

多个子玻色-爱因斯坦凝聚气体膨胀叠加形成的量子涡旋现象研究

董毕远 徐志君

Quantum vortex phenomenon of many sub-Bose-Einstein condensations formed by expansion and superposition

Dong Bi-Yuan Xu Zhi-Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 010501 (2018) DOI: 10.7498/aps.20171708

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20171708>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I1>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[应用粒子图像测试技术测量球床多孔介质单相流动的流场](#)

Measurement of single phase flow in porous media using PIV technique

物理学报.2016, 65(10): 106701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.106701>

[单模光腔中N个二能级原子系统的有限温度特性和相变](#)

Finite-temperature properties of N two-level atoms in a single-mode optic cavity and phase transition

物理学报.2015, 64(13): 130505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130505>

[非相对论弱相互作用玻色气体的有效场理论处理](#)

Effective field theory approach to the weakly interacting bose gas

物理学报.2014, 63(4): 040501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.040501>

[方势阱中凝聚体的孤子动力学行为](#)

Soliton dynamical behavior of the condensates trapped in a square-well potential

物理学报.2013, 62(11): 110501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.110501>

多个子玻色-爱因斯坦凝聚气体膨胀叠加形成的量子涡旋现象研究

董毕远 徐志君[†]

(浙江工业大学应用物理系, 杭州 310023)

(2017年7月25日收到; 2017年9月29日收到修改稿)

基于二维模型, 研究了多个子玻色-爱因斯坦凝聚气体在谐振势阱内膨胀叠加形成的量子涡旋现象. 运用传播子方法, 分析了对称分布的三个子玻色-爱因斯坦凝聚气体膨胀叠加形成宏观量子涡旋的物理过程, 得到量子涡旋随时间演化的规律; 发现涡旋核分布在谐振势阱内出现振荡; 涡旋与反涡旋随时间演化而相互转变, 并对这些现象进行了物理分析.

关键词: 玻色凝聚气体, 谐振势阱, 波函数, 量子涡旋

PACS: 05.30.Jp, 67.85.-d, 67.25.dk

DOI: 10.7498/aps.67.20171708

1 引言

自1995年首次实现弱相互作用原子系统的玻色-爱因斯坦凝聚(Bose-Einstein condensation, BEC)^[1-3]以来, 有关BEC的研究发展迅速. 1997年, BEC相干性获得了验证^[4], 接着观察到了一系列新现象, 如约瑟夫森效应^[5,6]、涡旋^[7-10]、超冷费米原子气体等^[11,12]. 其中量子涡旋现象的研究引起了特别关注^[13-19], 比如涡旋与反涡旋形成的机制研究^[20]、由涡旋引起的量子振荡^[21]现象的产生以及涡旋与涡旋相互作用^[22]等已成为近期研究的热点. 本文在Ruben和Paganin^[23]基于Gross-Pitaevskii方程, 运用数值计算方法研究多个子BEC(many sub-BECs)在自由空间演化叠加形成的量子涡旋的基础上, 运用传播子理论, 在一定近似条件下, 用解析的方法研究了对称分布的三个子BEC在弱磁阱中叠加形成的量子涡旋现象. 将我们的研究方法运用到自由空间, 所得结论与Ruben和Paganin的数值模拟结果一致, 表明本方法的可靠性. 在谐振势阱内, 得到了一些新的现象, 如量子涡旋核随着时间演化产生振荡, 其振荡频率就是谐振势的频率, 而且形成的涡旋与反涡旋的分布会随时间演化而相互转变. 最后对所得到的新现

象进行了物理分析和讨论.

2 物理模型

以二维模型为研究对象, 也就是典型的碟形BEC系统, 即凝聚体横向受到较弱的谐振势作用, 而轴向受到很强的囚禁势束缚, 从而使凝聚气体轴向分量被冻结在基态, 形成典型的碟形BEC系统. 实验上将一定形状和强度的激光束打到二维BEC上^[24], 可将BEC分割为多个子BEC, 调节激光束的强度, 还可改变各子BEC间的相位关系. 然后关闭激光束, 让这些子BEC在谐振势阱内膨胀, 观察多个子BEC叠加所产生的量子涡旋现象. 设谐振势为

$$V_{\text{ext}} = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2), \quad (1)$$

其中 m 为原子质量, ω 为径向谐振频率.

相比分割BEC的激光束强度, 谐振势是很弱的, 因此, 可忽略谐振势对各子BEC初始分布的影响. 若把分割激光束形成的势能近似为简谐势, 则初始各子BEC的分布可近似为高斯分布, 即

$$\psi_{0j}(\mathbf{r}') = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\alpha^2(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{0j})^2}{2}\right] \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

[†] 通信作者. E-mail: xzj@zjut.edu.cn

其中 $\alpha = \sqrt{m\omega'/\hbar}$, ω' 是激光束等效简谐势的谐振频率; $\hbar = h/2\pi$ 为约化普朗克常数; \mathbf{r}_{0j} 是第 j 个子 BEC 初始中心位置.

关闭激光束后, 多个子 BEC 开始在外加二维谐振势阱中膨胀叠加, 由于势阱弱, 子 BEC 膨胀时, 可忽略原子间的相互作用, 因此, 此后波函数随时间的演化可近似用传播子来描述. 在二维谐振势阱中的传播子为

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \left[\frac{m\omega}{2\pi\hbar i \sin \omega(t-t')} \right] \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega(t-t')} \times [(|\mathbf{r}'|^2 + |\mathbf{r}|^2) \cdot \cos \omega(t-t') - 2|\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}|] \right\}, \quad (3)$$

式中的 i 是虚数单位, 则第 j 个子 BEC 随时间演化的波函数为

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}'t') \cdot \psi_{0j}(\mathbf{r}', t') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (4)$$

设初始时刻 $t' = 0$, 第 j 个子 BEC 波函数初相位为 ϕ_j . 将 (2) 和 (3) 式代入 (4) 式, 并引入参量 $\sigma = \omega/\omega'$, 直接积分可得第 j 个子 BEC 的宏观含时波函数为

$$\begin{aligned} \psi_j(\mathbf{r}, t) &= \frac{\sqrt{\frac{m\omega \cdot \sigma}{\pi\hbar}}}{i \sin \omega t (\sigma - i \cot \omega t)} \cdot \exp \left[-\frac{m\omega \cdot \sigma}{2\hbar(\sigma^2 \cdot \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} \right. \\ &\quad \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0j} \cdot \cos \omega t)^2 \left. \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar(\sigma^2 \cdot \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} \right. \\ &\quad \times [\sigma^2 \cdot \sin \omega t (\mathbf{r}_{0j}^2 \cdot \cos \omega t - 2\mathbf{r}_{0j} \cdot \mathbf{r}) \\ &\quad \left. + \cot \omega t (\sigma^2 \cdot \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t - 1) \cdot \mathbf{r}^2] + i\phi_j \right\} \\ &\quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (5)$$

得到各子 BEC 随时间演化的宏观波函数, 就能进一步研究相位涡旋形成的物理机制.

3 涡旋形成机制分析

为便于利用数值计算显示涡旋的形成, 将 (5) 式进行无量纲化, 做如下变换:

$$\begin{aligned} t &= \tilde{t}/\omega, \\ \mathbf{r} &= \tilde{\mathbf{r}} \cdot a_0, \quad \mathbf{r}_{0j} = \tilde{\mathbf{r}}_{0j} \cdot a_0, \quad a_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}, \end{aligned}$$

$$\psi = \tilde{\psi} \cdot b_0, \quad b_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}, \quad (6)$$

即 t 用 ω^{-1} 做单位, $|\mathbf{r}|$ 用 a_0 做单位, 并将 ψ 用 $\tilde{\psi} \cdot b_0$ 进行归一化. 于是带波浪线的变量为无量纲变量, 方程 (5) 可简化为

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_j(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) &= \frac{\sqrt{\sigma}}{i \sin \tilde{t} (\sigma - i \cot \tilde{t})} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{\sigma}{\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t}} (\tilde{\mathbf{r}} - \cos \tilde{t} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{0j})^2 \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t}} \right. \\ &\quad \times [\sigma^2 \cdot \sin \tilde{t} (\cos \tilde{t} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{0j}^2 - 2\tilde{\mathbf{r}}_{0j} \cdot \tilde{\mathbf{r}} \\ &\quad \left. + \cot \tilde{t} (\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t} - 1) \cdot \tilde{\mathbf{r}}^2] + i\phi_j \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

有了方程 (7), 就可解析地研究各子 BEC 膨胀叠加形成涡旋的物理机制. 为便于深入分析和计算, 考虑对称分布的三个子 BEC 的叠加情况. 即有

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) &= \sum_{j=1}^3 \tilde{\psi}_j(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{\sigma}}{i \sin \tilde{t} (\sigma - i \cot \tilde{t})} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{\sigma}{\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t}} (\tilde{\mathbf{r}} - \cos \tilde{t} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{0j})^2 \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t}} \right. \\ &\quad \times [\sigma^2 \cdot \sin \tilde{t} (\cos \tilde{t} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{0j}^2 - 2\tilde{\mathbf{r}}_{0j} \cdot \tilde{\mathbf{r}} \\ &\quad \left. + \cot \tilde{t} (\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t} - 1) \cdot \tilde{\mathbf{r}}^2] + i\phi_j \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

取三个子 BEC 的初始位置为 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1.73)$, 即初始为正三角分布, 如图 1 所示.

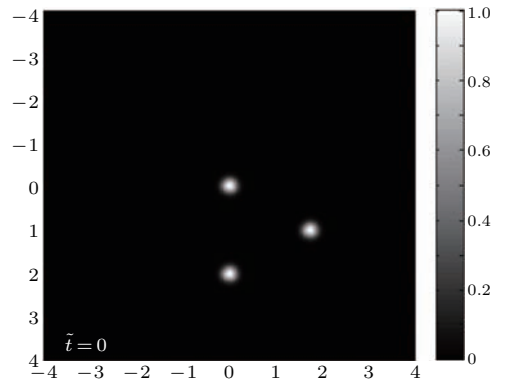


图 1 三个子 BEC 初始分布情形

Fig. 1. Three initial distribution of the sub-Bose condensed gas.

不失一般性, 设初相位均为零, 取 $\sigma = 20$, 可将由方程 (8) 得到的 BEC 密度和相位随时间的演化用图 2 显示出来. 图中灰度值越小, 对应气体密度越大; 而相位图中从亮到暗对应相位取值从 π 变

化到 $-\pi$, 在相位图中围绕某一点顺时针或逆时针绕行一周, 相位取值从 π 逐步变化到 $-\pi$, 那么此点便是涡旋核的位置, 对应密度图中密度等于零的位置, 比如图 2 (b) 中的 A 点.

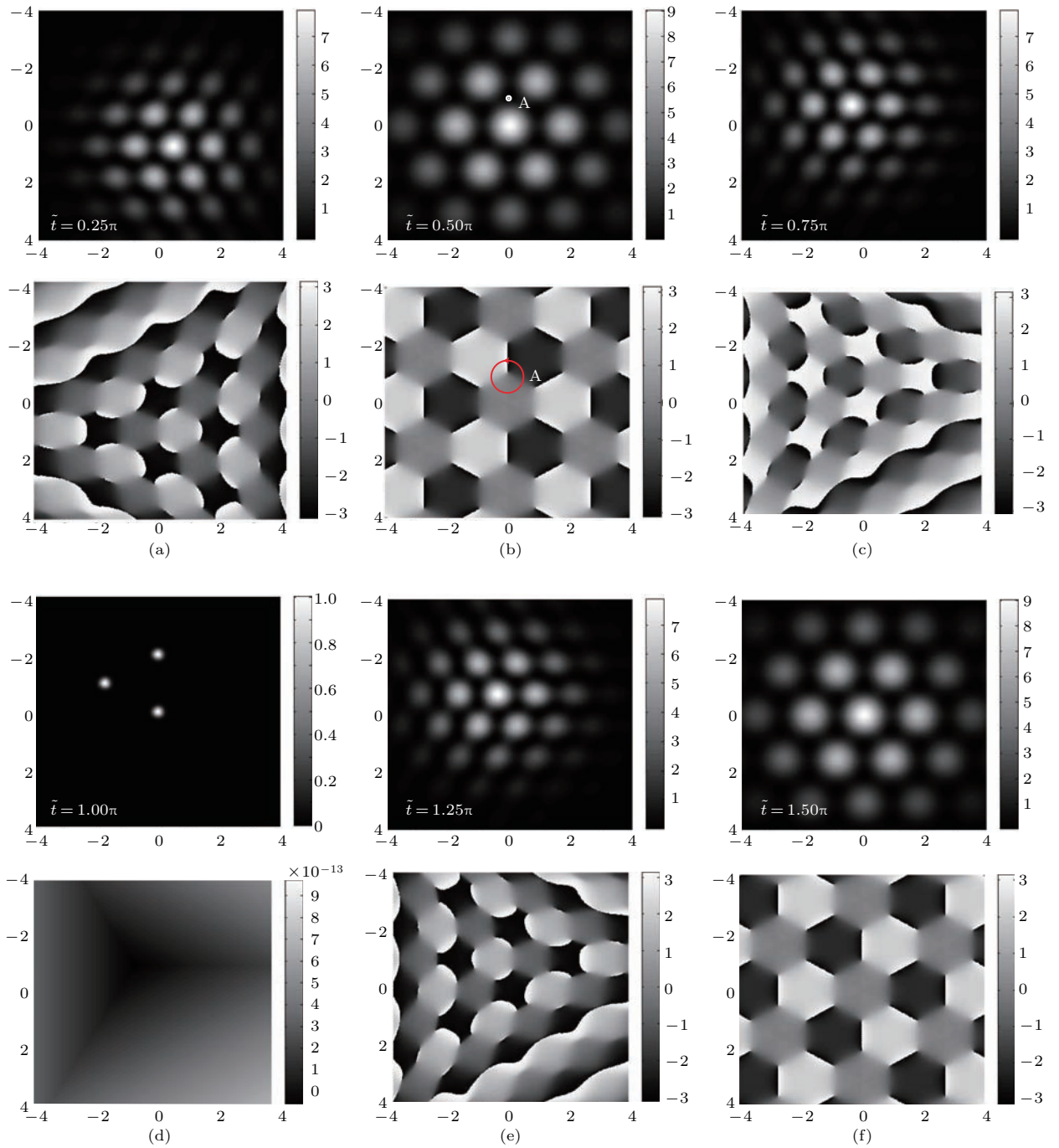


图 2 BEC 密度和相位随时间的演化 从 (a)—(f) 相应的演化时间为 $0.25\pi, 0.5\pi, 0.75\pi, \pi, 1.25\pi, 1.5\pi$

Fig. 2. The time evolution of the BEC density and phase diagram: the evolution time from (a) to (f) is $0.25\pi, 0.5\pi, 0.75\pi, \pi, 1.25\pi, 1.5\pi$.

图 2 表明, 形成的量子涡旋核呈六边形蜂窝形分布, 其涡旋核位置随时间周期性振荡, 振荡频率恰好为谐振势阱的频率. 当 $\tilde{t} = 0.5\pi$ (四分之一周期), 涡旋核分布在距初始点距离极大

值处 (图 2 (b)), 之后三个子 BEC 收缩到与初始分布对称的位置, 即位于 $(0, 0), (-2, 0), (-1, -1.73)$ 处, 完成半个周期振荡 ($\tilde{t} = \pi$, 图 2 (d)); 后半周期重复前半周期的振荡, 三个子 BEC 最终

会回到初始(0, 0), (2, 0), (1, 1.73) (图1), 完成一个周期振荡. 从密度图分析, $\tilde{t} = 0.75\pi$ (图2(c))与 $\tilde{t} = 1.25\pi$ (图2(e))时刻, $\tilde{t} = 0.5\pi$ (图2(b))和 $\tilde{t} = 1.5\pi$ (图2(f))时刻, 涡旋核位置分布情况没有区别, 但从相位图看, 两者对应的涡旋方向相反(详见图3), 因此, 前后半个周期, 演化情况并不相同.

为进一步分析涡旋形成的特点, 由方程(8)可以求得体系的粒子流密度

$$j_0 = \frac{\hbar}{2mi} [\Psi^* (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \nabla \Psi (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) - \Psi (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \nabla \Psi^* (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})]. \quad (9)$$

不妨将(7)式中振幅因子与相位因子分开, 改写为

$$\psi_j (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = A_j (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \cdot \exp[i\chi_j (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})], \quad (10)$$

其中

$$A_j (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = \frac{\sqrt{\sigma}}{i \sin \tilde{t} (\sigma - i \cot \tilde{t})} \times \exp \left[-\frac{\sigma}{\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t}} \times (\tilde{\mathbf{r}} - \cos \tilde{t} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{0j})^2 \right],$$

$$\chi_j (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = \frac{1}{\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t}} \times [\sigma^2 \cdot \sin \tilde{t} (\cos \tilde{t} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{0j}^2 - 2\tilde{\mathbf{r}}_{0j} \cdot \tilde{\mathbf{r}}) + \cot \tilde{t} (\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t} - 1) \cdot \tilde{r}^2] + \phi_j.$$

这样粒子流密度可以表示为

$$j_0 = A^2 (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \frac{\hbar}{m} \sum_{j=1}^3 \nabla \chi_j (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}). \quad (11)$$

定义粒子流速度

$$v_s = \frac{j_0}{A^2} = \frac{\hbar}{m} \sum_{j=1}^3 \nabla \chi_j (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}), \quad (12)$$

发现有

$$\nabla \times v_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \times \nabla \left[\sum_{j=1}^3 \chi_j (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \right] \equiv 0, \quad (13)$$

即标量场梯度的旋度为零. 定义一个环流量

$$K = \oint v_s \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} \Delta \sum_{j=1}^3 \chi_j (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}), \quad (14)$$

由无旋性质可知 K 值与路径的选择无关. 由波函数的周期性边界条件可知

$$\Delta \sum_{j=1}^3 \chi_j (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = 2\pi l, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots, \quad (15)$$

当 $l = 0$ 时, 没有涡旋, $l \neq 0$ 有涡旋. 即三个子 BEC 的相图矢量形成闭合三角形时, 就会有涡旋产生. 将 $l > 0$ 形成的涡旋记为正涡旋, $l < 0$ 形成的涡旋记为反涡旋. 由(15)式可以判断涡旋是否形成.

本文讨论的相位涡旋形成是基于三个不同子 BEC (即相当于三个存在一定相位关系的物质波波源) 的膨胀叠加, 当它们间的相位满足一定条件时便能形成涡旋核. 因此, 这与通过对 BEC 旋转等方式产生的涡旋机制不同. 对超流系统旋转是否形成

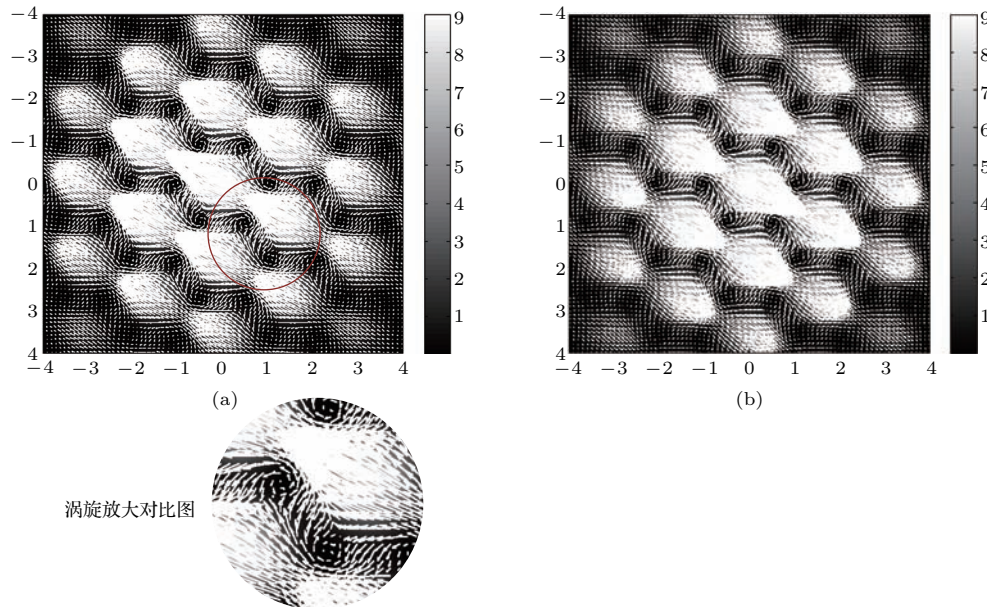


图3 密度与粒子流密度叠加图 (a) $\tilde{t} = 0.5\pi$; (b) $\tilde{t} = 1.5\pi$

Fig. 3. Density function and particle flow density diagram: (a) $\tilde{t} = 0.5\pi$; (b) $\tilde{t} = 1.5\pi$.

涡旋, 可通过计算超流体系环流量来判定. 对相位涡旋的形成, 本文引入粒子流密度, 类似地借助定义环流量的概念, 利用波函数的周期性边界条件得到判定涡旋存在的 (15) 式. 这与超流涡旋形成判定条件的数学依据是一样的, 只不过本文体现在三个子BEC 相位叠加为 2π 的整数倍, 而超流则体现在体系环路积分对应的相位角变化量为 2π 的整数倍. 从数学角度来看, 两者是等价的.

将由 (9) 式决定的粒子流密度叠加在密度图上, 得到在 $\tilde{t} = 0.5\pi$ 和 $\tilde{t} = 1.5\pi$ 时刻的涡旋分布图, 如图 3 所示. 从图中清晰可见涡旋与反涡旋的存在以及凝聚原子在谐振势的作用下出现整体流动的情况. 在同一时刻, 邻近涡旋旋转方向相反, 在两个时间点相加为 2π 的不同时刻, 涡旋核位置相同, 但涡旋旋转方向相反. 涡旋与反涡旋与体系中各相位矢量间的夹角有关 (详见图 4), 或者与方程 (15) 中 l 的正负号有关. 出现这种现象可以联立 (7) 和 (15) 式来解释. 若假设在 $(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$ 处产生涡旋, 且为正涡旋. (15) 式可以写为

$$\begin{aligned} & \Delta \sum_{j=1}^3 \chi_j(\tilde{r}, \tilde{t}) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{1}{(\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t})} \\ & \quad \times [\sigma^2 \cdot \sin \tilde{t} (\cos \tilde{t} \cdot \tilde{r}_{0j}^2 - 2\tilde{r}_{0j} \cdot \tilde{r}) \\ & \quad + \cot \tilde{t} (\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t} - 1) \cdot \tilde{r}^2] \\ &= 2\pi l \quad (l = 1, 2, 3 \dots). \end{aligned} \quad (16)$$

现在取某时刻 $\tilde{t}' = 2\pi - \tilde{t}$, 代入 (16) 式并化简

$$\begin{aligned} & \Delta \sum_{j=1}^3 \chi_j(\tilde{r}, \tilde{t}' = 2\pi - \tilde{t}) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{-1}{(\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t})} \end{aligned}$$

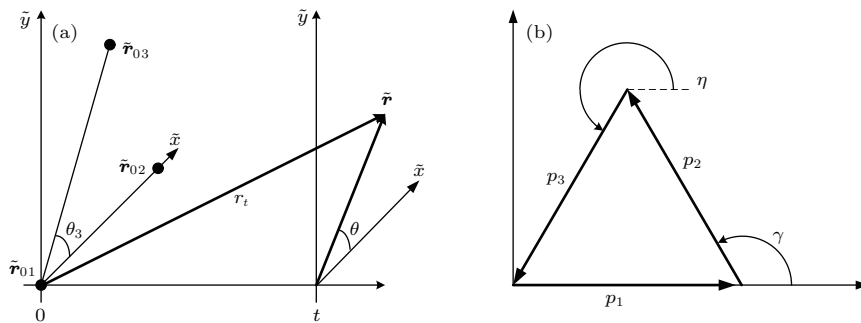


图 4 BEC 分布及叠加示意图 (a) 各子 BEC 中心位置及演化时空坐标; (b) 振幅矢量叠加示意图

Fig. 4. The diagram of BEC distributed and superimposed: (a) The center position of each sub-BEC and the evolutionary of space-time coordinates; (b) the diagram of superimposed of amplitude vector.

$$\begin{aligned} & \times [\sigma^2 \cdot \sin \tilde{t} (\cos \tilde{t} \cdot \tilde{r}_{0j}^2 - 2\tilde{r}_{0j} \cdot \tilde{r}) \\ & + \cot \tilde{t} (\sigma^2 \cdot \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t} - 1) \cdot \tilde{r}^2] \\ &= -2\pi l \quad (l = 1, 2, 3 \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

与 (16) 式相比, 即形成与其对应的反涡旋. 因此, 当演化时间满足 $\tilde{t}' = 2\pi - \tilde{t}$ 关系时, 涡旋核位置相同, 而对应的涡旋演变成反涡旋.

4 涡旋核的振荡分析

接下来解释涡旋核分布振荡的现象. 针对三个子BEC 初始位置以正三角形分布于 $(0, 0), (2, 0), (1, 1.73)$ 处, 并设三个子BEC 初始相位相同, 波函数振幅相同. 振幅项中因为三个子BEC 扩散的时间相同, 所以 \tilde{t} 变量应该取相同值; BEC 在相对其最大扩散极限的谐振子内扩散时, 近似有 $|\tilde{r} - \tilde{r}_{0j} \cdot \cos \tilde{t}| \leq |\tilde{r}_{\max} - \tilde{r}_{0j} \cdot \cos \tilde{t}|$, 因此, 可以认为 (10) 式振幅项中的指数项差别可以考虑不计. 利用上面推导涡旋形成条件 (15) 式可以写出涡旋核满足的方程式为

$$\begin{aligned} & 1 + \exp[i\alpha(\cos \tilde{t} \cdot \tilde{r}_{02}^2 - 2\tilde{r}_{02} \cdot \tilde{r} \cdot \cos \theta)] \\ & + \exp\{i\alpha[\cos \tilde{t} \cdot \tilde{r}_{03}^2 - 2\tilde{r}_{03} \cdot \tilde{r} \cdot \cos(\theta - \theta_3)]\} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\alpha = \frac{400 \sin \tilde{t}}{400 \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t}}$, θ 是极角, θ_3 是矢量 \mathbf{r}_{03} 与极轴的夹角. 这相当于代表三个子BEC 的三个振幅矢量 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ (大小相等) 叠加刚好形成一个闭合三角形, 这也是从相图上表明有涡旋产生. 假定逆时针闭合时涡旋为正, 那么顺时针闭合时为反涡旋. 由于各子BEC 在有限空间中传播时, 振幅变化可近似认为相等. 图 4 给出了各子BEC 的初始位置与演化的时空位置 (a) 和振幅矢量叠加图 (b), 记其中的相位项为 γ, η , 则有

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha(\tilde{r}_{02}^2 \cdot \cos \tilde{t} - 2\tilde{r}_{02}\tilde{r} \cdot \cos \theta) \\ &= \frac{2\pi}{3} + 2m\pi, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \alpha[\tilde{r}_{03}^2 \cdot \cos \tilde{t} - 2\tilde{r}_{03}\tilde{r} \cdot \cos(\theta - \theta_3)] \\ &= \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 m 和 n 均是整数. 在确定 m, n 后可以改写 $\theta \rightarrow \theta_{mn}, \tilde{r} \rightarrow \tilde{r}_{mn}$.

将 (20) 和 (19) 式相比可得如下关系式:

$$\frac{\tilde{r}_{03}}{\tilde{r}_{02}}(\cos \theta_3 + \tan \theta_{mn} \sin \theta_3) = \frac{\tilde{r}_{03}^2 - \beta N(n)}{\tilde{r}_{02}^2 - \beta M(m)}, \quad (21)$$

其中 $\beta = \frac{1}{3\alpha \cos \tilde{t}} = \frac{400 \sin^2 \tilde{t} + \cos^2 \tilde{t}}{1200 \sin \tilde{t} \cdot \cos \tilde{t}}$, $M(m) = 2\pi(1 + 3m)$, $N(n) = 2\pi(2 + 3n)$. 利用 (21) 式可以算出

$$\theta_{mn} = \arctan \left[\frac{1}{\sin \theta_3} \left(\frac{\tilde{r}_{03} - \frac{\beta N(n)}{\tilde{r}_{03}}}{\tilde{r}_{02} - \frac{\beta M(m)}{\tilde{r}_{02}}} \right) - \cot \theta_3 \right]. \quad (22)$$

将 (22) 式代入 (20) 式, 可以得到

$$\tilde{r}_{mn} = \frac{\alpha \cdot \tilde{r}_{03}^2 \cdot \cos \tilde{t} - \frac{4\pi}{3} - 2n\pi}{2\tilde{r}_{03} \cdot \cos(\theta_{mn} - \theta_3)}. \quad (23)$$

在给定如下参数的情形下, 即取初始位置为 $(0, 0), (2, 0), (0, 1.73)$, $\theta_3 = \pi/3$, 不考虑初相位, 且 $n = m = 0$ (即 $l = 1$ 情形的涡旋核), 可以给出涡旋核随时间演化的分布图像, 如图 5 所示.

因为考虑到图 5 是所有 $l = 1$ 情形的涡旋核随时间演化的分布图像, 故不考虑图中振幅大小的意义, 而是考虑核振荡的周期与谐振势的振荡周期之间的关系. 结果可以看到涡旋核的振荡, 考虑到涡旋核旋转的方向, 其核振荡的周期与谐振势的振荡周期是相同的.

取相同初始条件, 可以给出 $n = m = -1$ (即 $l = -1$ 情形的涡旋核), 涡旋核随时间演化的分布图像, 如图 6 所示.

通过对比图 5 (b) 和图 6 (b) 可以发现有一个偏移量, 这个偏移量的大小就是六边格子分布的涡旋与邻近反涡旋间的距离.

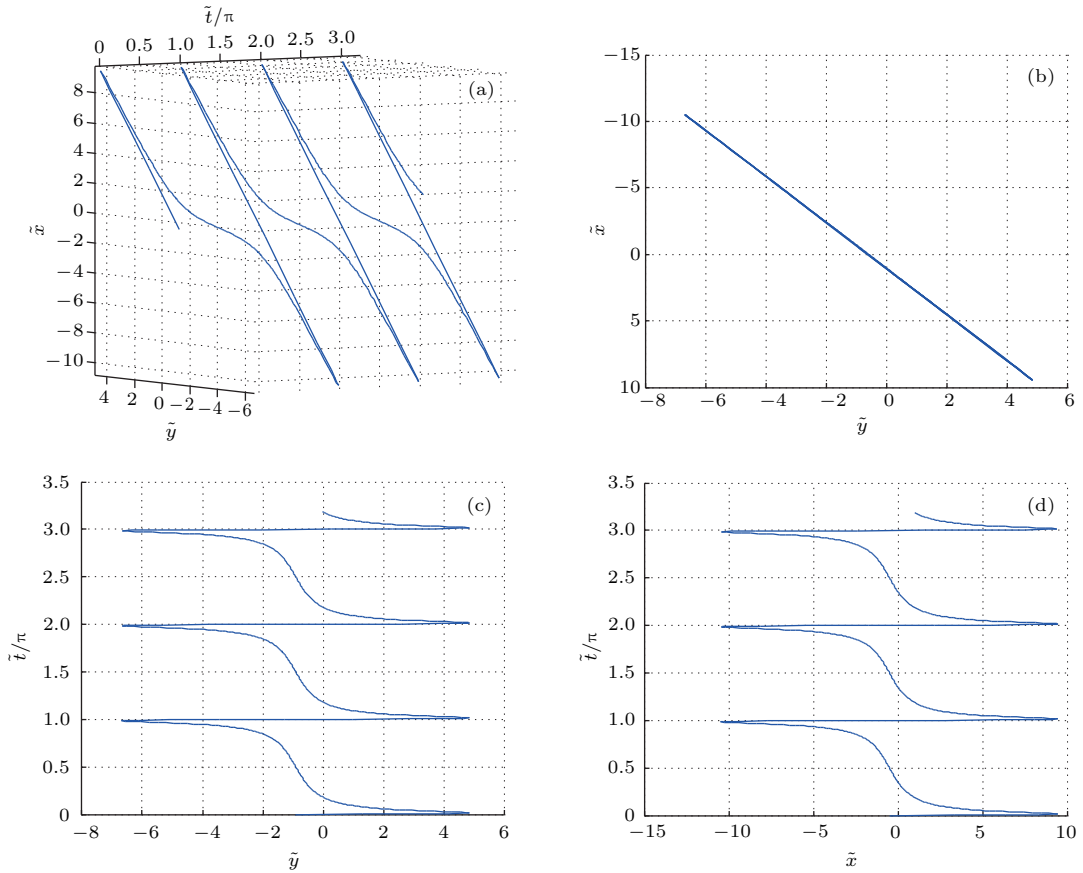


图 5 涡旋核随时间的变化 (a) $(x-y-t)$ 视图; (b) $(x-y-0)$ 视图; (c) $(0-y-t)$ 视图; (d) $(x-0-t)$ 视图

Fig. 5. Diagram of vortex core with time: (a) $(x-y-t)$ view; (b) $(x-y-0)$ view; (c) $(0-y-t)$ view; (d) $(x-0-t)$ view.

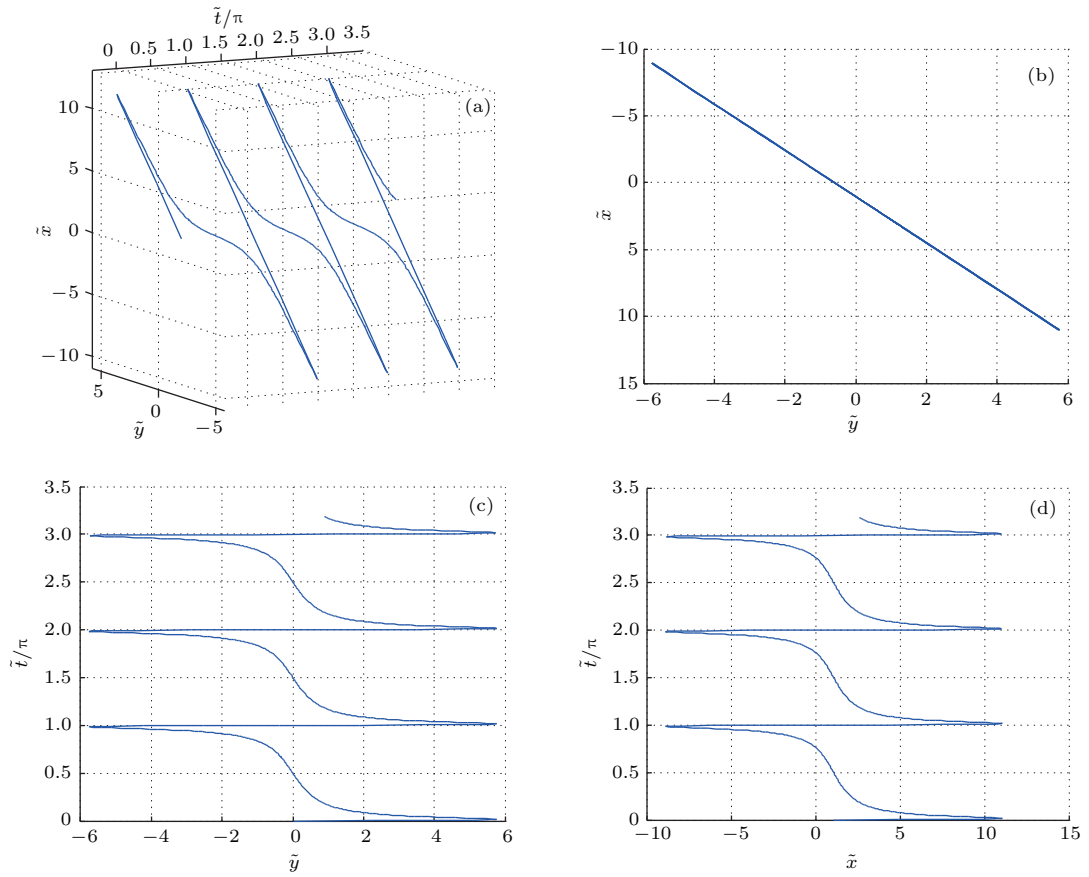


图6 涡旋核随时间的变化 (a) $(x-y-t)$ 视图; (b) $(x-y-0)$ 视图; (c) $(0-y-t)$ 视图; (d) $(x-0-t)$ 视图

Fig. 6. Diagram of vortex core with time: (a) $(x-y-t)$ view; (b) $(x-y-0)$ view; (c) $(0-y-t)$ view; (d) $(x-0-t)$ view.

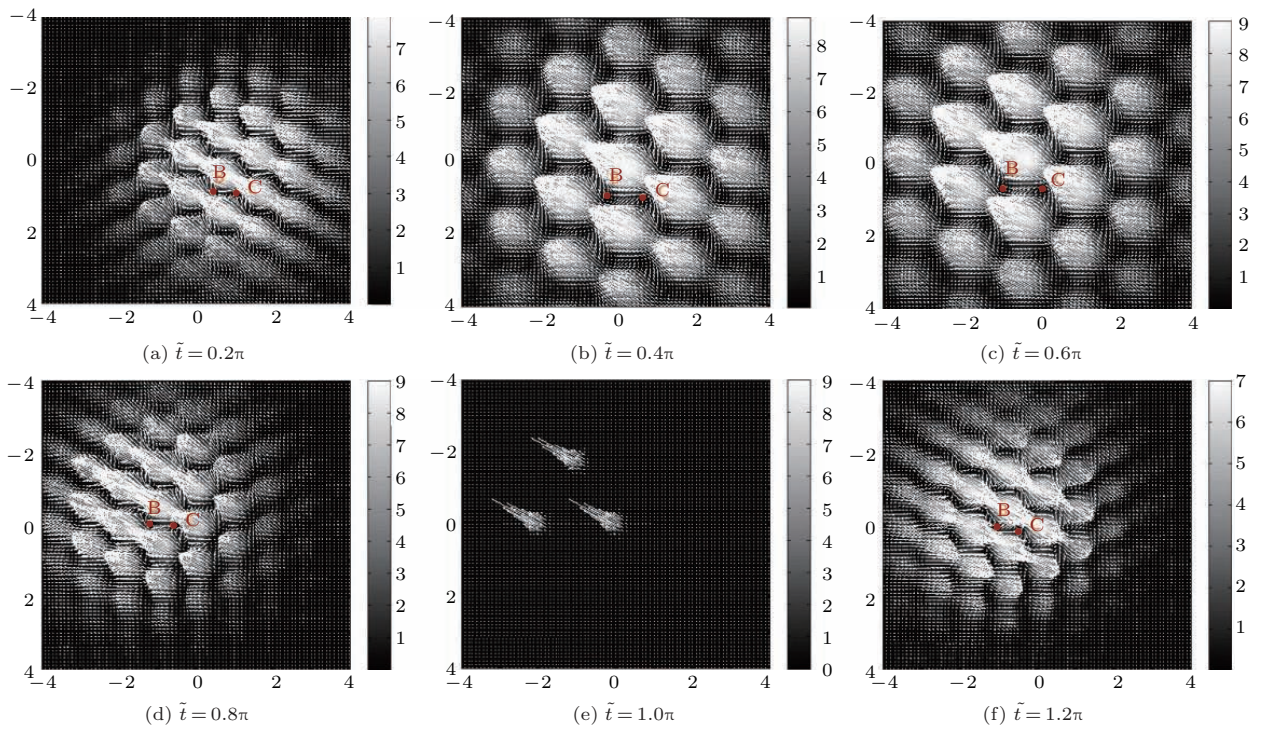


图7 密度与粒子流密度叠加图 (a)–(f) 相应的演化时间为 $0.2\pi, 0.4\pi, 0.6\pi, 0.8\pi, \pi, 1.2\pi$

Fig. 7. Density function and particle flow density diagram: the evolution time from (a) to (f) is: $0.2\pi, 0.4\pi, 0.6\pi, 0.8\pi, \pi, 1.2\pi$.

通过一系列其他时刻的粒子流密度矢量图(如图7所示)来分析涡旋核位置随时间的演化. 在图7中跟踪两个涡旋核, 标记B点是顺时针涡旋核, C点是逆时针涡旋核. 通过观察图7(a)—(d)中B点涡旋核的运动轨迹, 可以得到与图5中时间取0到 π 的轨迹是一致的, 振幅大小不同是为了得到(18)式, 将振幅项做了近似导致的. 从图7(f)可以得到B点的涡旋方向变成逆时针, 而C点的涡旋方向变成顺时针, 这满足前面推导的涡旋反涡旋转化规律. 涡旋核运动轨迹还是沿着原路径直线返回, 从而形成一个周期振荡. 这与图5中时间取 π 到 2π 的轨迹一致, 但是方向相反, 其中方向相反可以由初始位置的改变得到解释. 当时间从 π 开始取时, 三子BEC初始位置变化为原点对称处, 即 $\tilde{r}_{01} = \tilde{r}'_{-01}$, $\tilde{r}_{02} = -\tilde{r}'_{02}$, $\tilde{r}_{03} = -\tilde{r}'_{03}$, 代入(22)式 θ_{mn} 不变, 而代入(23)式有 $\tilde{r}_{mn} = -\tilde{r}'_{mn}$, 故与图5中时间取 π 到 2π 的轨迹一致, 方向相反.

5 结 论

基于当前实验普遍采用的二维模型, 构建多个子BEC在二维空间膨胀叠加的物理模型, 在谐振近似下, 以高斯分布来构造子BEC初始波函数, 然后用传播子方法解析求解出波函数在弱谐振势阱中随时间的演化. 本文着重研究了对称分布的三个子BEC膨胀叠加形成涡旋的情况, 得到子BEC融合形成的涡旋随时间演化的规律. 涡旋核分布随着子BEC在谐振势阱内膨胀而出现振荡, 其振荡频率与谐振势的频率相同; 同时, 还出现涡旋与反涡旋对, 在演化的同一时刻, 近邻涡旋方向总是相反的, 而不同演化时刻, 涡旋方向也会出现转化, 特别是演化时间满足 $\tilde{t}' = 2\pi - \tilde{t}$ 关系时, 涡旋核位置相同, 而对应的涡旋旋转方向相反. 对这一现象, 从量子涡旋的基本规律出发进行了解释和探讨. 特别是引入粒子流密度, 采用类似超流涡旋的思想, 计算了环量, 分析了涡旋形成的机制. 应用本文的研究思路和方法, 可方便推广到多于三个子BEC叠加形成涡旋机制的研究, 也可讨论各子BEC有不同初始相位差时对涡旋的影响等, 均可得到一些有意义的结果. 这一模型在实验上也比较容易实现. 因此, 本文的研究对实验工作也有启示意义.

参考文献

- [1] Davis K B, Mewes M, Anderson M R, Druten N J, Durfee D S 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [2] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [3] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J, Hulet R G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687
- [4] Andrews M R, Townsend C G, Miesner H J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1997 *Science* **275** 637
- [5] Burnett K 1998 *Science* **282** 1657
- [6] Anderson B P, Kascvich M A 1998 *Science* **282** 1686
- [7] Matthews M R, Anderson B P, Haljan P C, Hall D S, Wieman C E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 2498
- [8] Xu Z J, Shi J Q, Lin G C 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 666 (in Chinese) [徐志君, 施建青, 林国成 2007 物理学报 **56** 666]
- [9] Bloch I 2005 *Nature* **434** 23
- [10] Lundh E, Pethick C J, Smith H 1998 *Phys. Rev. A* **58** 4816
- [11] Fölling S, Gerbier F, Widera A, Mandel O, Gericke T, Bloch I 2005 *Nature* **434** 481
- [12] Cheng L C, Meng Z M, Wang P J 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 083701 (in Chinese) [陈良超, 孟增明, 王鹏军 2017 物理学报 **66** 083701]
- [13] Madison K W, Chevy F, Wohlleben W 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 806
- [14] Leanhardt A E, Shin Y, Kielpinski D, Pritchard D E, Ketterle W 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 140403
- [15] Scherer D R, Weiler C N, Neely T W, Anderson B P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 110402
- [16] Kläui M, Vaz C A F, Lopezdiaz L, Bland J A C 2003 *J. Phys.: Condens. Matter* **15** R985
- [17] Talos D M, Follett P L, Folkerth R D, Fishman R E, Trachtenberg F L 2007 *New J. Phys.* **9** 95
- [18] Glover G M C, Fitzpatrick J J 2007 *Chem. Eng. J.* **127** 11
- [19] Li Y Q, Li X G, Liu Z Y, Luo P Y, Zhang P M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6178 (in Chinese) [李永青, 李希国, 刘紫玉, 罗培燕, 张鹏鸣 2007 物理学报 **56** 6178]
- [20] Sakaguchi H, Li B, Malomed BA 2014 *Phys. Rev. E* **89** 032920
- [21] Villaseñor B, Zamora-Zamora R, Bernal D, Romero-Rochín V 2013 *Phys. Rev. A* **89** 1964
- [22] Wells T, Lode A U J, Bagnato V S, Tsatsos M C 2015 *J. Low Temp. Phys.* **80** 1
- [23] Ruben G, Paganin D M 2007 *Phys. Rev. E* **75** 066613
- [24] Scherer D R, Weiler C N, Neely T W, Anderson B P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 110402

Quantum vortex phenomenon of many sub-Bose-Einstein condensations formed by expansion and superposition

Dong Bi-Yuan Xu Zhi-Jun[†]

(Department of Applied Physics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China)

(Received 25 July 2017; revised manuscript received 29 September 2017)

Abstract

Based on the two-dimensional model, the formation mechanism of quantum vortex by the expansions and superpositions of the many sub-Bose-Einstein condensations (BECs) in the weak harmonic trap is studied. In the harmonic approximation, the initial wave function of the sub-BEC is Gaussian function. Once the initial wave function is known, by using the propagation method, the time evolution of the wave function for the sub-BECs could be obtained. The physical processes of the macroscopic quantum vortex formed by the symmetric distribution of the three sub-BEC expansions and superpositions are analyzed, and the law of quantum vortex with time evolution is obtained. It is found that the vortex distribution is oscillatory in the harmonic trap, and vortex and anti-vortex are mutually transformed in time. At the same time of evolution, the vortex direction is always opposite to that of the neighbor vortex, and at different evolutionary times t and t' , which satisfy a relation of $t + t' = T$ (period of harmonic trap), the position of vortex nucleus is unchanged, but the vortex is transformed into the anti-vortex. These basic phenomena of quantum vortex are explained and discussed. In particular, in this paper we also introduce the particle flow density, calculate the flow circulation of our system, and analyze the mechanism of vortex formation. The research ideas and methods in this paper are easily to be extended to the study about the vortex formed by more than three sub-BEC expansions and superpositions, and they can also be used to discuss the effects of sub-BECs with different initial phase differences. This model is also easier to implement in experiment. Therefore, the research of this paper also has enlightenment to the experimental work.

Keywords: Bose-condensed gas, harmonic trap, wave function, quantum vortex

PACS: 05.30.Jp, 67.85.-d, 67.25.dk

DOI: 10.7498/aps.67.20171708

[†] Corresponding author. E-mail: xzj@zjut.edu.cn