基于忆阻器的多涡卷混沌系统及其脉冲同步控制

闫登卫 王丽丹 段书凯

Memristor-based multi-scroll chaotic system and its pulse synchronization control

Yan Deng-Wei Wang Li-Dan Duan Shu-Kai

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 67, 110502 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20180025
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180025
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I11

离子迁移忆阻混沌电路及其在语音保密通信中的应用
Chaotic circuit of ion migration memristor and its application in the voice secure communication
物理学报.2015, 64(21): 210507 http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210507

基于忆阻器的多涡卷混沌系统及其脉冲同步控制*

闫登卫[1)2)] 王丽丹[1)2)†] 段书凯[1)2)]

1) (非线性电路与智能信息处理重庆市重点实验室, 重庆 400715)

2) (西南大学电子信息工程学院, 重庆 400715)

(2018 年 1 月 3 日收到; 2018 年 2 月 19 日收到修改稿)

忆阻器是一种具有记忆功能和纳米级尺寸的非线性元件, 作为混沌系统的非线性部分, 能够提高混沌系统的信号随机性和复杂度. 本文基于增广 Lü 系统设计了一个三维忆阻混沌系统. 仅仅通过改变系统的一个参数, 该系统能产生单涡卷、双涡卷和四涡卷的混沌吸引子, 说明该系统具有丰富的混沌特性. 首先对该忆阻混沌系统的基本动力学行为进行了理论分析和数值仿真, 如平衡点稳定性、对称性, Lyapunov 指数和维数, 分岔图和 Poincare 截面等. 同时, 建立了模拟该忆阻混沌系统的 SPICE (simulation program with integrated circuit emphasis) 电路, 给出了不同参数下的电路实验相图, 其仿真结果与数值分析相符, 从而验证了该忆阻混沌系统的混沌产生能力. 由于脉冲同步只在离散时刻传递信息, 能量消耗小, 同步速度快, 易于实现单信道传输, 因而在混沌保密通信中更具有实用性. 因此, 本文从最大 Lyapunov 指数的角度实现了该忆阻混沌系统的脉冲混沌同步, 数值仿真证实了忆阻混沌系统的存在性以及脉冲同步控制的可行性, 为进一步研究该忆阻混沌系统在语音保密通信和信息处理中的应用提供了实验基础.

关键词: 忆阻器, 混沌吸引子, SPICE 电路, 脉冲混沌控制

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Pq, 05.45.Vx, 05.45.Xt **DOI:** 10.7498/aps.67.20180025

1 引 言

1971 年, 美国加州大学伯克利分校华裔科学家 Chua [1] 从理论上预测了描述电荷和磁通关系元件的存在性, 并定义这类元件为忆阻器. 忆阻器是一种有记忆功能的非线性电阻, 可以记忆流经它的电荷的数量, 通过控制电流的变化可改变其阻值. 由于现实中没有发现这类器件, 所以长期以来关于忆阻器和忆阻电路的研究没有引起科学界和工程界的重视. 直到 2008 年 Hewlett-Packard (HP) 实验室研制了第一个纳米级忆阻器实物模型 [2], 并从实验角度给出了其记忆机理, 忆阻值与流过其的电荷或磁通量有关, 由此激起了人们开展忆阻器全方位研究的兴趣 [3]. 忆阻器的出现为电子电路的设计与应用开拓了全新的发展空间. 由于忆阻器具有记忆功能, 其潜在的应用价值引起了国内外学者的广泛关注. 忆阻器将在计算机科学 [4]、生物工程 [5]、神经网络 [6−8]、电气工程 [9]、通信工程 [10] 等领域展现出诱人的应用前景.

一般来说, 电路的非线性是混沌产生的必要条件. 忆阻器作为可调控的非线性器件, 加上其具有体积小、功耗低等特点, 非常适合应用于高频混沌电路. 而高频混沌信号在图像加密、混沌保密通信中具有广泛的应用前景, 因此, 采用忆阻器构造混沌电路得到了研究人员的密切关注. 2008 年, Itoh 和 Chua [11] 采用磁通控制的分段线性忆阻器模型替换蔡氏电路中的非线性元件, 导出两类忆阻器混沌振荡. Bharathwaj 和 Kokate [12] 将分段线性模型的忆阻器替换蔡氏二极管, 并分析了该替换后系统的动力学特性, 结果显示其体现出来的混

* 国家自然科学基金 (批准号: 61571372, 61672436)、中央高校基本科研业务费 (批准号: XDJK2016A001, XDJK2017A005) 和重庆市基础科学与前沿技术研究 (批准号: cstc2017jcyjBX0050) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ldwang@swu.edu.cn

沌特性比经典蔡氏电路更为复杂. 随后的2010年, Muthuswamy [13] 不仅成功利用三次方忆阻器构成了混沌系统, 而且第一次利用有源器件实现了该电路. 在数值仿真过程中对其余的3个变量做了尺度变换, 而保持磁通尺度不变. 尺度变换以后, 利用两个乘法器、一个放大器和电容电阻就可以完成忆阻器搭建. 与此同时, 国内的研究人员也开展了相应的研究. Bao等 [14] 对忆阻器混沌电路进行了深入的研究探讨, 利用光滑模型的磁控忆阻器实现了一系列新的蔡氏和类蔡氏忆阻混沌电路, 通过理论研究和实验分析得出了一系列重要的结论, 如: 忆阻型混沌系统的平衡点与其忆阻器本身的状态变量有关, 当系统含一个忆阻器其平衡点对应为一个点集, 含两个忆阻器其平衡点则对应一个平面; 忆阻器混沌电路的动力学特性与忆阻器的初始状态密切相关 [15], 存在瞬态混沌及状态转移等复杂的动力学现象 [16]. Wang等 [17] 利用忆阻器的非线性特性, 成功推导出一个磁控忆阻器, 并将其应用于混沌系统中, 得到了基于该忆阻器的混沌系统. 上述研究极大地推进了忆阻器混沌电路的发展, 同时详细介绍了忆阻器所带来的新的混沌动力学特性. 随着混沌理论在实际工程中的应用越来越广泛, 如何更好地利用忆阻器的非线性以及设计各类新型忆阻型混沌电路成为研究重点 [18−25].

与已有的混沌同步方法相比, 脉冲混沌同步法仅在离散时刻向响应系统施加脉冲信号, 使得一些不具备连续耦合条件或者不能承受连续扰动的系统可以在脉冲耦合条件下达到同步; 另一方面, 这种离散耦合方式大大降低了驱动系统与响应系统之间的信息传输率, 应用于混沌压缩感知可有效实现测量信号的降采样, 是混沌压缩感知技术中的关键环节 [26]. 近年来, 研究者对脉冲同步做了许多的研究工作. 例如, Itoh等 [27] 提出了混沌系统及超混沌系统达到脉冲同步所需要的条件; Li 和Liao [28] 使用小幅度脉冲实现了超混沌系统的完全同步和时延同步; Wang等 [29] 分析了一类连续系统的脉冲控制和同步; Ren 和Zhao [30] 用自适应反馈法实现了耦合混沌系统的脉冲同步. 但以上的方法缺乏通用性, 对不同系统需要具体问题具体分析, 并且所获得的实现同步的充分条件较为苛刻, 将大部分较宽松的条件排除在外. 而从最大Lyapunov指数的角度实现脉冲混沌同步的充分条件则相对简单. 因此, 本文基于增广Lü系统设计了基于忆阻器的多涡卷混沌系统, 利用最大Lyapunov指数的方法实现了忆阻脉冲混沌同步, 数值仿真证实了忆阻混沌系统的存在性以及脉冲同步控制的可行性, 对促进忆阻器应用和发展具有重要的意义.

本文在增广Lü系统中引入忆阻器和一个立方项, 得到了一个基于忆阻器的三维混沌系统, 该系统具有结构简单的代数结构, 包含两个非线性项、一个忆阻器和一个立方项. 随后, 仅仅通过改变系统的一个参数得到了单涡卷、双涡卷和四涡卷的混沌吸引子. 接着, 通过平衡点的稳定性、对称性, Lyapunov指数和维数, 分岔图和Poincare截面分析了系统的基本动力学特性, 数值仿真和理论分析一致. 然后, 建立了模拟该系统的SPICE(simulation program with integrated circuit emphasis) 电路, SPICE的仿真结果与数值分析相符, 从而验证了该系统的混沌产生能力. 最后, 介绍了从最大Lyapunov指数的方法实现脉冲混沌同步的理论, 数值模拟实验证明了该方法的有效性.

2 基于忆阻器的混沌系统及其基本动力学分析

2.1 基于忆阻器的混沌系统模型

已有的三维增广Lü系统的数学模型为 [31]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -[ab/(a+b)x] - yz, \\ \dot{y} = ay + xz, \\ \dot{z} = bz + xy, \end{cases} \tag{1}$$

式中a, b为负实常数, 其典型取值为$a = -10$, $b = -4$. 设初始值为(x_0, y_0, z_0), 当$z_0 \geqslant 0$时, 系统(1)所描述的系统产生一个双翼混沌吸吸引子, 如图1 (a) 和图1 (b) 中蓝色部分所示; 当$z_0 < 0$时, (1)式所描述的系统产生一个双翼的下吸引子, 如图1 (a) 和图1 (b) 中红色部分所示.

在此基础上构造的基于忆阻器的三维混沌系统, 其状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + byz - wf(-|y|), \\ \dot{y} = y + xz - cy^3, \\ \dot{z} = dz - xy, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $x, y, z \in \mathbb{R}$; a, b, c, d, w为系统的参数; $f(\cdot)$为系统的非线性项, 满足忆阻器与磁通之间的关

系[17]:

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{y-c_3}{R_{\text{off}}}, & y<c_5,\\ \dfrac{\sqrt{2ky+M^2(0)}-M(0)}{k}, & c_5\leqslant y<c_6,\\ \dfrac{y-c_4}{R_{\text{on}}}, & y\geqslant c_6,\end{cases}\tag{3}$$

其中

$$\begin{cases}C_3=-\dfrac{(R_{\text{off}}-M(0))^2}{2k},\\ C_4=-\dfrac{(R_{\text{on}}-M(0))^2}{2k},\\ C_5=\dfrac{R_{\text{off}}^2-M(0)^2}{2k},\\ C_6=\dfrac{R_{\text{on}}^2-M(0)^2}{2k},\end{cases}\tag{4}$$

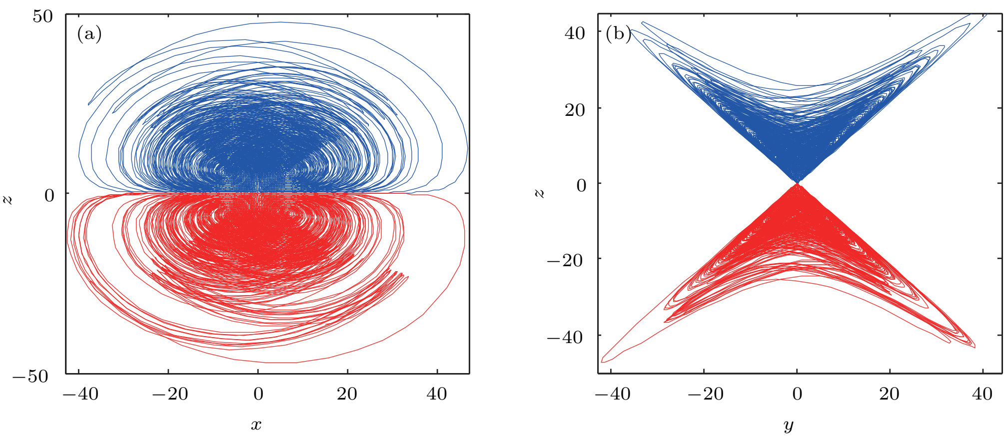

图1 增广Lü系统共存的上吸引子和下吸引子 (a) x-z 平面; (b) y-z 平面

Fig. 1. The coexistence of the upper and lower attractors of three-dimensional chaotic augmented Lü system: (a) x-z plane; (b) y-z plane.

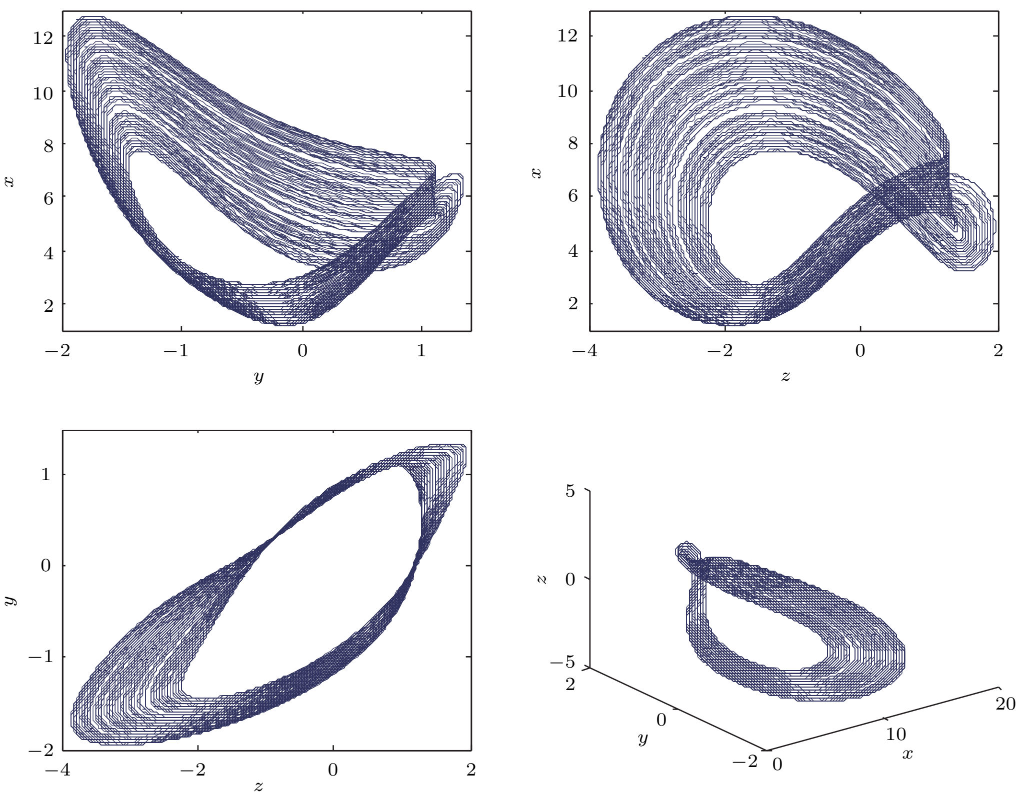

图2 $w=25000$ 时系统(2)的单涡卷混沌吸引子

Fig. 2. The single-scroll chaotic attractor of the system (2) when $w=25000$.

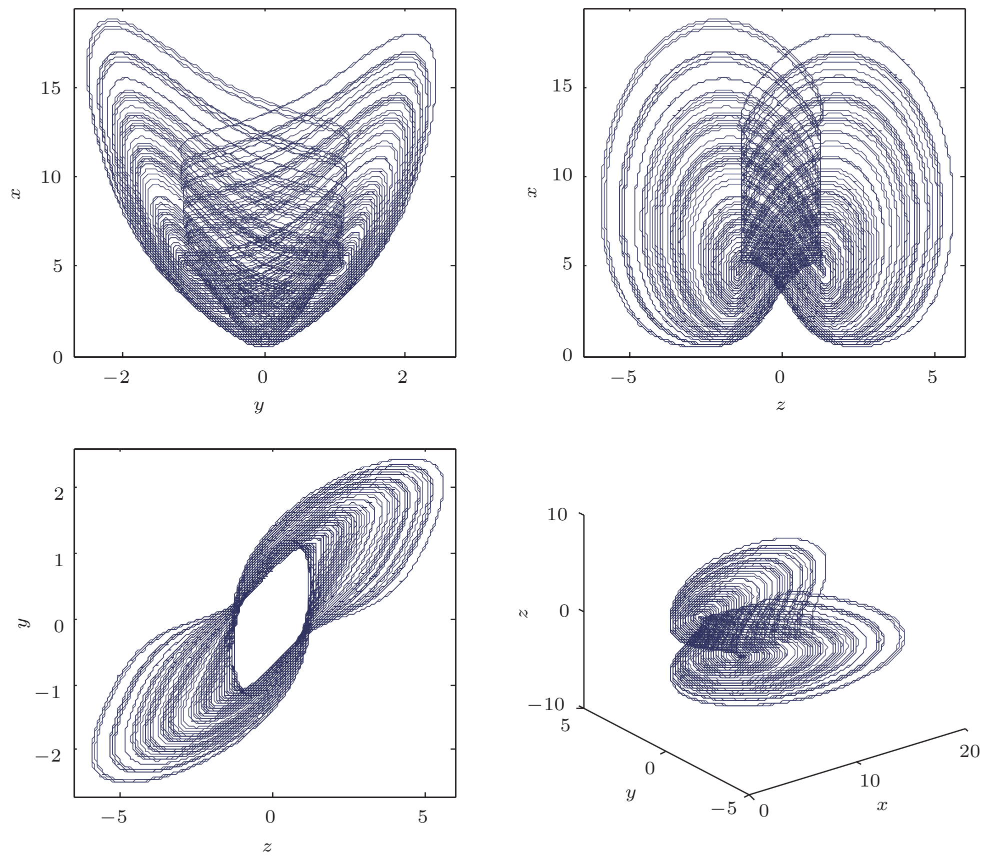

图 3 $w = 10000$ 时系统 (2) 的双涡卷混沌吸引子

Fig. 3. The double-scroll chaotic attractor of the system (2) when $w = 10000$.

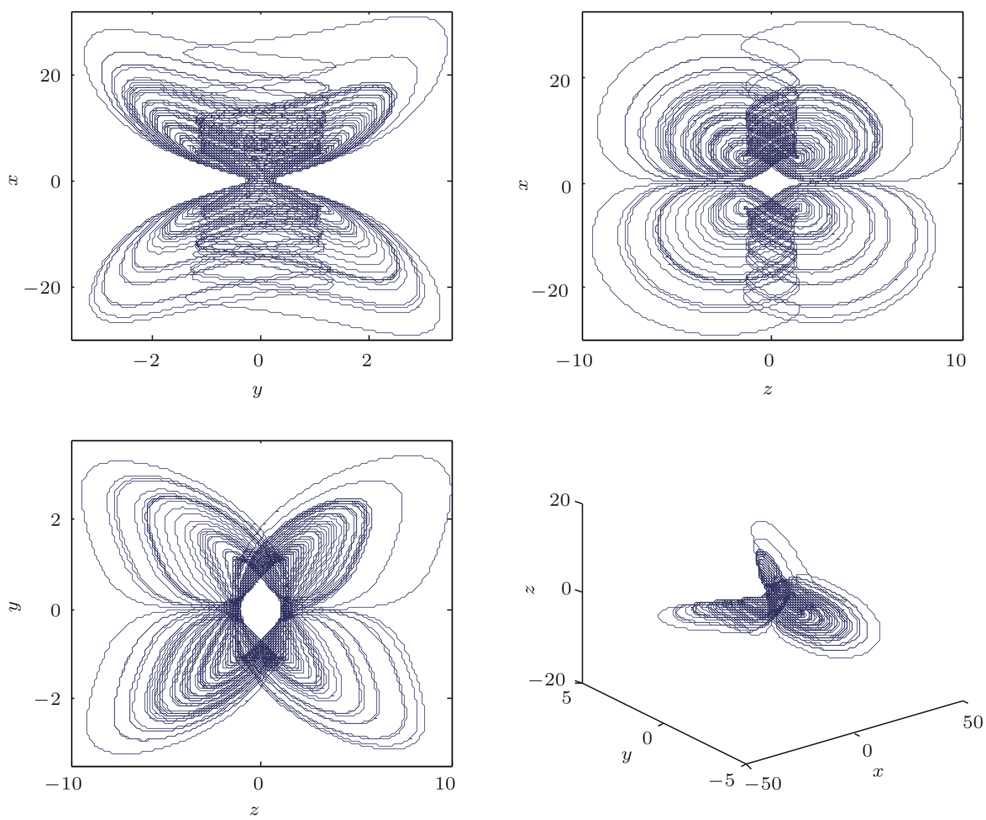

图 4 $w = 2000$ 时系统 (2) 四涡卷的混沌吸引子

Fig. 4. The four-scroll chaotic attractor of the system (2) when $w = 2000$.

y是忆阻器的输入磁通, $M(0)$表示忆阻器的初始值, D为薄膜的厚度, $R_{\rm off}$ 和$R_{\rm on}$分别表示忆阻器的两个极限值, $u_{\rm v}$表示氧空缺的平均移动量, $M(0)$为忆阻器的初始状态为16000, $R_{\rm off}=20\ {\rm k\Omega}$, $R_{\rm on}=100\ \Omega$, $D=10\ {\rm nm}$, $u_{\rm v}=10^{-14}\ {\rm m^2{\cdot}s^{-1}{\cdot}v^{-1}}$, k为常数,

$$k=\frac{(R_{\rm on}-R_{\rm off})-u_{\rm v}R_{\rm on}}{D^2}. \tag{5}$$

选取初始值为$(x,y,z)=(-0.1,-0.1,-0.1)$. 参数$a=2$, $b=8.2$, $c=5$, $d=3$确定参数, 当参数w分别等于2000, 10000 和25000时, 设置仿真时间为1000 s, 采用四阶龙格库塔法进行数值仿真, 得到单涡卷、双涡卷和四涡卷混沌吸引子, 分别如图2、图3和图4所示. 可知系统(2)的混沌吸引子轨线在特定的吸引域内具有遍历性.

将该系统与增广Lü系统相比较, 发现两个系统均具有形式相似的简单代数方程的结构, 但系统(2)的第三个方程为对应的增广Lü系统方程的镜像, 且在第一个方程中引入了磁控忆阻器, 在第二个方程中的增加了y^3项. 在下面的动力学分析和数值模拟中, 除了特别说明之外, 都以双涡卷的混沌吸引子进行分析.

2.2 忆阻混沌系统动力学分析

2.2.1 对称性分析

系统(2)有自然的对称性, 即做变换$(x,y,z)\to(-x,y,-z)$后, 系统保持不变. 变化可表示为

$$P:R^3\to R^3,\ X\to PX,\ P=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}, \tag{6}$$

它满足$f(PX)=Pf(X)$, 即在y轴的反射下, 系统是不变的, 并且对称性对所有的系统参数都保持不变.

2.2.2 平衡点稳定性分析

为求解系统的平衡点, 令参数$a=2$, $b=8.2$, $c=5$, $d=3$, $w=10000$. 并且方程组为:

$$\begin{aligned}-2x+8.2yz-10000f(-|y|)&=0,\\ y+xz-5y^3&=0,\\ 3z-xy&=0.\end{aligned} \tag{7}$$

由(3)式可知, $f(-|y|)$为分段函数, 所以要分段求解它的平衡点.

1) 当$y<c_5$ 即$y<-0.3618$时, 经计算, (7)式有7个平衡点, 分析计算得到的结果如表1所列. 由表1可知, 满足要求的平衡点有3 个, 分别是S_2, S_5, S_7.

表1 当$y<c_5$时(7)式的平衡点

Table 1. Equilibrium point of formula (7) when $y<c_5$.

平衡点	状态变量 x	y	z
S_1	0.0100	0	0
S_2	2.6625	−0.8201	−0.7278
S_3	−2.6782	0.8235	−0.7352
S_4	−0.1408	0.4486	−0.0210
S_5	0.1690	−0.4493	−0.0253
S_6	2.9595	0.8854	0.8734
S_7	−2.9719	−0.8881	0.8798

2) 当$y<-c_5$, $y>0$即$y<0.3618$, $y>0$时, 经计算, 系统也有7个平衡点, 分析计算得到的结果如表2所列. 由表2可知, 由于y值中正数最小的J_4都要比$-c_5$大,因此没有满足要求的平衡点.

表2 当$y<-c_5$, $y>0$时(7)式的平衡点

Table 2. Equilibrium point of formula (7) when $y<c_5$, $y>0$.

平衡点	状态变量 x	y	z
J_1	0.0100	0	0
J_2	2.9595	−0.8854	−0.8734
J_3	−2.9719	0.8881	−0.8798
J_4	0.1690	0.4493	0.0253
J_5	−0.1408	−0.4486	0.0210
J_6	2.6625	0.8201	0.7278
J_7	−2.6782	−0.8235	0.7352

此外, 当$y>c_5$, $y<0$或者$y>-c_5$时, 计算出$y=0$, 不满足条件. 因此, 总共满足要求的系统的平衡点有3个, 分别为S_2, S_5, S_7. 在平衡点处得到系统(2)的雅可比矩阵为:

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}-a&bz-wf(|y|)/dt&by\\z&1-3y^2c&x\\-y&-x&d\end{bmatrix}. \tag{8}$$

根据每一个平衡点对应的雅可比矩阵计算出相应的特称值, 相关结果如表3所列. 根据平衡点与稳定性的关系, 可知平衡点S_5为指标1的鞍点, 平衡点S_2 和S_7是产生涡卷前提的鞍焦点.

由上述的分析可知, 系统 (2) 有一个不稳定的鞍点和两个鞍焦点, 从理论上证明了该系统有存在双涡卷混沌吸引子的可能.

表 3 当 $w = 10000$ 时各个平衡点对应的特征值

Table 3. Specific value of each equilibrium point when $w = 10000$.

S_2	S_5	S_7
0.6217 + 2.158i	2.6365	0.6947 + 2.617i
0.6217 − 2.158i	−1.644	0.6947 − 2.617i
0.6947 + 2.617i	−2.029	0.6947 − 2.617i

2.3 忆阻混沌系统数值仿真分析

2.3.1 时域波形图和功率谱图分析

采用Matlab仿真得到系统 (2) 的 x 时域波形图, 如图 4 所示. 由图 4 可看到在不带随机因素的非线性确定性系统中出现的随机现象, 这正是混沌运动的现象. 另外, 系统 (2) 的功率谱是连续谱, 如图 5 所示. 图 5 中没有明显的波峰, 且序列的频谱很宽, 也说明系统 (2) 是混沌系统.

2.3.2 Poincare截面分析

Poincare映射是一种分析复杂动力学系统的经典途径, 对于一个系统是否为混沌系统, 可以从Poincare 截面上的点分布情况来进行判定, 此截面对于认识混沌系统吸引子形成以及马蹄映射奠定了基础. 若Poincare截面上的点是成片的具有分形结构的密集点时, 可以判定系统为混沌系统, 反之, 则不是混沌系统. 对于本文提出的忆阻器的混沌系统 (2), 取平面 $x = 5$, $y = 0$, 得到相应的Poincare截面如图 6 所示, 可判定系统 (2) 为混沌系统.

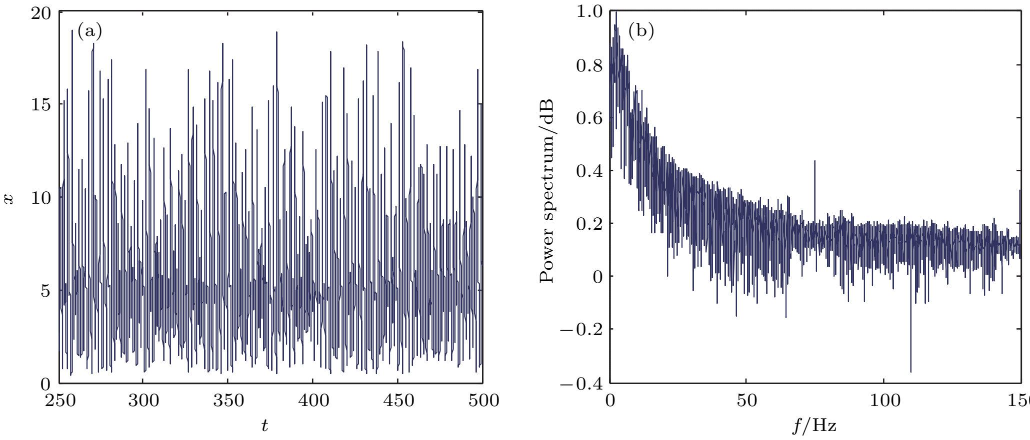

图 5 系统 (2) 的时域图和功率谱 (a) 时域图; (b) 功率谱

Fig. 5. Time domain waveform and power spectrum of system (2): (a) Time domain waveform; (b) power spectrum.

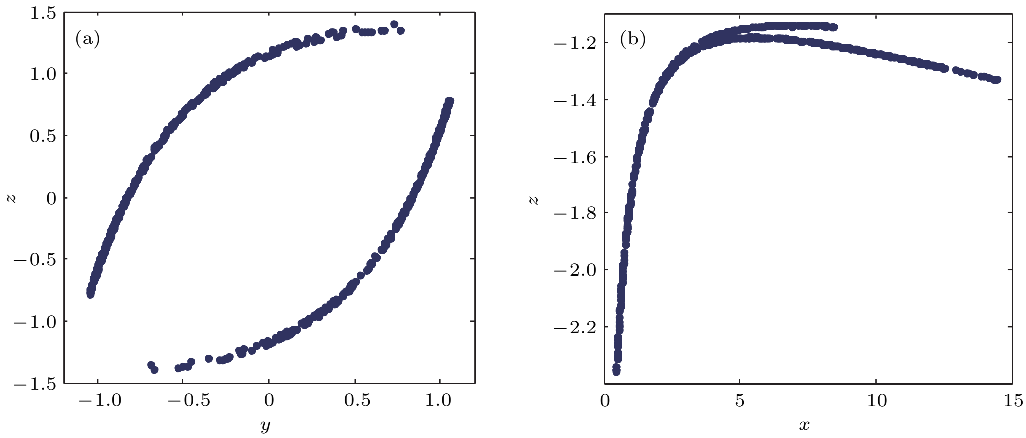

图 6 系统 (2) 的 Poincare 截面 (a) $x = 5$; (b) $y = 0$

Fig. 6. Poincare section of the system (2): (a) $x = 5$; (b) $y = 0$.

2.3.3 Lyapunov 指数和维数

Lyapunov指数是定量描述轨线相互排斥和相互吸引的特征值,系统的最大Lyapunov指数是判定混沌系统的重要特征. 混沌吸引子相邻轨线之间呈现出彼此相互排斥的趋势, 并以指数速率相互分离. 得到Lyapunov指数谱如图7所示. 计算最大Lyapunov指数的方法有很多种, 这里采用的是雅可比矩阵的方法计算出3个Lyapunov指数分别为: $L_1 = 1.05$, $L_2 = 0.05$, $L_3 = -13.84$, 其中一个指数为正,一个指数趋于0, 一个指数为负, 且满足$L_1 < L_3$. 第一个条件表明在相空间某一方向上相邻轨道呈指数率分离, 系统对初值极为敏感, 这是混沌突出的特称; 第二个条件是混沌吸引子周期性的表现, 其周期为无穷大; 第三个条件表明系统的相体积是收缩的, 从而确保系统在整体上的稳定性. 说明该吸引子为奇怪吸引子, 其运动是混沌的. 忆阻混沌系统的Lyapunov维数为

$$D_l = k + \frac{S_k}{|L_K|} = 2 + \frac{(L_1 + L_2)}{|L_3|} = 2.1005. \quad (9)$$

可见系统出现分数维, 说明系统(2)具有复杂的分形结构. 混沌吸引子的分形性质不仅仅表示的是非周期轨道, 它还会使附近的轨线发生分岔现象. 对于所有的奇怪吸引子, 由不同的初值条件得到的轨迹会很快到达吸引域, 但是相邻的两条轨线不会互相靠近, 它们很快会沿着不同的路径发散, 在吸引子中形成分数维. 因此, 的确有混沌现象存在于该动力系统中.

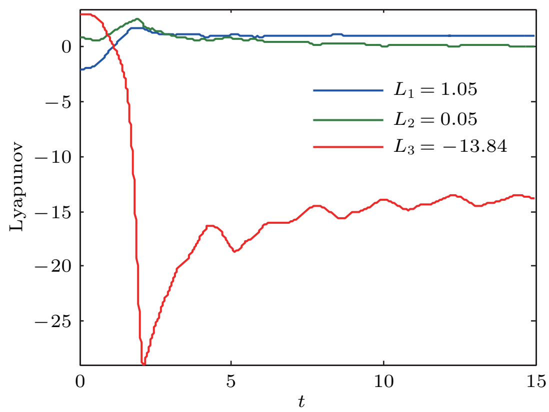

图7 系统(2)的Lyapunov指数图

Fig. 7. Lyapunov exponents of the system (2).

2.3.4 系统的参数影响

随着系统参数的变化, 系统的稳定性将发生变化, 从而系统也处于不同的状态, 用分岔图和Lyapunov指数图可以直观地表明系统参数变化时系统状态的变化情况. 固定参数$b = 8.2$, $c = 5$, $d = 3$, $w = 10000$, 选取初始状态$(x, y, z) = (-0.1, -0.1, -0.1)$, 并且选择Poincare截面为$y = 5$. 当有一个Lyapunov指数大于零时, 系统处于混沌状态, 由图8(a)可见, 随着a的变化, 系统的Lyapunov指数也在变化, 除最小Lyapunov指数一直在减小外, 其他两个变化不是很明显. 当$a \in [1.7, 4.0]$时, 最大的Lyapunov指数大于零, 系统处于混沌状态. 而当a处于其他区间时, 系统基本上都是两个Lyapunov指数等于零和一个Lyapunov指数小于零, 系统处于周期状态, 即系统存在环面吸引子, 只是在少数区间存在两个Lyapunov指数小于零和一个Lyapunov指数等于零的情况, 系统存在着环吸引子. 观察图8, 当$a = 2$时, 系统(2)处于混沌状态. 从图8(b)的局部放大图可以看出系统(2)出现了倍周期分岔通向混沌的道路.

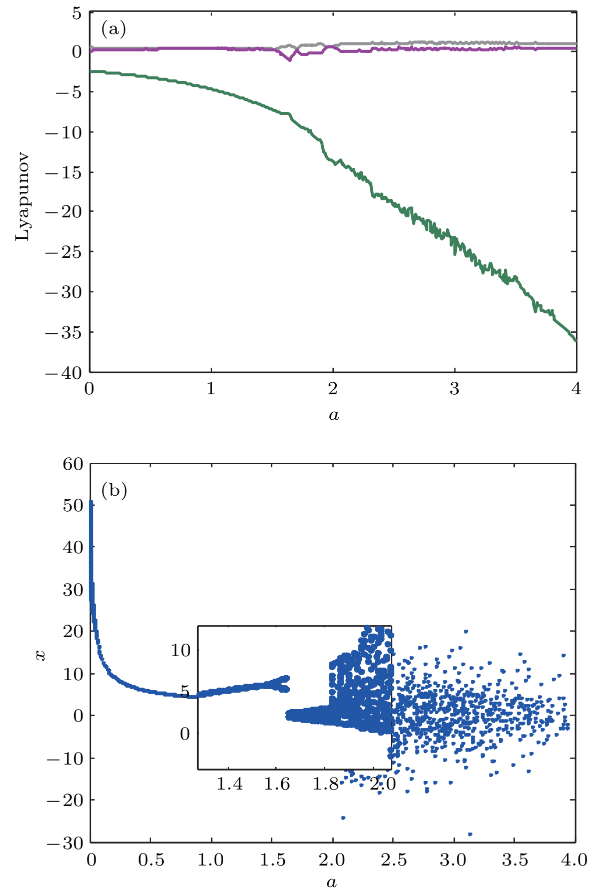

图8 参数a变化时系统(2)的Lyapunov指数图和分岔图 (a) Lyapunov指数图; (b) 分岔图

Fig. 8. The Lyapunov spectrum and bifurcation diagram of system (2) with the change of a: (a) Lyapunov spectrum; (b) bifurcation diagram.

3 混沌吸引子的模拟实现和SPICE仿真

为了验证系统的混沌行为, 设计了可以实现该系统的电路. 该电路由三路模拟运算电路组成, 分别实现系统的状态变量v_x, v_y和v_z的运算. 用到的元器件有LM675运放, 忆阻器, 乘法器, 二极管, 电容和电阻等. 每个模块分别代表系统的一个变量的无量纲方程. 在第一个模块中, 首先用两个放大器组成的绝对值电路对变量v_y取绝对值, 然后反向输入忆阻器模型的磁通端, 从电荷端输出后再经过两个反向比例电流, 后经过加法运算和积分运算得到变量v_x. 在第二个模块中, 通过乘法器、积分器、加法器和反向器等运算, 得到变量v_y. 同理, 第三个模块中得到变量v_z. 加入该系统的电源为$V_{\rm cc}=30$ V, $V_{\rm EE}=-30$ V.

运算放大器U1和U2被用来实现绝对值电路. 二极管选D20NQ045, 当$v_y<0$时, $\rm D_1$导通, $\rm D_2$截止, 反相端“−”虚短, 运算放大器U1的输出电压$v_{\rm U1}=0$, 运算放大器U2为加法器, 输出电压为$v_{\rm U2}=-\dfrac{R_7}{R_4}v_y$; 当$v_y\geqslant 0$时, 运算放大器U1输出电压小于0, $\rm D_1$截止, 只要U1达到−0.7 V, 就导通$\rm D_2$, 此时U1相当于一个反相输入的比例放大器, 运算放大器的电压$v_{\rm U1}=-\dfrac{R_3}{R_1}v_y$, 运算放大器U2为加法器, 输出电压为$v_{\rm U2}=-\left(\dfrac{R_7}{R_4}v_y+\dfrac{R_7}{R_5}v_{\rm U1}\right)$, 即

$$v_{\rm U2}=-\frac{R_7}{R_4}v_y+\frac{R_7R_3}{R_5R_1}. \tag{10}$$

综上可知:

$$v_{\rm U2}=\begin{cases}-\dfrac{R_7}{R_4}v_y+\dfrac{R_7R_3}{R_5R_1}, & v_y\geqslant 0,\\[2mm] -\dfrac{R_7}{R_4}, & v_y<0.\end{cases} \tag{11}$$

当$R_1=R_3=R_4=R_7=1$ kΩ, $R_2=R_5=500$ Ω, U2的输出电压$v_{\rm U2}=|v_y|$, 运算放大器$v_{\rm U3}$的输出电压为: $v_{\rm U3}=-\dfrac{R_9}{R_8}|v_y|$. 令$R_8=R_9=1$ kΩ, 可以得到$v_{\rm U3}=-|v_y|$.

U3的输出作为磁通控制器忆阻器的输入, 磁通控制忆阻器的参数设置为$R_{\rm on}=100$ Ω, $R_{\rm off}=20$ kΩ, $M(0)=16$ kΩ, $D=10$ nm和$u_v=10^{-14}$ m^2·s^{-1}·V^{-1}.

运算放大器U4和U5主要对信号进行两级放大, 每一级放大的增益均为100. 经过两级放大后, 忆阻器的电荷被放大了10000倍. 运算放大器U6实现一个反相比例器. 令$R_{10}=100$ Ω, $R_{12}=100$ Ω, $R_{11}=R_{13}=10$ kΩ, 得到

$$v_{\rm U6}=\frac{R_{11}R_{13}R_{15}}{R_{10}R_{12}R_{14}}f(-|y|)=-10000f(-|y|). \tag{12}$$

由运算放大器U10和U11分别实现一个加法器和一个积分器可以得到:

$$\begin{aligned}v_{\rm U8}&=\frac{R_{18}R_{20}}{R_{17}R_{19}}v_y\cdot v_z,\\ v_{\rm U9}&=-\frac{R_{22}}{R_{21}}v_x,\\ v_{\rm U10}&=-\frac{R_{25}}{R_{16}}v_{\rm U6}-\frac{R_{25}}{R_{24}}v_{\rm U8}+\frac{R_{25}}{R_{23}}v_{\rm U9},\\ v_x=v_{\rm U11}&=-\frac{1}{R_{26}C_1}\int\Big(-\frac{R_{25}}{R_{16}}v_{\rm U6}\\ &\quad-\frac{R_{25}}{R_{24}}v_{\rm U8}-\frac{R_{25}}{R_{23}}v_{\rm U9}\Big){\rm d}t.\end{aligned} \tag{13}$$

那么, 得到

$$\begin{aligned}\dot{v}_x=&\frac{R_{25}}{R_{26}C_1R_{16}}v_{\rm U6}+\frac{R_{25}}{R_{26}R_{24}C_1}v_{\rm U8}\\ &+\frac{R_{25}}{R_{26}R_{23}C_1}v_{\rm U9}.\end{aligned} \tag{14}$$

将v_{U6}, v_{U8}, v_{U9}代入(14)式得到:

$$\begin{aligned}\dot{v}_x=&-10000\frac{R_{25}}{R_{26}R_{16}C_1}f(-|y|)\\ &+\frac{R_{25}R_{18}R_{20}}{R_{26}R_{24}C_1R_{17}R_{19}}v_y\cdot v_z\\ &-\frac{R_{25}R_{22}}{R_{26}R_{23}C_1R_{21}}v_x.\end{aligned} \tag{15}$$

再把$R_{17}=R_{21}=R_{19}=R_{16}=R_{24}=R_{23}=R_{25}=R_{20}=1$ kΩ, $R_{22}=2$ kΩ, $R_{18}=8.2$ kΩ, $R_{26}=1$ MΩ, $C_1=1$ μF代入, 由(15)式可以得到:

$$\dot{v}_x=-2x+8.2yz-10000f(-|y|). \tag{16}$$

同理,

$$\begin{aligned}v_{\rm U15}=&\frac{R_{30}R_{28}}{R_{29}R_{27}}v_y\cdot v_y\cdot v_y-\frac{R_{30}R_{32}R_{34}}{R_{35}R_{31}R_{33}}v_x\cdot v_z\\ &+\frac{R_{37}R_{39}R_{30}}{R_{36}R_{38}R_{40}}v_y,\\ v_y=&v_{\rm U16}\\ =&-\frac{1}{R_{41}C_2}\int\Big(\frac{R_{30}R_{28}}{R_{29}R_{27}}v_y\cdot v_y\cdot v_y\\ &-\frac{R_{30}R_{32}R_{34}}{R_{35}R_{31}R_{33}}v_x\cdot v_z+\frac{R_{37}R_{39}R_{30}}{R_{36}R_{38}R_{40}}v_y\Big){\rm d}t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_y = &-\frac{R_{30}R_{28}}{R_{29}R_{27}R_{41}C_2}v_y\cdot v_y\cdot v_y\\&+\frac{R_{30}R_{32}R_{34}}{R_{35}R_{36}R_{33}R_{41}C_2}v_x\cdot v_z\\&-\frac{R_{37}R_{39}R_{30}}{R_{38}R_{36}R_{40}R_{41}C_2}v_y,\end{aligned}$$

令 $R_{27}=R_{29}=R_{30}=R_{31}=R_{33}=R_{35}=1\ \text{k}\Omega$, $R_{28}=5\ \text{k}\Omega$, $R_{32}=1\ \text{k}\Omega$, $R_{36}=1\ \text{M}\Omega$, $C_2=1\ \mu\text{F}$, 那么得到

$$\dot{v}_y=-5y^3+xz+y. \tag{17}$$

因此, 按照以上的方法可以得到

$$\dot{v}_z=3z–xy. \tag{18}$$

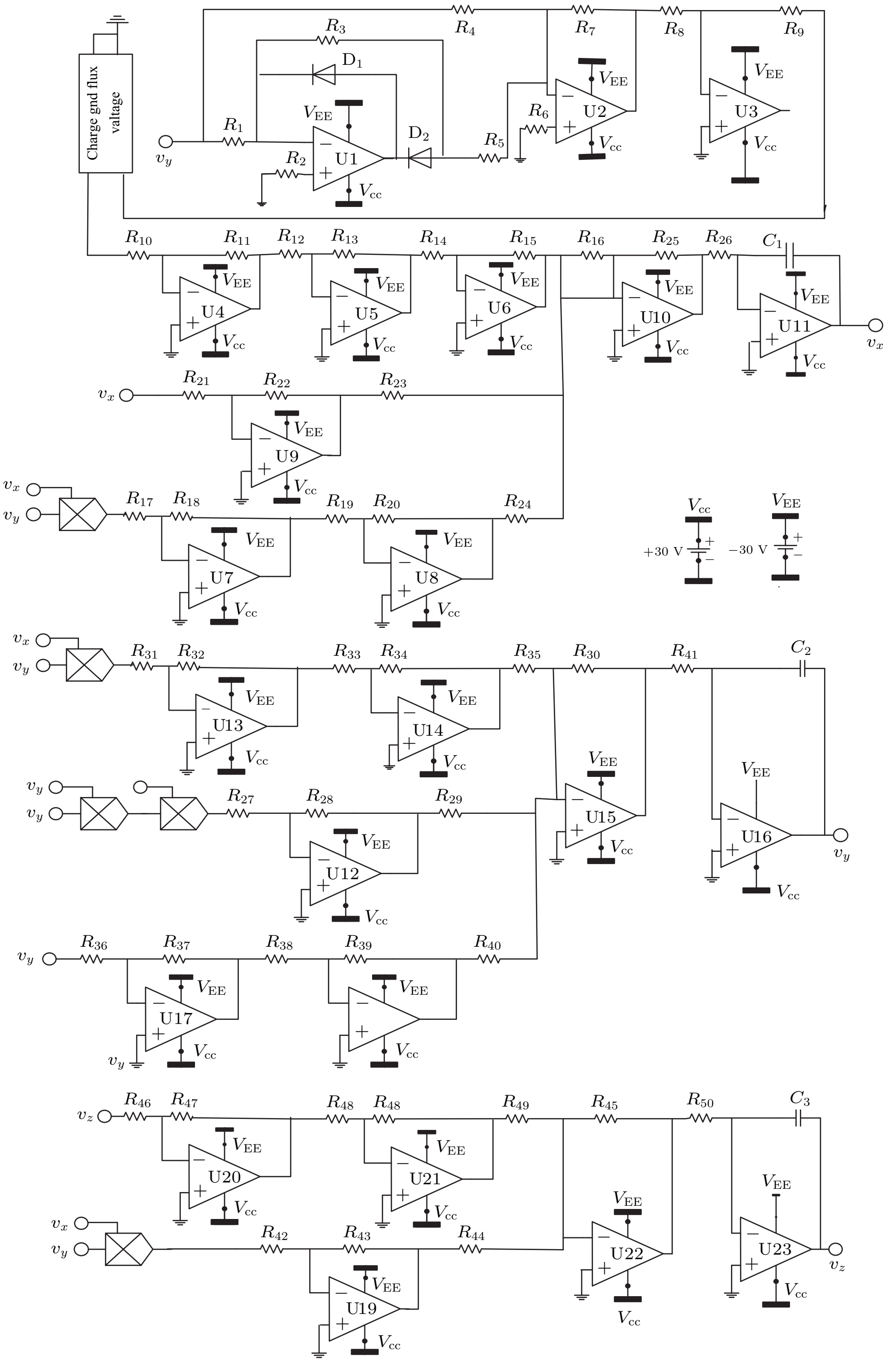

图9 混沌系统(2)的SPICE仿真电路图

Fig. 9. Analog SPICE implementation of the memristive chaotic system (2).

SPICE的步长为0.05 s, 最大的终止步长为200 s, 输出打印时间为0.5 s. 利用SPICE对图9电路进行瞬时仿真.

调节电阻R_{15}的值, 即调整系统参数w的值. 当R_{15} = 10 kΩ, 即w置于10000, 仿真结果如图10所示; 当R_{15} = 2 kΩ, 即w 置于2000时仿真结果如图11所示; 当R_{15} = 25 kΩ, 即w置于25000, 仿真结果如图12所示.

忆阻混沌系统的电路仿真结果对比图2、图3和图4中的相图, 可知混沌吸引子电路实验与数值仿真结果一致, 从而验证了该混沌吸引子存在于三维忆阻电路中.

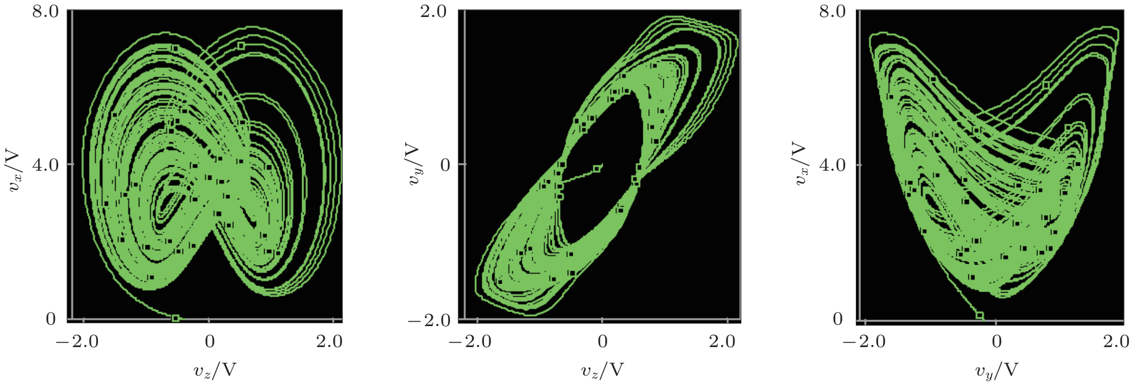

图10 w = 10000时系统(2)的SPICE仿真结果

Fig. 10. SPICE simulation results of system (2) when w = 10000.

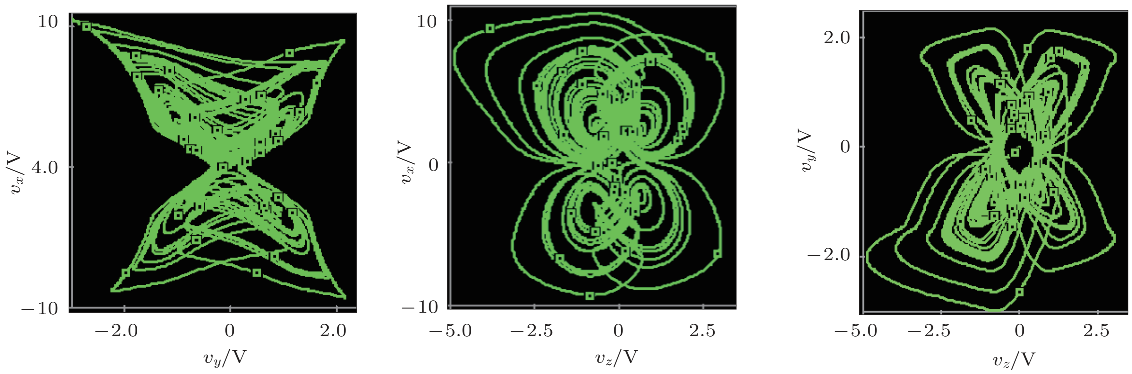

图11 w = 2000 时系统(2)的SPICE仿真结果

Fig. 11. SPICE simulation results of the system(2) when w = 2000.

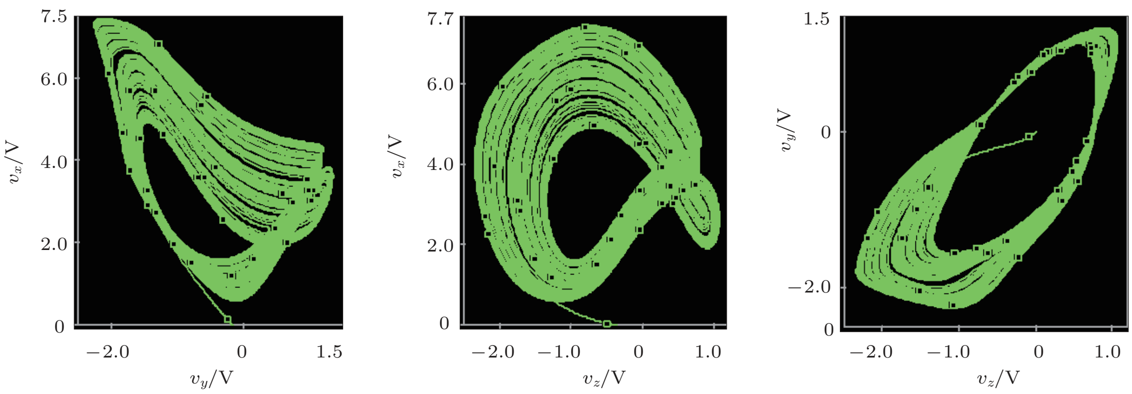

图12 w = 25000时, 系统(2)的SPICE仿真结果

Fig. 12. SPICE simulation results of the system (2) when w = 25000.

4 利用最大Lyapunov指数实现脉冲忆阻混沌同步

假设有驱动系统与响应系统, 令

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -ax_1 + bx_2x_3 - wf(-|x_2|),\\ \dot{x}_2 = x_2 + x_1x_3 - cx_2^3,\\ \dot{x}_3 = dx_3 - x_1x_2.\end{cases} \tag{19}$$

作为驱动系统, 那么系统(19)可以写成如下的形式:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}), \tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & d\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}bx_2x_3 - wf(-|x_2|)\\ x_1x_3 - cx_2^3\\ -x_1x_2\end{pmatrix}. \tag{21}$$

响应系统可以写成如下的形式:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{Y}), & t \neq t_i,\ i = 1, 2, \cdots,\\ \Delta\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(t_i^+) - \boldsymbol{Y}(t_i^-) & \\ = \boldsymbol{Y}(t_i^+) - \boldsymbol{Y}(t_i) = BE, & t = t_i,\ i = 1, 2, \cdots,\\ \boldsymbol{Y}(t_0^+) = Y(0), & \end{cases} \tag{22}$$

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}},\\ &\boldsymbol{E} = (e_1, e_2, e_3)^{\mathrm{T}} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)^{\mathrm{T}},\\ &\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3),\end{aligned} \tag{23}$$

则误差系统为:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E} + \rho(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), & t \neq t_i,\\ \Delta\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{E}, & t = t_i,\end{cases} \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})\\ &= \begin{pmatrix}by_2y_3 - wf(-|y_2|) - bx_2x_3 + wf(-|x_2|)\\ y_1y_3 - cy_2^3 - x_1x_3 + cx_2^3\\ y_1y_2 + x_1x_2\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{25}$$

下面从最大Lyapunov指数的角度给出实现脉冲混沌同步的充分条件.

假定系统(20)和系统(22)的初始状态距离为$||E(0)||$, 该忆阻混沌系统的最大Lyapunov指数从2.3.3节可知为L_1, 对系统(22)不加控制, 则经过较短的时间Δt后该距离不会超过

$$\|E(0)\|^{L_1\Delta t}.$$

通常认为混沌运动的最大可预测时间为$1/\lambda_1$ [32]. 由此可以得出如下的定理.

定理1 设β是$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})$($\boldsymbol{I}$代表单位矩阵)的最大特称值, L_1是系统(20)的最大Lyapunov指数, η是脉冲的间隔, $\varepsilon > 1$且为常数, 若取适当的β和η满足

$$\ln\varepsilon\beta + 2L_1\eta \leqslant 0, \tag{26}$$

并且$\eta < 1/L_1$, 则系统(20)和系统(22)将达到同步.

证明 设

$$\boldsymbol{V}(t) = \boldsymbol{E}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(t), \tag{27}$$

则

$$\boldsymbol{V}(t_0) = \boldsymbol{V}(t_0^+) = \boldsymbol{E}(t_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(t_0). \tag{28}$$

因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(t_1) &= \boldsymbol{E}(t_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(t_1) \leqslant \left[\mathrm{e}^{L_1\eta}E(t_0)\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathrm{e}^{L_1\eta}E(t_0)\right]\\ &= \mathrm{e}^{2L_1\eta}V(t_0),\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(t_1^+) &= \left[(I+B)\boldsymbol{E}(t_1)\right]^{\mathrm{T}}(I+B)\boldsymbol{E}(t_1)\\ &\leqslant \beta\boldsymbol{E}(t_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(t_1)\\ &= \beta\boldsymbol{V}(t_1) \leqslant \beta\mathrm{e}^{2L_1\eta}\boldsymbol{V}(t_0).\end{aligned} \tag{30}$$

同理

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(t_2) &= \boldsymbol{E}(t_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(t_2)\\ &\leqslant \left[\mathrm{e}^{L_1\eta}\boldsymbol{E}(t_1^+)\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathrm{e}^{L_1\eta}\boldsymbol{E}(t_1^+)\right]\\ &= \mathrm{e}^{2L_1\eta}V(t_1^+) \leqslant \beta\,\mathrm{e}^{2L_1\eta}\,\mathrm{e}^{2L_1\eta}V(t_0),\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(t_2^+) &= \left[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{E}(t_2)\right]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{E}(t_2)\\ &\leqslant \beta\boldsymbol{E}(t_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(t_2)\\ &= \beta V(t_2) \leqslant (\beta\,\mathrm{e}^{2L_1\eta})^2V(t_0).\end{aligned} \tag{32}$$

依次类推

$$\boldsymbol{V}(t_i^+) = (\beta\,\mathrm{e}^{2L_1\eta})^i\boldsymbol{V}(t_0), \quad i = 1, 2, 3\cdots. \tag{33}$$

由定理1中的条件$\ln\varepsilon\beta + 2L_1\eta \leqslant 0$, 有

$$\beta\,\mathrm{e}^{2L_1\eta} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < 1. \tag{34}$$

由(34)式可知

$$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{V}(t_i^+) = 0. \tag{35}$$

因此有

$$\lim_{i\to\infty}\|\boldsymbol{E}(t)\|=0. \tag{36}$$

证毕.

这里选取忆阻混沌系统的参数为 $a=2$, $b=8.2$, $c=5$, $d=3$ 和 $w=10000$, 使系统 (2) 呈现双涡卷的混沌状态, 此时系统 (2) 最大 Lyapunov 指数 $L_1=1.05$. 取 $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(-1.5,-1.5,-1.5)$, $\varepsilon=4$, 代入 (26) 式解得 $\eta\leqslant 0$. 显然, $\eta<1/L_1=0.952$ 即可, 即 $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(-1.5,-1.5,-1.5)$, 脉冲间隔不大于 0.952 s, 就可以令系统 (20) 和系统 (22) 达到同步.

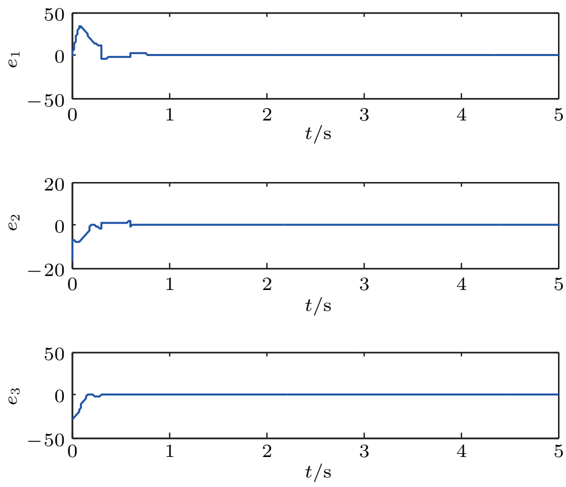

图 13　两系统的同步误差曲线

Fig. 13. Synchronous error curves of two systems.

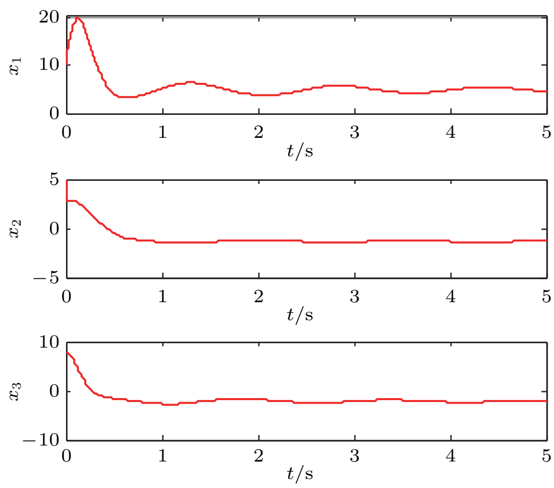

图 14　系统 (20) 驱动系统的时域图

Fig. 14. Time domain diagram of driving system of system (20).

在数值仿真中, 取 $B=\mathrm{diag}(-1.5,-1.5,-1.5)$, $\eta=0.05$ s, 选取时间步长为 $\tau=0.0001$ s, 采用四阶 Runge-Kutta 法求解方程 (20) 和 (22). 驱动系统 (20) 和响应系统 (22) 初始点分别选取为 $\boldsymbol{X}(0)=(10,5,8)$ 和 $\boldsymbol{Y}(0)=(8,-12,-20)$. 因此, 误差系统的初始值为 $\boldsymbol{E}(0)=(-2,-17,-28)$. 图 13 为驱动系统 (20) 和响应系统 (22) 的同步模拟结果, 图 14 为驱动系统 (20) 时域图的模拟结果, 图 15 为响应系统 (22) 时域图结果, 由误差效果图可见, $e_1(t)$, $e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 最终稳定在零点附近, 即 $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(-1.5,-1.5,-1.5)$, 脉冲间隔 $\eta=0.05$ s 时, 驱动系统 (20) 与响应系统 (22) 达到了同步.

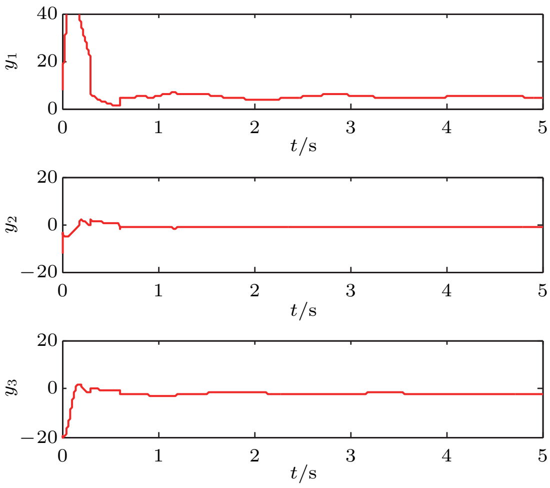

图 15　系统 (22) 响应系统的时域图

Fig. 15. Time domain diagram of response system of system (22).

5　结　论

忆阻器具有一种其他三种基本元件任意组合都不能复制的特性, 它是一种有记忆功能的非线性电阻, 可以记忆流经它的电荷数量, 通过控制电流的变化可改变其阻值, 并且体积小, 功耗低, 在混沌电路中有着很高的应用前景. 本文首先基于增广 Lü 系统和磁控忆阻器模型, 构建了一个基于忆阻器的三维混沌系统. 当仅仅改变系统的一个参数时, 得到了单涡卷、双涡卷和四涡卷的混沌吸引子. 由此可见, 忆阻器的引入大大丰富了混沌系统的混沌程度, 得到了复杂的混沌特性. 通过对称性、平衡点稳定性、时域谱、功率谱、Lyapunov 指数和维数、Poincare 截面图和分岔图研究了该忆阻混沌系统的基本动力学特性, 验证了该系统的混沌特性. 然后, 实现了 SPICE 电路的模拟仿真, 仿真结果与数值分析相符, 进一步验证了该忆阻混沌设计的正确性和可实现性. 最后, 利用最大 Lyapunov

指数的方法实现了忆阻混沌系统的脉冲混沌同步, 数值仿真证实了忆阻混沌系统的存在性以及脉冲同步控制的可行性, 对促进忆阻器的应用意义重大, 为进一步研究忆阻混沌系统在语音保密通信和信息处理中的应用提供了实验基础.

参考文献

[1] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circ. Theor.* **18** 507

[2] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Williams R S 2008 *Nature* **453** 83

[3] Tour J M, He T 2008 *Nature* **453** 42

[4] Yang Y C, Pan F, Liu Q, Liu M, Zeng F 2009 *Nano Lett.* **9** 1636

[5] Pershin Y V, Di Ventra M 2010 *Neural Netw.* **23** 881

[6] Pershin Y V, Fontaine S L, Di Ventra M 2010 *Neural Netw.* **23** 881

[7] Wang L D, Li H F, Duan S K, Huang T W 2016 *Neurocomputing* **171** 23

[8] Wang H M, Duan S K, Huang T W, Wang L D, Li C D 2017 *IEEE Trans. Neur. Net. Lear.* **28** 766

[9] Shin S, Kim K, Kang S M 2011 *IEEE Trans. Nanotechnol.* **10** 266

[10] Witrisal K 2009 *Electron. Lett.* **45** 713

[11] Itoh M, Chua L O 2008 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **18** 3183

[12] Bharathwaj M, Kokate P P 2009 *IETE Tech. Rev.* **26** 415

[13] Muthuswamy B 2010 *Int. J Bifurcat. Chaos* **20** 1335

[14] Bao B C, Xu J P, Zhou G H, Liu Z 2011 *Chin. Phys. B* **20** 109

[15] Bao B C, Xu J P, Liu Z 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 51

[16] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Electron. Lett.* **46** 237

[17] Wang L D, Duan S K, Drakakis E, He P F, Liao X F 2012 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **22** 241

[18] Iu H H C, Yu D S, Fitch A L, Chen H 2011 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **58** 1337

[19] Wang W, Zeng Y C, Sun R T 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 040502 (in Chinese) [王伟, 曾以成, 孙睿婷 2017 物理学报 **66** 040502]

[20] Ruan J Y, Sun K H, Mou J 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 190502 (in Chinese) [阮静雅, 孙克辉, 牟俊 2016 物理学报 **65** 190502]

[21] Joglekar Y N, Wolf S J 2009 *Eur.J. Phys.* **30** 661

[22] Xu Y M, Wang L D, Duan S K 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 120503 (in Chinese) [许雅明, 王丽丹, 段书凯 2016 物理学报 **65** 120503]

[23] Min G Q, Wang L D, Duan S K 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 210507 (in Chinese) [闵国旗, 王丽丹, 段书凯 2015 物理学报 **64** 210507]

[24] Wu J N, Wang L D, Chen G R, Duan S K 2016 *Chaos, Solitons Fract.* **92** 20

[25] Min G Q, Wang L D, Duan S K 2016 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **26** 1650129

[26] Wang X Y 2012 *Synchronization of Chaotic System and Its Application in Secure Communication* (Beijing: The Science Press) pp173–187 (in Chinese) [王兴元 2012 混沌系统的同步及在保密通信中的应用 (北京: 科学出版社) 第 173—187 页]

[27] Itoh M, Yang T, Chua L O 2001 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **11** 551

[28] Li C D, Liao X F 2004 *Chaos, Solitons Fract.* **22** 857

[29] Wang Y W, Guan Z H, Xiao J 2004 *Chaos* **14** 199

[30] Ren Q S, Zhao J Y 2006 *Phys. Lett. A* **355** 342

[31] Lü J H, Chen G R 1999 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **9** 1420

[32] Lü J H, Lu J A, Chen S H 2002 *Chaotic Time Series Analysis and Its Application* (Wuhan: The Wuhan University Press) pp176–177 (in Chinese) [吕金虎, 陆君安, 陈士华 2002 混沌时间序列分析及其应用 (武汉: 武汉大学出版社) 第 176—177 页]

Memristor-based multi-scroll chaotic system and its pulse synchronization control*

Yan Deng-Wei[1)2)] Wang Li-Dan[1)2)†] Duan Shu-Kai[1)2)]

1) (*Chongqing Key Laboratory of Nonlinear Circuits and Intelligent Information Processing, Chongqing 400715, China*)

2) (*School of Electronic and Information Engineering, Southwest University, Chongqing 400715, China*)

(Received 3 January 2018; revised manuscript received 19 February 2018)

Abstract

The memristor is a nonlinear element and intrinsically possesses memory function. When it works as nonlinear part of a chaotic system, the complexity and the randomness of signal will be enhanced. In this paper memristor is introduced into a three-dimensional chaotic system based on the augmented Lü system. The interesting and promising behaviors of complex single, double and four-scroll chaotic attractors generated only by varying a parameter have not been reported in memristive chaotic system and thus they deserve to be further investigated. It is also obvious that such a simple change of one parameter could be used to generate a variety of quite complex attractors. Therefore, as a nonlinear device the memristor plays an important role in this system. Firstly, some basic dynamical properties of the memristive chaotic system, including symmetry and in-variance, the existence of attractor, equilibrium, and stability are investigated in detail. By numerically simulating the power spectrum, Lyapunov exponent, Poincare map and bifurcation diagram, in this paper we verify that the proposed system has abundant dynamical behaviors. The sensitivities of system parameters to the chaotic behaviors are further explored by calculating, in detail, its Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagrams. The results of simulation and experiment are in good agreement, thereby proving the veracity of analysis. The memristive chaotic circuit is designed using the memristor, operational amplifier, analog multiplier and other conventional components. The circuit implementation of the memristive system is simulated using SPICE (simulation program with integrated circuit emphasis). The SPICE simulation results and the theoretical analysis are found to be in good agreement, and thus verifying that the system can produce chaos. Pulse synchronization has the following characteristics: low energy consumption, fast synchronization and easy-to-implement single-channel transmission. Therefore, it is more practical in chaotic secure communication. Subsequently the pulse chaos synchronization is realized from the perspective of the maximum Lyapunov exponent, and numerical simulations show the existence of new memristive chaotic system and the feasibility of pulse synchronization control, and also provide an experimental basis for further studying the applications of the memristive chaotic system in voice secure communication and information processing.

Keywords: memristor, chaotic attractors, SPICE design, the pulse synchronous control

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Pq, 05.45.Vx, 05.45.Xt **DOI:** 10.7498/aps.67.20180025

* Project supported by the National Natural Science of China (Grant Nos. 61571372, 61672436), the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant Nos. XDJK2016A001, XDJK2017A005), and the Chongqing Basic Science and Frontier Technology Research, China (Grant No. cstc2017jcyjBX0050).

† Corresponding author. E-mail: ldwang@swu.edu.cn