综上所述, Laplacian 矩阵方法解决了许多不同结构类型的电阻网络的等效电阻问题. 然而, 以上采用 Laplacian 矩阵方法研究电阻网络所得到的结论总是由倍求和表达的 (如下文 (1) 式的表达), 因为 Laplacian 矩阵方法包含了建立沿着两个垂直轴线方向的矩阵, 需要求解两个不同方向矩阵的特

征向量和特征值, 因而在研究含有复杂边界条件的电阻网络时存在一些局限性. 为了能够解决一些复杂结构的电阻网络模型, 如 cobweb 网络 [15–19]、globe 网络 [20]、fan 网络 [21], 也为了获得比较简洁的表达结果, 本文研究者之一的谭志中教授潜心研究电阻网络模型十多年, 于 2011 年出版了《电阻网络模型》学术专著 [15], 建立了研究电阻网络模型的一种新方法, 该方法完全不同于之前的任何方法, 其优点在于只需要建立沿着一个轴线方向的一个矩阵 (避免了另一个矩阵可能带来的研究困难), 因而只需要研究一个晶格轴线方向的矩阵变换问题, 并且所得到的结论是由单求和表达的简单结果 (不同于 Laplacian 矩阵方法得到的倍求和表达). 谭志中于 2015 年分别在文献 [22–24] 中进一步发展了研究电阻网络的单求和理论并且将该新方法重新命名为“递推-变换”方法 (recursion-transform, RT 方法, 国际上称为“Tan’s RT method” [12]). RT 方法主要包括四个步骤: 一是通过网络分析建立包含相邻三个平行轴线的递推矩阵方程模型, 二是实施矩阵变换获得矩阵方程的通解, 三是建立约束条件 (也叫边界条件) 矩阵方程模型, 与通解结合而获得矩阵方程的特解, 四是对矩阵方程实施逆变换而得到各支路电流的解析解. RT 方法的建立解决了许多复杂结构的电阻网络难题, 得到了许多新的等效电阻公式 [16–26], 并且所得到的等效电阻公式的表达结构都是由单求和表达的简单结果. 例如, 谭志中等 [16] 于 2013 年采用 RT 方法第一次研究了一个  $3 \times n$  阶 cobweb 网络的等效电阻公式, 提出了任意  $m \times n$  阶 cobweb 网络的等效电阻公式猜想, 该猜想被国际同行专家称为“T-Z-Y 猜想 [11]”, 该猜想的提出激发了国际同行专家的研究兴趣, 推动了电阻网络模型的研究与发展 [11–14, 17–26] (如最近三年国际上关于电阻网络的诸多研究); 2015 年, 谭志中等 [17, 18] 采用 RT 方法研究了  $4 \times n$  阶和任意  $m \times n$  阶 cobweb 网络的等效电阻公式, 并且与同行合作采用 RT 方法研究了一个含有倍电阻边界的任意  $m \times n$  阶 cobweb 网络的等效电阻公式 [19]; 2014 年, 谭志中与国际同行专家合作, 采用 RT 方法第一次研究了一个任意  $m \times n$  阶 globe 网络的等效电阻公式 [20], 同年, 分别研究了任意  $m \times n$  阶 fan 网络和 cobweb 网络的等效电阻公式 [21]; 2015 年, 谭志中 [22] 命名了 RT 方法并且采用 RT 方法, 首次研究了含有一个任意边界条件的  $m \times n$  阶拟矩形网络模型, 并且采用 RT 方法第一次研究了三个分别含

有两个任意边界条件的  $m \times n$  阶电阻网络问题 [23], 同时采用 RT 方法 [24] 第一次研究了三个分别含有一个任意电阻轴线条件的  $m \times n$  阶 cobweb 电阻网络问题, 推广了之前的研究结论; 2015 年, 文献 [25] 采用 RT 方法首次研究了任意  $m \times n$  阶矩形网络两个端节点间的等效电阻公式, 同时给出了对称节点间的等效电阻公式, 并且研究了相应的复阻抗问题; 2016 年, 文献 [26] 采用 RT 方法首次研究了含有一个任意边界条件的任意  $m \times n$  阶矩形电阻网络的等效电阻公式, 并且详细研究了相应的复阻抗特性. 另外, 有不少科学问题涉及到电路网络模型, 例如, Zhuang 等 [27] 采用建立 RLC 网络模型的方法研究了玉米植株的水吸收问题; Jia 等 [28] 研究了在方型晶格中传播和互动的边缘位错问题; Wang 和 Yang [29] 研究了非负稀疏复杂网络中运输的普遍关系, 借助于电阻网络模型可以有效地分析所要研究的问题; Wang 等 [30] 研究了在二维自旋系统中的量子保真度和热相变系统, 文中的一个二维 Heisenberg-Ising 混合旋转模型的拓扑结构是一个典型的晶格网络模型.

电阻网络模型的结构及边界条件复杂多样, 获得精确的等效电阻公式具有重要意义. 尽管研究者已经采用不同的研究方法研究了多种结构的电阻网络模型, 但是之前还没有采用 RT 方法研究圆柱面网络的等效电阻问题. 本文拟采用 RT 方法首次研究任意  $m \times n$  阶圆柱面网络的等效电阻公式, 圆柱面电阻网络模型如图 1 所示.

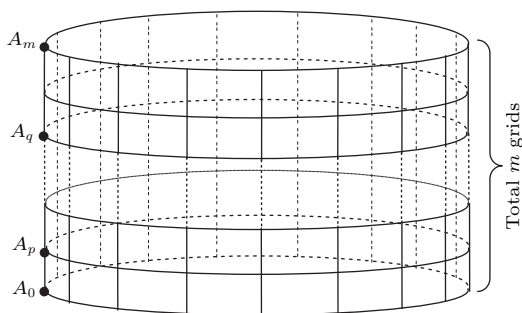


图 1 任意  $m \times n$  阶圆柱面电阻网络模型, 其中竖直和水平方向的网格数分别为  $m$  和  $n$ .

Fig. 1. An arbitrary  $m \times n$  cylindrical resistor network, with  $m$  and  $n$  are respectively the grid numbers along the vertical and horizontal directions.

首先回顾之前研究人员在  $m \times n$  阶圆柱面网络中取得的研究成果. 文献 [9] 采用 Laplacian 矩阵方法给出了任意  $m \times n$  阶圆柱面网络的等效电阻

公式, 得到(参考图 1 模型)

$$R_{\{m \times n\}}(A_p, A_q) = \frac{r_0}{n} |q - p| + \frac{1}{(m+1)n} \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left[ \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta_i - \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right]^2}{r^{-1}(1 - \cos 2\phi_j) + r_0^{-1}(1 - \cos \theta_i)}, \quad (1)$$

其中  $\theta_i = \frac{i\pi}{m+1}$ ,  $\phi_j = \frac{j\pi}{n}$ ,  $m$  和  $n$  分别代表图 1 中沿着竖直轴线和水平轴线的网格数, 并且  $A_p$  和  $A_q$  分别为图 1 中竖直轴线上的两个任意节点(其中最下面的节点称为  $A_0$ ). (1) 式是文献 [9] 第一次推导出的一个结论, 然而美中不足的是 (1) 式是由倍求和表达的结果. 本文拟采用文献 [22—24] 建立的 RT 方法重新研究该问题, 以便获得由单求和表达的比较简洁的结果.

本文第二节给出了任意  $m \times n$  阶圆柱面网络的等效电阻公式; 第三节采用 RT 方法推导和证明所给出的公式; 第四节讨论了一些特殊结果并且进行了比较; 第五节将所得结果应用于 RLC 网络; 第六节进行了总结.

## 2 等效电阻的理论公式

在图 1 所示的  $m \times n$  阶圆柱面网络模型中, 设  $m$  和  $n$  分别为沿着竖直轴线和水平轴线上的网格数, 并且  $A_p$  和  $A_q$  (其中竖直轴线上的最下面的节点称为  $A_0$ , 最上面的节点称为  $A_m$ ) 分别为图 1 中同一竖直轴线上的两个任意节点. 设沿着竖直轴线和水平轴线上的电阻元素分别为  $r_0$  和  $r$ , 则任意  $A_p$  和  $A_q$  二节点间的等效电阻在有限和半无限情形时的公式分别为

$$R_{A_p, A_q}(m, n) = \frac{r}{m+1} \sum_{i=1}^m \frac{\left[ \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta_i - \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right]^2}{\sqrt{(1+h-h\cos\theta_i)^2 - 1}} \times \coth(n \ln \sqrt{\lambda_i}), \quad (2)$$

$$R_{A_p, A_q}(m, \infty) = \frac{r}{m+1} \sum_{i=1}^m \frac{\left[ \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta_i - \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right]^2}{\sqrt{(1+h-h\cos\theta_i)^2 - 1}}, \quad (3)$$



其中  $\theta_i = i\pi/(m + 1)$ ,  $h = r/r_0$ , 并且

$$\lambda_i = 1 + h - h \cos \theta_i + \sqrt{(1 + h - h \cos \theta_i)^2 - 1}. \quad (4)$$

根据 (2) 和 (3) 式可以导出以下 4 个由积分表达的无穷和半无穷网络情形下的结论.

**情形 1** 在图 1 所示的  $m \times n$  阶圆柱面网络模型中, 当  $m \rightarrow \infty$ , 但是  $p, q$  和  $n$  都是有限值时, 此属于半无穷网络的情形 (上无穷而下有限), 则任意  $A_p$  和  $A_q$  二节点间的等效电阻公式为

$$R_{A_p, A_q}(\infty, n) = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \frac{\left[ \cos \left( p + \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( q + \frac{1}{2} \right) \theta \right]^2}{\sqrt{(1 + h - h \cos \theta)^2 - 1}} \times \coth(n \ln \sqrt{\lambda_\theta}) d\theta, \quad (5)$$

其中  $\lambda_\theta = 1 + h - h \cos \theta + \sqrt{(1 + h - h \cos \theta)^2 - 1}$ .

**情形 2** 在图 1 所示的  $m \times n$  阶圆柱面网络模型中, 当  $m \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  但  $p, q$  都是有限值时, 此属于半无穷网络的情形 (水平无限, 上无穷而下有限), 则任意  $A_p$  和  $A_q$  二节点间的等效电阻公式为

$$R_{A_p, A_q}(\infty, \infty) = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \frac{\left[ \cos \left( p + \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( q + \frac{1}{2} \right) \theta \right]^2}{\sqrt{(1 + h - h \cos \theta)^2 - 1}} d\theta. \quad (6)$$

**情形 3** 在图 1 所示的  $m \times n$  阶圆柱面网络模型中, 当  $m \rightarrow \infty$ , 以及  $p, q \rightarrow \infty$ , 但  $(p - q)$  和  $n$  都是有限值时, 此属于半无穷网络的情形 (竖直无穷而水平有限), 则任意  $A_p$  和  $A_q$  二节点间的等效电阻公式为

$$R_{A_p, A_q}(\infty, n) = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos(p - q)\theta}{\sqrt{(1 + h - h \cos \theta)^2 - 1}} \times \coth(n \ln \sqrt{\lambda_\theta}) d\theta. \quad (7)$$

**情形 4** 在图 1 所示的  $m \times n$  阶圆柱面网络模型中, 当  $m \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , 并且  $p, q \rightarrow \infty$ , 但  $(p - q)$  是有限值时, 此属于无穷网络的情形 (竖直和水平均无穷), 则任意  $A_p$  和  $A_q$  二节点间的等效电阻公式为

$$R_{A_p, A_q}(\infty, \infty) = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos(p - q)\theta}{\sqrt{(1 + h - h \cos \theta)^2 - 1}} d\theta. \quad (8)$$

以上结论为本文第一次给出, 是一次理论上的创新. 由于晶格电阻  $r$  和  $r_0$  是任意元素, 因而以上等效电阻公式也适用于  $RLC$  复阻抗网络. 当然, 由于电阻公式应用于复阻抗网络时存在复数问题, 因而等效复阻抗结果需要进行复数分析. 下面首先采用 RT 方法给出以上电阻公式的证明.

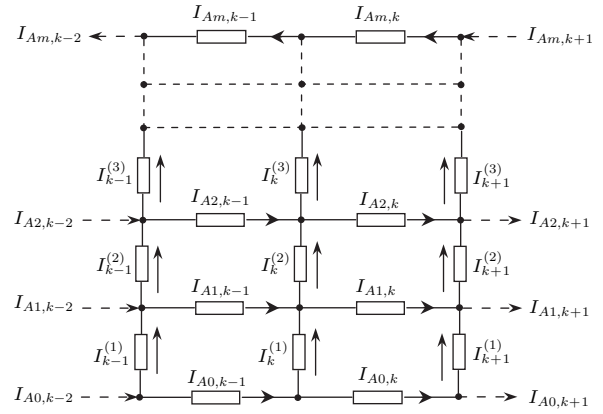


图 2 电阻网络中含有电流参数和方向的子网络模型  
Fig. 2. The sub-network of resistor with parameters and directions of the currents.

### 3 理论公式的推导

#### 3.1 建立递推主矩阵方程

在图 1 所示的  $m \times n$  阶圆柱面电阻网络中, 设在电阻网络中通入恒定电流  $I$ , 电流从节点  $A_p$  输入至节点  $A_q$  输出. 含有电流参数及其方向的子矩形电阻网络 (第  $k - 1$  级与第  $k$  级) 如图 2 所示, 其子网络水平方向的电阻均为  $r$ , 竖直方向的电阻均为  $r_0$ . 设全部  $m + 1$  排水平电阻  $r$  中通过的电流分别记为  $I_{A0,k}, I_{A1,k}, I_{A2,k} \cdots I_{Am,k}$  ( $1 \leq k \leq n$ ); 竖直电阻  $r_0$  中通过的电流分别为  $I_k^{(1)}, I_k^{(2)}, \dots, I_k^{(m)}$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

应用基尔霍夫节点电流定律和回路电压定律, 由图 2 中子网络模型的电流参数可以得到如下递推关系方程 (读者可以参考文献 [16—26] 的研究):

$$\begin{aligned} I_{k+1}^{(1)} &= 2(1 + h)I_k^{(1)} - hI_k^{(2)} - I_{k-1}^{(1)} \\ & \quad i = 1, \\ I_{k+1}^{(i)} &= (2 + 2h)I_k^{(i)} - hI_k^{(i-1)} - hI_k^{(i+1)} - I_{k-1}^{(i)} \\ & \quad 1 < i < m, \\ I_{k+1}^{(m)} &= 2(1 + h)I_k^{(m)} - hI_k^{(m-1)} - I_{k-1}^{(m)} \\ & \quad i = m, \end{aligned} \quad (9)$$

方程(9)不涉及电流的输入与输出节点(不涉及约束条件),可以写成如下矩阵形式:

$$\mathbf{I}_{k+1} = \mathbf{A}_{m \times m} \mathbf{I}_k - \mathbf{I}_{k-1} \quad (k \neq 1), \quad (10)$$

其中  $\mathbf{I}_k$  为一个  $m \times 1$  阶列矩阵,可以由转置矩阵表示为  $([\ ]^T$  表示为矩阵的转置)

$$\mathbf{I}_k = [I_k^{(1)}, I_k^{(2)}, I_k^{(3)}, \dots, I_k^{(m)}]^T, \quad (11)$$

并且  $\mathbf{A}_k$  是一个  $m \times m$  阶三对角矩阵

$$\mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} 2(1+h) & -h & 0 & 0 & 0 \\ -h & 2(1+h) & -h & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & -h & 2(1+h) & -h \\ 0 & 0 & 0 & -h & 2(1+h) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中  $h = r/r_0$ . 方程(10), (11) 和 (12) 即为关于电流参数的递推矩阵方程模型.

### 3.2 矩阵变换与矩阵方程的通解

如何求解矩阵方程(10)的通解是解决问题的关键. 本文采用矩阵变换的方法巧妙地解决了该问题. 将方程(10)左乘一个  $m \times m$  阶待定方矩阵  $\mathbf{P}_m$ , 得到

$$\mathbf{P}_m \mathbf{I}_{k+1} = \mathbf{P}_m \mathbf{A}_m \mathbf{I}_k - \mathbf{P}_m \mathbf{I}_{k-1}. \quad (13)$$

采用下面的恒等式实施对角化矩阵变换

$$\det |\mathbf{A}_m - t \mathbf{E}_m| = 0, \\ \mathbf{P}_m \mathbf{A}_m = \text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_m) \mathbf{P}_m. \quad (14)$$

解方程(14)得到矩阵的特征值

$$t_i = 2(1+h) - 2h \cos \theta_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (15)$$

其中  $\theta_i = i\pi/(m+1)$ , 并且得到特征向量矩阵

$$\mathbf{P}_m = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \dots & \sin m\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\theta_2 & \dots & \sin m\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \theta_m & \sin 2\theta_m & \dots & \sin m\theta_m \end{pmatrix}, \quad (16)$$

及其逆矩阵

$$\mathbf{P}_m^{-1} = \frac{2}{m+1}$$

$$\times \begin{pmatrix} \sin \theta_1 & \sin \theta_2 & \dots & \sin \theta_m \\ \sin 2\theta_1 & \sin 2\theta_2 & \dots & \sin 2\theta_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin m\theta_1 & \sin m\theta_2 & \dots & \sin m\theta_m \end{pmatrix}. \quad (17)$$

为了方便研究,根据方程(13)和(14)中的因式,给出如下约定:

$$\mathbf{P}_m \mathbf{I}_k = \mathbf{X}_k \\ = [X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, X_k^{(3)}, \dots, X_k^{(m)}]^T. \quad (18)$$

基于以上约定,将方程(18)和(14)代入矩阵方程(13)可以转化成新的矩阵方程

$$X_{k+1}^{(i)} = t_i X_k^{(i)} - X_{k-1}^{(i)}. \quad (19)$$

该方程是比较简单的二阶线性递推方程,容易求解. 设与矩阵方程(19)对应的特征方程的  $m$  组特征根分别为  $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ), 由矩阵方程(19)解得

$$\lambda_i = 1+h-h\cos\theta_i + \sqrt{(1+h-h\cos\theta_i)^2-1}, \\ \bar{\lambda}_i = 1+h-h\cos\theta_i \\ - \sqrt{(1+h-h\cos\theta_i)^2-1}, \quad (20)$$

其中  $\theta_i = i\pi/(m+1)$ .

根据解二阶线性差分方程的方法(可以参考文献[15]中的理论),解矩阵方程(19)得到

$$X_k^{(i)} = \frac{1}{\lambda_i - \bar{\lambda}_i} [(X_2^{(i)} - \bar{\lambda}_i X_1^{(i)}) \lambda_i^{k-1} \\ - (X_2^{(i)} - \lambda_i X_1^{(i)}) \bar{\lambda}_i^{k-1}], \quad (21)$$

将方程(18)进行逆变换得到  $\mathbf{I}_k = (\mathbf{P}_m)^{-1} \mathbf{X}_k$ , 将此应用于(21)式即可以获得支路电流的解析解.

### 3.3 约束条件方程及其特解

当电流从  $A_p$  输入至  $A_q$  输出时,采用与建立方程(10)相似的方法,分析与轴线  $A_0 A_m$  相连的网格,并且考虑水平轴线上的电流关于  $A_0 A_m$  轴线对称这一特性,得到  $I_{Ai,n} = -I_{Ai,1}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ), 由此得到约束条件矩阵方程

$$2\mathbf{I}_2 = \mathbf{A}_m \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}\mathbf{H}, \quad (22)$$

其中  $\mathbf{A}_m$  由方程(12)给出,  $\mathbf{I}_k$  表示一个  $m \times 1$  阶列矩阵由方程(11)给出,  $\mathbf{H}$  是一个  $m \times 1$  阶列矩阵,由下式给出

$$\mathbf{H} = [0, \dots, 0, \overbrace{-h, h, 0, \dots, 0, h, -h, 0, \dots, 0}^{\text{从第 } p \text{ 项到第 } (q+1) \text{ 项}}, 0]^T. \quad (23)$$

用矩阵  $\mathbf{P}_m$  左乘矩阵方程 (22) 实施与方程 (19) 相似的矩阵变换方法, 化简得到

$$2X_2^{(i)} = t_i X_1^{(i)} - Ih\zeta_i, \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \zeta_i &= -\sin p\theta_i + \sin(p+1)\theta_i + \sin q\theta_i \\ &\quad - \sin(q+1)\theta_i \\ &= 2\sin\left(\frac{1}{2}\theta_i\right) \left[ \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

另外, 根据对称性与循环性, 得到  $I_{n+1}^{(i)} = I_1^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). 则在方程 (21) 中设  $k = n + 1$  得到

$$\begin{aligned} X_1^{(i)} &= \frac{1}{\lambda_i - \bar{\lambda}_i} [(X_2^{(i)} - \bar{\lambda}_i X_1^{(i)})\lambda_i^n \\ &\quad - (X_2^{(i)} - \lambda_i X_1^{(i)})\bar{\lambda}_i^n]. \end{aligned} \quad (26)$$

将方程 (24) 代入方程 (26) 并且化简, 解得

$$\begin{aligned} X_1^{(i)} &= 2hI \frac{\coth(n \ln \sqrt{\lambda_i})}{\lambda_i - \bar{\lambda}_i} \sin\left(\frac{1}{2}\theta_i\right) \\ &\quad \times \left[ \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

(27) 式是  $m \times n$  阶圆柱面网络的矩阵方程在约束条件下的特解.

### 3.4 电阻公式的导出

为了计算图 1 中的等效电阻, 这里采用欧姆定律  $R_{A_p, A_q}(m, n) = U_{A_p, A_q}/I$  计算, 根据图 1 能够得到  $A_p$  与  $A_q$  两节点之间的电压  $U_{A_p, A_q} = (I_1^{(p+1)} + I_1^{(p+2)} + \dots + I_1^{(q)})r_0$ . 由此得到计算等效电阻的计算公式

$$R_{A_p, A_q}(m, n) = \frac{1}{I} \left( \sum_{i=p+1}^q I_1^{(i)} \right) r_0. \quad (28)$$

依据方程 (28) 的要求, 需要获得电流  $I_1^{(i)}$  的解析解. 在方程 (18) 中取  $k = 1$  并且实施逆变换得到  $\mathbf{I}_1 = (\mathbf{P}_m)^{-1} \mathbf{X}_1$ , 将此展开得到

$$\begin{pmatrix} I_1^{(1)} \\ I_1^{(2)} \\ \vdots \\ I_1^{(m)} \end{pmatrix} = \frac{2}{m+1} \begin{pmatrix} \sin \theta_1 & \sin \theta_2 & \cdots & \sin \theta_m \\ \sin 2\theta_1 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin 2\theta_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin m\theta_1 & \sin m\theta_2 & \cdots & \sin m\theta_m \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_1^{(2)} \\ \vdots \\ X_1^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

根据方程 (29) 即可得到电流  $I_1^{(i)}$  的解析解. 对  $I_1^{(i)}$  求和并且应用方程 (27) 得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m I_1^{(i)} &= \frac{2hI}{m+1} \sum_{i=1}^m \frac{\coth(n \ln \sqrt{\lambda_i})}{\lambda_i - \bar{\lambda}_i} \\ &\quad \times \left[ \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right]^2. \end{aligned} \quad (30)$$

将 (30) 式代入 (28) 式, 并且应用  $\lambda_k - \bar{\lambda}_k = 2\sqrt{(1+h-h\cos\theta_k)^2 - 1}$  即得到 (2) 式.

### 3.5 无穷网络的等效电阻推导

(3) 式的推导: 根据方程 (20) 得到  $\lambda_k > 1 > \bar{\lambda}_k > 0$ , 于是得到极限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \coth(n \ln \sqrt{\lambda_i}) = 1. \quad (31)$$

所以, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 将 (31) 式应用于 (2) 式即得到半无穷网络的等效电阻公式 (3).

另外, 为了证明与积分有关的电阻公式 (5)–(8), 这里首先需要引入一个积分定义. 如果  $\theta_k = bk\pi/(m+1)$ , 则有  $\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k = b\pi/(m+1)$ . 当取极限  $m \rightarrow \infty$  时, 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m F(\theta_k) = \frac{1}{b\pi} \int_0^\pi F(\theta) d\theta, \quad (32)$$

这是一个对于任何非奇异函数  $F(\theta_k)$  均成立的恒等式.

(5) 式的推导: 当  $m \rightarrow \infty$ , 但  $p, q, n$  都是有限值时, 因为此时 (3) 式中的  $\theta_k = k\pi/(m+1)$ , 因此  $\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k = \pi/(m+1)$ , 所以, 将 (32) 式应用于 (2) 式即可得到积分公式 (5).

(6) 式的推导: 当  $n \rightarrow \infty$  时, 应用 (31) 式得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \coth(n \ln \sqrt{\lambda_\theta}) = 1$ . 对 (5) 式取  $n \rightarrow \infty$  的极限即可得到积分公式 (6).

(7) 式的推导: 根据三角函数的恒等变换, 得到

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{1}{2} + p\right)\theta_i - \cos\left(\frac{1}{2} + q\right)\theta_i \\ &= -2\sin\frac{p+q+1}{2}\theta_i \sin\frac{p-q}{2}\theta_i, \end{aligned}$$

当  $m \rightarrow \infty$  及  $p, q \rightarrow \infty$  时, 采用如下变换

$$(p, q) = \left( \frac{m}{2} + y_1, \frac{m}{2} + y_2 \right),$$

其中  $p, q \ll m$  是整数, 并且  $(p - q) = (y_1 - y_2)$  是有限值, 所以

$$\begin{aligned} & \left| \cos \left( \frac{1}{2} + p \right) \theta_i - \cos \left( \frac{1}{2} + q \right) \theta_i \right| \\ &= \left| 2 \sin \frac{m+1+y_1+y_2}{2} \theta_i \sin \frac{p-q}{2} \theta_i \right| \\ &= \left| 2 \sin \left( \frac{i\pi}{2} \right) \sin \frac{p-q}{2} \theta_i \right|, \quad \left( \frac{y_1+y_2}{m+1} \rightarrow 0 \right) \\ &= \begin{cases} 0 & i = \text{even} \\ \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(p-q)\theta_i} & i = \text{odd} \end{cases}, \quad (33) \end{aligned}$$

所以, 当  $m \rightarrow \infty$  及  $p, q \rightarrow \infty$  时, 将 (33) 和 (32) 式应用于 (2) 式即可得到积分公式 (7).

(8) 式的推导: 当  $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$  时, 对 (7) 式中的  $n$  取极限  $n \rightarrow \infty$  即可得到积分公式 (8).

#### 4 具体比较与讨论

由于 (2) 式中的参数  $p, q$  和  $m, n$  属于任意自然数, 所以取一些特殊参数值可以得到一些有趣的结果.

##### 4.1 上下端点间的等效电阻

当  $p = 0, q = m, n \in N$  时, 节点  $A_0$  与  $A_m$  分别位于网络的上下端点处, 因为  $\theta_i = i\pi/(m+1)$ , 所以

$$\begin{aligned} & \cos \left( \frac{1}{2} + p \right) \theta_i - \cos \left( \frac{1}{2} + q \right) \theta_i \\ &= [1 - (-1)^i] \cos \left( \frac{1}{2} \theta_i \right), \end{aligned}$$

分别代入 (2) 和 (3) 式得到

$$\begin{aligned} & R_{A_0, A_m}(m, n) \\ &= \frac{r}{m+1} \sum_{i=1}^m \frac{[1 - (-1)^i](1 + \cos \theta_i)}{\sqrt{(1+h-h\cos\theta_i)^2 - 1}} \\ & \quad \times \coth(n \ln \sqrt{\lambda_i}), \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & R_{A_0, A_m}(m, \infty) \\ &= \frac{r}{m+1} \sum_{i=1}^m \frac{[1 - (-1)^i](1 + \cos \theta_i)}{\sqrt{(1+h-h\cos\theta_i)^2 - 1}}, \quad (35) \end{aligned}$$

其中利用了  $[1 - (-1)^i]^2 = 2[1 - (-1)^i]$  及  $\cos^2 \left( \frac{1}{2} \theta_i \right) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta_i)$ .

##### 4.2 无穷网络中相邻节点间的电阻

例1 在图1网络模型中, 如果  $m, n = \infty, p, q = \infty$  并且  $\Delta y = q - p = 1$ , 根据 (8) 式得到无穷网络中相邻两节点间的等效电阻

$$\frac{R_{\Delta y=1}(\infty)}{r_0} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{h}{1+h}}. \quad (36)$$

以上结果是利用 (8) 式计算得到的, 即利用了

$$R_{\Delta y=1}(\infty) = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \theta}{\sqrt{(1+h-h\cos\theta)^2 - 1}} d\theta.$$

特别地, 当  $h = 1$  (即  $r = r_0$ ) 时, 由 (36) 式得到

$$R_{\Delta y=1, h=1}(\infty) = \frac{1}{2} r_0. \quad (37)$$

当  $h = 3$  (即  $r = 3r_0$ ) 时, 由 (36) 式得到

$$R_{\Delta y=1, h=3}(\infty) = \frac{2}{3} r_0. \quad (38)$$

例2 如果  $m, n = \infty$ , 并且  $\Delta y = q - p = 2$ , 此表示  $A_p$  与  $A_q$  之间相距两个网格单元, 根据 (8) 式得到无穷网络中相隔两个网格节点间的等效电阻

$$\begin{aligned} & \frac{R_{\Delta y=2}(\infty)}{r_0} \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \frac{1+h}{h} \arcsin \sqrt{\frac{h}{1+h}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right), \quad (39) \end{aligned}$$

以上结果是利用 (8) 式计算得到的, 即利用了

$$R_{\Delta y=2}(\infty) = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{\sqrt{(1+h-h\cos\theta)^2 - 1}} d\theta.$$

特别地, 当  $h = 1$  (即  $r = r_0$ ) 时, 由 (39) 式得到

$$R_{\Delta y=2}(\infty) = 2 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) r_0. \quad (40)$$

##### 4.3 一个新的三角恒等式

在图1所示的圆柱面电阻网络模型中, 文献[9]给出的 (1) 式与本文得到的 (2) 式在结构上是不同的, 即 (1) 式由倍求和表达, 而 (2) 式由单求和表达, 这说明同一个电阻网络两节点间的等效电阻可以有不同的表达式.

(1) 式是由  $m \times (n - 1) + 1$  个因式构成的结果, 而 (2) 式是由  $m$  个因式构成的结果, 由于 (1) 式与 (2) 式都来自相同的电阻网络模型, 因此 (1) 式与 (2) 式必然等价, 由此得到一个新的数学恒等式.

三角恒等式: 设  $\theta_k = \frac{k\pi}{m+1}, \phi_k = \frac{k\pi}{n}$ , 并且  $m, n$  为自然数,  $h$  为任意复数, 则有恒等式

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\left[ \cos \left( p + \frac{1}{2} \right) \theta_i - \cos \left( q + \frac{1}{2} \right) \theta_i \right]^2}{1 - \cos 2\phi_j + h(1 - \cos \theta_i)}$$



$$= \sum_{i=1}^m \frac{\left[ \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta_i - \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right]^2}{\sqrt{(1+h-h\cos\theta_i)^2-1}} \times \coth(n \ln \sqrt{\lambda_i}), \quad (41)$$

其中  $\lambda_i = 1+h-h\cos\theta_i + \sqrt{(1+h-h\cos\theta_i)^2-1}$ . 恒等 (41) 式的推导过程如下.

由 (1) 式与 (2) 式等价得到

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left[ \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta_i - \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right]^2}{h^{-1}(1-\cos 2\phi_j) + (1-\cos\theta_i)} = -(m+1)|p-q| + hn \sum_{i=1}^m \frac{\left[ \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta_i - \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right]^2}{\sqrt{(1+h-h\cos\theta_i)^2-1}} \times \coth(n \ln \sqrt{\lambda_i}), \quad (42)$$

根据文献 [26] 中的结论, 得到

$$\sum_{i=1}^m \frac{\left[ \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta_i - \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right]^2}{1-\cos\theta_i} = (m+1)|p-q|. \quad (43)$$

将 (43) 式代入 (42) 式即得到 (41) 式 (注意利用  $1-\cos 2\phi_n = 0$ ).

这里意外地收获了一个新的三角函数恒等式. 这是一个比较有趣的新发现, 因为这是从物理学的角度而不是数学的角度发现的. 人们可以简单地验证当  $m = 0, 1, 2$  及  $n = 0, 1, 2$  时的恒等式 (41) 式成立. 当然恒等式 (41) 式的正确性是必然的, 因为所有的计算和推导过程都是正确的和自洽的. 恒等式 (41) 式为数学工作者提供了一个新的研究课题, 有待于数学工作者开展应用研究. 下面给出恒等式 (41) 式的一个推论.

**推论** 在 (41) 式中取  $m = 1, p = 0, q = 1$ , 得到  $\phi_k = \frac{k\pi}{n}, \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ . 则恒等式 (41) 式退化为

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{h+1-\cos(2k\pi/n)} = \frac{\coth(n \ln \sqrt{\lambda})}{\sqrt{(1+h)^2-1}}, \quad (44)$$

其中  $n$  为自然数,  $\lambda = 1+h+\sqrt{(1+h)^2-1}$ . 容易验证当  $n = 1, 2$  时 (44) 式成立. (44) 式是一个很有趣的新的级数公式, 其适用于自然数  $n$  为有限和无限的情形, 此说明级数 (44) 式的左端是收敛的.

特别地, 如果取极限  $n \rightarrow \infty$ , 则得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \coth(n \ln \sqrt{\lambda}) = 1.$$

所以由恒等式 (44) 式取极限得到

$$\int_0^\pi \frac{1}{h+1-\cos 2\theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{(1+h)^2-1}}. \quad (45)$$

从 (44) 和 (45) 式可以发现 (41) 式确实比较有趣. 如果取  $m, n$  为其他一些特殊值还可以得到另外一些有趣的结果 (此处略).

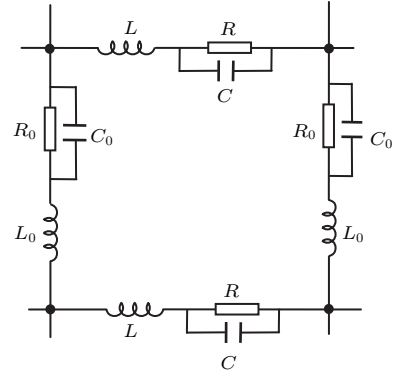


图3 含有复阻抗元素的 RLC 的复阻抗子网络单元  
Fig. 3. The unit RLC network with the impedance elements.

### 5 RLC 网络的等效复阻抗公式

由于图 1 网络中的单元电阻为任意元素, 因此图 1 网络中的元素也可以为复阻抗, 即理论公式 (2) 也适用于任意  $m \times n$  阶圆柱面复阻抗网络. 如果网络单元如图 3 所示, 当输入电压的圆频率为  $\omega$  时, 则电阻与阻抗的变换关系为

$$r = i\omega L + \frac{R}{1+i\omega CR},$$

$$r_0 = i\omega L_0 + \frac{R_0}{1+i\omega C_0 R_0}, \quad (46)$$

其中虚数单位  $i^2 = -1$ . 只要将 (46) 式代入 (2) 式就可以直接得到  $m \times n$  阶圆柱面复阻抗网络的等效复阻抗公式, 即

$$Z_{A_p A_q}(m, n) = \left( i\omega L + \frac{R}{1+i\omega CR} \right) \frac{1}{m+1} \times \sum_{i=1}^m \frac{\left[ \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\theta_i - \cos\left(q + \frac{1}{2}\right)\theta_i \right]^2}{\sqrt{(1+h-h\cos\theta_i)^2-1}} \times \coth(n \ln \sqrt{\lambda_i}), \quad (47)$$

其中  $\theta_i = i\pi/(m+1)$ , 以及

$$\lambda_i = 1 + h - h \cos \theta_i + \sqrt{(1 + h - h \cos \theta_i)^2 - 1}, \quad (48)$$

并且

$$h = r/r_0 = \frac{i\omega L + \frac{R}{1 + i\omega CR}}{i\omega L_0 + \frac{R_0}{1 + i\omega C_0 R_0}}. \quad (49)$$

当然, 由于(47)式含有复数, 而且参数(49)式是一个比较复杂的复数, 因此在实际应用中需要注意讨论  $\omega, R, L, C$  满足不同关系时的不同化简结果. 如可以采用复数分析

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \rho(\cos \phi_k + i \sin \phi_k), \\ \bar{\lambda}_k &= \rho(\cos \phi_k - i \sin \phi_k). \end{aligned} \quad (50)$$

人们可以采用文献[26]研究复阻抗的方法研究本文的问题, 由于采用复数分析研究不是本文的重点, 因此这里不再讨论.

## 6 总 结

采用RT方法研究了一类任意  $m \times n$  阶圆柱面电阻网络模型, 采用严格的理论计算与论证, 发现了圆柱面电阻网络的一个新的等效电阻(2)式, 所给出的结论是由单求和表达的简单结果, 并且给出了无穷和半无穷情形下的等效电阻(3), (5)—(8)式等. 本文的研究还附带得到了电阻网络支路电流的解析解, 这为计算任意节点的电位函数提供了方便. 之前的文献[9]采用Laplacian矩阵方法研究电阻网络的等效电阻时所给出的公式都是由倍求和表达的结果, 本文在与文献[9]中的相关结果进行对比研究时发现了一个新的三角函数恒等式(41)式, 同时给出了两个推论(44)和(45)式. 这些新的恒等式的发现很有趣, 因为这里的恒等式是由物理方法发现的而不是从数学得到的, 这为数学领域的级数研究提供了新的理论工具. 另外, 由于本文所研究的电阻网络模型中的单元电阻为任意元素, 因此理论(2)式也适用于任意  $m \times n$  阶圆柱面复阻抗网络. 本文采用直接变换的方法给出了等效复阻抗公式(47)式. 文中推导出的所有结论均为本文第一次给出, 是一次理论上的创新. 总而言之, 本文的

研究作为电阻网络模型研究提供了数个新的理论公式, 同时发现了一个新的数学恒等式, 这些公式可以应用于自然科学和工程计算领域.

## 参考文献

- [1] Kirchhoff G 1847 *Ann. Phys. Chem.* **148** 497
- [2] Kirkpatrick S 1973 *Rev. Mod. Phys.* **45** 574
- [3] Klein D J, Randi M 1993 *J. Math. Chem.* **12** 81
- [4] Jafarizadeh S, Sufiani R, Jafarizadeh M A 2010 *J. Stat. Phys.* **139** 177
- [5] József C 2000 *Am. J. Phys.* **68** 896
- [6] Giordano S 2005 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **33** 519
- [7] Asad J H 2013 *J. Stat. Phys.* **150** 1177
- [8] Asad J H 2013 *Mod. Phys. Lett. B* **27** 1350112
- [9] Wu F Y 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 6653
- [10] Tzeng W J, Wu F Y 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 8579
- [11] Izmailian N Sh, Kenna R, Wu F Y 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** 035003
- [12] Essam J W, Izmailian N S, Kenna R, Tan Z Z 2015 *Royal Society Open Science* **2** 140420
- [13] Izmailian N S, Kenna R 2014 *J. Stat. Mech.* **09** P09016
- [14] Izmailian N S, Kenna R 2015 *Chin. J. Phys.* **53** 040703
- [15] Tan Z Z 2011 *Resistance Network Model* (Xi'an: Xidian University Press) pp16—216 (in Chinese) [谭志中 2011 电阻网络模型 (西安: 西安电子科技大学出版社) 第16—216页]
- [16] Tan Z Z, Zhou L, Yang J H 2013 *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 195202
- [17] Tan Z Z, Zhou L, Luo D F 2015 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **43** 329
- [18] Tan Z Z 2015 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **43** 1687
- [19] Tan Z Z, Fang J H 2015 *Commun. Theor. Phys.* **63** 36
- [20] Tan Z Z, Essam J W, Wu F Y 2014 *Phys. Rev. E* **90** 012130
- [21] Essam J W, Tan Z Z, Wu F Y 2014 *Phys. Rev. E* **90** 032130
- [22] Tan Z Z 2015 *Chin. Phys. B* **24** 020503
- [23] Tan Z Z 2015 *Phys. Rev. E* **91** 052122
- [24] Tan Z Z 2015 *Sci. Reports* **5** 11266
- [25] Tan Z Z, Zhang Q H 2015 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **43** 944
- [26] Tan Z Z 2016 *Chin. Phys. B* **25** 050504
- [27] Zhuang J, Yu G R, Nakayama K 2014 *Sci. Reports* **4** 06720
- [28] Jia L P, Jasmina T, Duan W S 2015 *Chin. Phys. Lett.* **32** 040501
- [29] Wang Y, Yang X R 2015 *Chin. Phys. B* **24** 118902
- [30] Wang B, Huang H L, Sun Z Y, Kou S P 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 120301

# Calculation of the equivalent resistance and impedance of the cylindrical network based on recursion-transform method\*

Tan Zhi-Zhong<sup>1)†</sup> Zhang Qing-Hua<sup>2)</sup>

1) (Department of Physics, Nantong University, Nantong 226019, China)

2) (Department of Mathematics, Nantong University, Nantong 226019, China)

( Received 6 October 2016; revised manuscript received 12 January 2017 )

## Abstract

A classic problem in circuit theory first studied by German physicist Kirchhoff more than 170 years ago is the computation of resistances in resistor networks. Nowadays, resistor network has been an important model in the fields of natural science and engineering technology, but it is very difficult to calculate the equivalent resistance between two arbitrary nodes in an arbitrary resistor network. In 2004, Wu F Y formulated a Laplacian matrix method and derived expressions for the two-point resistance in arbitrary finite and infinite lattices in terms of the eigenvalues and eigenvectors of the Laplacian matrix, and the resistance results obtained by Laplacian matrix method is composed of double sums. The weakness of the Laplacian matrix approach is that it depends on the two matrices along two orthogonal directions. In 2011, Tan Z Z created the recursion-transform (RT) method, which can resolve the resistor network with arbitrary boundary. Using the RT method to compute the equivalent resistance relies on just one matrix along one direction, and the resistance is expressed by single summation.

In the present paper, we investigate the equivalent resistance and complex impedance of an arbitrary  $m \times n$  cylindrical network by the RT method. Firstly, based on the network analysis, a recursion relation between the current distributions on three successive vertical lines is established through a matrix equation. In order to obtain the eigenvalues and eigenvectors of the matrix, and the general solution of the matrix equation, we then perform a diagonalizing transformation on the driving matrix. Secondly, we derive a recursion relation between the current distributions on the boundary, and construct some particular solutions of the matrix equation. Finally by using the matrix equation of inverse transformation, we obtain the analytical solution of the branch current, and gain the equivalent resistance formula along the axis of the arbitrary  $m \times n$  cylindrical network, which consists of the characteristic root and expressed by only single summation. As applications, several new formulae of equivalent resistances in the semi-infinite and infinite cases are given. These formulae are compared with those in other literature, meanwhile an interesting new identity of trigonometric function is discovered. At the end of the article, the equivalent impedance of the  $m \times n$  cylindrical *RLC* network is also treated, where the equivalent impedance formula is also given.

**Keywords:** cylindrical network, recursion-transform method, analytical solution of equivalent resistance, trigonometric identity

**PACS:** 05.50.+q, 84.30.Bv, 89.20.Ff, 02.10.Yn

**DOI:** 10.7498/aps.66.070501

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK20161278).

† Corresponding author. E-mail: [tanz@ntu.edu.cn](mailto:tanz@ntu.edu.cn); [tanzzh@163.com](mailto:tanzzh@163.com)